Geometria Uno Reference Cards

Geometria Affine ed Euclidea

Send comments and corrections to ⟨maurizio@math.unipd.it⟩

Geometria Affine.

Assiomi. Uno Spazio Affine con spazio delle traslazioni V (spazio vettoriale di dimensione n su un corpo C) è un insieme $\mathbb{A}$ dotato di una azione di V: $\mathbb{A}\times V\longrightarrow\mathbb{A}$: $(x,v)\mapsto x+v$ soggetti ai seguenti assiomi:

azione nulla: $x+0=x$ $(\forall x)$;

associatività: $(x+v)+w=x+(v+w)$ $(\forall x,v,w)$;

differenza di punti: $(\forall x,y)(\exists! v)x+v=y$. (l'unico vettore v si scrive $v=y-x$, sicché possiamo parlare di "differenza tra punti").

Coordinate. Lo spazio affine standard $\mathbb{A}^n(C)$ di dimensione n su C con spazio delle traslazioni $V_n(C)$ è l'insieme C^n. La scelta di un punto $O\in\mathbb{A}$ e di una base $e=(e_1,\ldots,e_n)$ di V determinano un sistema di coordinate in $\mathbb{A}$: ogni punto $P\in\mathbb{A}$ si scrive unicamente come $P=O+\sum_i x_ie_i$, e $(x_1,\ldots,x_n)$ si dicono le coordinate di P nel riferimento dato da $(O,e_1,\ldots,e_n)$.

Equivalentemente si possono scegliere $n+1$ punti $O,P_1,\ldots,P_n$ tali che i vettori P_i-O siano *li*, dunque una base di V.

Sottospazi affini. Un sottinsieme del tipo $P+W$ con $P\in\mathbb{A}$ e W un sottospazio vettoriale di V di dimensione m si dice una varietà affine di dimensione m di $\mathbb{A}$; W si chiama lo spazio direttore.

Una varietà affine di descrive tramite equazioni parametriche: se $w_1,\ldots,w_m$ sono una base di W, allora ogni punto X di $P+W$ si scrive come $X=P+\sum_i\alpha_iw_i$ ove gli $\alpha_i\in C$ sono i parametri e, se P ha coordinate $(x_1,\ldots,x_n)$, si può esplicitare:

$$\begin{cases} X_1=x_1+\sum_i\alpha_iw_{i,1} \\ \cdots \\ X_n=x_n+\sum_i\alpha_iw_{i,n}\end{cases}$$

Oppure tramite un sistema di $n-m$ equazioni lineari (rappresentazione cartesiana) che si ottengono dalla condizione

$$\mathrm{rk}(X-x \quad w_1 \quad \cdots \quad w_m)\leqslant m$$

(esiste una sottomatrice quadrata invertibile di ordine m: e allora basta annullare i determinanti di ordine $m+1$ contenenti quella sottomatrice). Equivalentemente si può chiedere che

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ X & x & w_1 & \cdots & w_m\end{pmatrix}\leqslant m+1.$$

Viceversa un sistema lineare di m equazioni nelle incognite $X=(X_1,\ldots,X_n)$ (che abbia soluzioni) determina una varietà affine di dimensione $n-r$ ove r è il rango comune delle matrici completa e incompleta. Il sistema di equazioni si dice minimale se è composto esattamente di r equazioni. Risolvere il sistema equivale a trovare una rappresentazione parametrica per la varietà lineare.

Posizioni reciproche di sottospazi affini: siano $L=P+W$ e $L=P'+W'$, con $m:=\dim_CW$ e $m':=\dim_CW'$; i due sottospazi si dicono incidenti se $L\cap L'\neq\varnothing$ (e l'intersezione è un sottospazio affine); disgiunti in caso contrario. Si dicono parallele se $W\subseteq W'$ o $W'\subseteq W$; in tal caso possono appartenersi ($L\subseteq L'$ resp. $L'\subseteq L$) oppure essere disgiunte. Si dicono sghembe sono disgiunte e se $W\cap W'=0$.

Poniamo $L\wedge L':=L\cap L'$, e $L\vee L'$:=minima sottovarietà contenente L e L', si scrive come $P+\langle P'-P,W,W'\rangle$ ovvero $P'+\langle P-P',W,W'\rangle$ se le varietà sono disgiunte, altrimenti possiamo supporre $P=P'$ e allora si tratta di $P'+\langle W,W'\rangle$.

Risulta che: $\dim_C(L\vee L')+\dim_C(L\wedge L')\leqslant\dim_CL+\dim_CL'$ e vale l'uguaglianza se L e L' sono incidenti oppure sghembe ($\dim_C\varnothing:=-1$); se le varietà sono disgiunte (in particolare parallele) è $\dim_C(L\vee L')+\dim_C(W\cap W')=\dim_CL+\dim_CL'+1$.

Condizioni di indipendenza tra punti: una collezione di $m+1$ punti $P_0,P_1,\ldots,P_m\in\mathbb{A}$ si dice indipendente se i vettori $P_1-P_0,\ldots,P_m-P_0\in V$ sono *li*. Ciò si verifica sse la matrice $(P_1-P_0 \quad \cdots \quad P_m-P_0)$ ha rango m (dunque $m\leqslant n$), ovvero sse la matrice
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ P_0 & P_1 & \cdots & P_m\end{pmatrix}$$
ha rango $m+1$.

Una collezione indipendente di $m+1$ punti $P_0,P_1,\ldots,P_m\in\mathbb{A}$ determina una varietà affine di dimensione m: la più piccola varietà affine contenente quei punti. Ha equazioni parametriche $X=P_0+\sum_i\alpha_i(P_i-P_0)$ ed equazioni cartesiane date dalla condizione:

$$\mathrm{rk}(X-P_0 \quad P_1-P_0 \quad \cdots \quad P_m-P_0)\leqslant m$$

ovvero che

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ X & P_0 & P_1 & \cdots & P_m\end{pmatrix}\leqslant m+1.$$

Calcolo baricentrico. Dati $m+1$ punti $P_0,P_1,\ldots,P_m\in\mathbb{A}$ e m coefficienti $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in C$ tali che $\sum_i\alpha_i=1$, il punto definito da $P:=P_0+\sum_i\alpha_i(P_i-P_0)$ risulta indipendente dal punto di base P_0 e si può dunque scrivere come $P:=\sum_i\alpha_iP_i$ ("somma pesata di punti": la somma dei punti è definita solo se i coefficienti hanno somma 1). Il punto P si dice il baricentro del sistema dei punti $P_1,\ldots,P_m\in\mathbb{A}$ con i pesi rispettivi $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in C$.

Un sottinsieme L di $\mathbb{A}$ è un sottospazio affine se e solo se è stabile per somme pesate di punti, ovvero sse quando contiene due punti contiene la retta generata (combinazioni pesate di due punti).

Le combinazioni pesate di m punti indipendenti descrivono lo spazio affine generato da quei punti. In particolare: le combinazioni pesate di due punti distinti descrivono la retta congiungente i due punti; le combinazioni pesate di tre punti non allineati descrivono il piano congiungente i tre punti.

Il punto medio del segmento tra P_1 e P_2 è $\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_2$.

Il baricentro del triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3 sta nelle rette congiungenti un vertice col punto medio del lato opposto ed è $\frac{1}{3}P_1+\frac{1}{3}P_2+\frac{1}{3}P_3$.

Nel caso $C=\mathbb{R}$, possiamo descrivere il segmento tra P_1 e P_2 come le combinazioni pesate dei due punti con i combinatori $\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$; il triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3 tramite le combinazioni pesate con $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in[0,1]$; in generale l'inviluppo convesso di m punti si rappresenta tramite le combinazioni $\sum_i\alpha_iP_i$ con $\sum_i\alpha_i=1$ e $0\leqslant\alpha_i\leqslant1$ per ogni i.

Dati tre punti allineati $X,A,B\in\mathbb{A}$, se $X=\lambda A+\mu B$ con $\lambda+\mu=1$, definiamo $(XAB)=\mathrm{DR}(X;A,B):=-\frac{\mu}{\lambda}$. Se $\xi,\alpha,\beta\in C$ sono le coordinate di X,A,B, allora $(XAB)=\frac{\xi-\beta}{\xi-\alpha}$ ("rapporto tra le distanze"). X è il punto medio tra A e B sse $(XAB)=-1$.
Azione delle permutazioni: Se $(ABC)=\lambda$, allora: $(BAC)=\frac{\lambda}{\lambda-1}$; $(ACB)=\frac{1}{\lambda}$; $(CBA)=1-\lambda$; $(BCA)=\frac{\lambda-1}{\lambda}$; $(CAB)=\frac{1}{1-\lambda}$.
Abbiamo che $(ABC)=(ABD)(ADC)$.

Sia dato un triangolo di vertici i punti A,B,C (non allineati); siano A',B',C' tre punti rispettivamente sulle rette $B\vee C$, $A\vee C$, $A\vee B$; allora:
Teorema di Menelao: A',B',C' sono allineati sse $(A'BC)(B'CA)(C'AB)=1$;
Teorema di Ceva: $A\vee A'$, $B\vee B'$, $C\vee C'$ si incontrano in un punto sse $(A'BC)(B'CA)(C'AB)=-1$.

Affinità. Una affinità di $\mathbb{A}$ è una biiezione $F:\mathbb{A}\longrightarrow\mathbb{A}$ che rispetti la somma pesata dei punti, i.e. $F(\sum_i \alpha_i P_i)=\sum_i \alpha_i F(P_i)$ se $\sum_i \alpha_i=1$. Ciò equivale all'esistenza di $\varphi\in\mathrm{Aut}_C(V)$ tale che $F(P+v)=F(P)+\varphi(v)$ per ogni $P\in\mathbb{A}$ e $v\in V$; o ancora tale che $F(P)-F(Q)=\varphi(P-Q)$ per ogni $P,Q\in\mathbb{A}$. L'insieme delle affinità di $\mathbb{A}$ è un gruppo sotto la composizione e si indica con $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$.

Fissato $R\in\mathbb{A}$, ogni affinità è determinata da un vettore $v=F(R)-R$ e dalla applicazione lineare associata φ, tramite: $F(Q)=R+v+\varphi(P-Q)$. Questo dà un isomorfismo di gruppi $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})\longrightarrow V\times\mathrm{Aut}_C(V)$ ove la legge di gruppo di $V\times\mathrm{Aut}_C(V)$ è data da $(v,\varphi)\circ(w,\psi)=(v+\varphi w,\varphi\circ\psi)$.

Diciamo traslazioni di $\mathbb{A}$ le affinità con $\varphi=\mathrm{id}_V$; gli elementi di $\mathrm{Trasl}(\mathbb{A})$ sono determinati da $v\in V$ e risulta $\mathrm{Trasl}(\mathbb{A})\cong V$.

Diciamo affinità centrali di centro R le affinità che tengono fisso R; si indicano con $\mathrm{Centr}_R(\mathbb{A})$ e sono determinate da $\varphi\in\mathrm{Aut}_C(V)$ e risulta $\mathrm{Centr}_R(\mathbb{A})\cong\mathrm{Aut}_C(V)$.

La scelta di un riferimento affine (O,e) ove e è una base di V identifica $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ al sottogruppo di $\mathrm{GL}(n+1,C)$ delle matrici della forma $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\v&A'\end{smallmatrix}\right)$ dove $v\in V$ e $A'\in\mathrm{GL}(n,C)$.

Siano $\varphi\in\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ e L un sottinsieme di $\mathbb{A}$; allora L è sottovarietà affine se e solo se $\varphi(L)$ lo è, e in tal caso hanno la stessa dimensione. Se L è definita dalle equazioni $BX=b$ e φ è rappresentata dalla matrice $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\v&A'\end{smallmatrix}\right)$ allora $\varphi(L)$ è definita dalle equazioni $BA'^{-1}X=b+BA'^{-1}v$. In forma compatta: L è dato da $(-bB)\left(\begin{smallmatrix}1\\X\end{smallmatrix}\right)=0$, $\varphi(L)$ da $(-bB)A^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1\\X\end{smallmatrix}\right)=0$.

Piano affine: $\mathbb{A}^2$**.** Siano $P_i=(x_i,y_i)^t\in\mathbb{A}^2$ punti del piano e $v_i=(l_i,m_i)^t\in V$ vettori dello spazio direttore.

condizione di allineamento di tre punti:

$$\begin{vmatrix}x_1-x_0 & x_2-x_0\\ y_1-y_0 & y_2-y_0\end{vmatrix}=0,\ \text{ovvero}\ \begin{vmatrix}1&1&1\\x_0&x_1&x_2\\y_0&y_1&y_2\end{vmatrix}=0.$$

retta per due punti: $P_0+\langle P_1-P_0\rangle$;

equazioni parametriche $\begin{cases}X=x_0+\alpha(x_1-x_0)\\ Y=y_0+\alpha(y_1-y_0)\end{cases}$

ed equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix}X-x_0 & x_1-x_0\\ Y-y_0 & y_1-y_0\end{vmatrix}=0,\ \text{ovvero}\ \begin{vmatrix}1&1&1\\X&x_0&x_1\\Y&y_0&y_1\end{vmatrix}=0.$$

retta per un punto e direzione un vettore: $P_0+\langle v_0\rangle$;

equazioni parametriche $\begin{cases}X=x_0+\alpha l_0\\ Y=y_0+\alpha m_0\end{cases}$

ed equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix}X-x_0 & l_0\\ Y-y_0 & m_0\end{vmatrix}=0,\ \text{ovvero}\ \begin{vmatrix}1&1&0\\X&x_0&l_0\\Y&y_0&m_0\end{vmatrix}=0.$$

Posizione reciproche di due rette: date due rette $r_0=P_0+\langle v_0\rangle$ e $r_1=P_1+\langle v_1\rangle$ di equazioni cartesiane rispettivamente $a_0X+b_0Y+c_0=0$ e $a_1X+b_1Y+c_1=0$, esse risultano:

incidenti se v_0 e v_1 sono *li*; ovvero sse la matrice $\left(\begin{smallmatrix}a_0&b_0\\a_1&b_1\end{smallmatrix}\right)$ ha rango due. In tal caso il punto di incidenza ha coordinate date dalla regola di Cramer applicata al sistema delle due equazioni.

parallele e distinte se v_0 e v_1 sono *ld* e $P_0\notin r_1$; ovvero sse la matrice incompleta $\left(\begin{smallmatrix}a_0&b_0\\a_1&b_1\end{smallmatrix}\right)$ ha rango uno e la matrice completa $\left(\begin{smallmatrix}a_0&b_0&c_0\\a_1&b_1&c_1\end{smallmatrix}\right)$ ha rango due.

coincidenti se v_0 e v_1 sono *ld* e $P_0\in r_1$; ovvero sse le matrici incompleta e completa hanno rango uno.

fasci di rette: le rette passanti per un fissato punto P_0 si scrivono come $P_0+\langle\left(\begin{smallmatrix}l\\m\end{smallmatrix}\right)\rangle$, ovvero $m(X-x_0)-l(Y-y_0)=0$ con $(l,m)\neq(0,0)$.

le rette parallele ad un fissato vettore direzione v_0 si scrivono come $P+\langle v_0\rangle$ con P punto qualsiasi, ovvero $m_0X-l_0Y+c=0$ con $c\in C$.

due rette distinte r_0 e r_1 determinano un fascio di rette che si descrive tramite $\lambda(a_0X+b_0Y+c_0)+\mu(a_1X+b_1Y+c_1)=0$, ovvero $(\lambda a_0+\mu a_1)X+(\lambda b_0+\mu b_1)Y+(\lambda c_0+\mu c_1)=0$ per $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$.

Una retta r_2 appartiene al fascio determinato da r_0 e r_1 se e solo se la matrice completa del sistema delle tre rette ha determinante nullo.

Spazio affine: $\mathbb{A}^3$**.** Siano $P_i=(x_i,y_i,z_i)^t\in\mathbb{A}^3$ punti dello spazio e $v_i=(l_i,m_i,n_i)^t\in V$ vettori dello spazio delle traslazioni.

condizione di complanarità di quattro punti:

$$\begin{vmatrix}x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0\\ y_1-y_0 & y_2-y_0 & y_3-y_0\\ z_1-z_0 & z_2-z_0 & z_3-z_0\end{vmatrix}=0,\ \text{ovvero}\ \begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_0&x_1&x_2&x_3\\y_0&y_1&y_2&y_3\\z_0&z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}=0.$$

condizione di allineamento di tre punti:

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix}x_1-x_0 & x_2-x_0\\ y_1-y_0 & y_2-y_0\\ z_1-z_0 & z_2-z_0\end{pmatrix}=1,\ \text{ovvero}\ \mathrm{rk}\begin{pmatrix}1&1&1\\x_0&x_1&x_2\\y_0&y_1&y_2\\z_0&z_1&z_2\end{pmatrix}=2.$$

piano per tre punti non allineati: $P_0+\langle P_1-P_0,P_2-P_0\rangle$;

equazioni parametriche $\begin{cases}X=x_0+\alpha_1(x_1-x_0)+\alpha_2(x_2-x_0)\\ Y=y_0+\alpha_1(y_1-y_0)+\alpha_2(y_2-y_0)\\ Z=z_0+\alpha_1(z_1-z_0)+\alpha_2(z_2-z_0)\end{cases}$

ed equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix}X-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0\\ Y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0\\ Z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,\ \text{ovvero}\ \begin{vmatrix}1&1&1&1\\X&x_0&x_1&x_2\\Y&y_0&y_1&y_2\\Z&z_0&z_1&z_2\end{vmatrix}=0.$$

piano per un punto e direzione due vettori li: $P_0+\langle v_0,v_1\rangle$;

equazioni parametriche $\begin{cases}X=x_0+\alpha l_0+\beta l_1\\ Y=y_0+\alpha m_0+\beta m_1\\ Z=z_0+\alpha n_0+\beta n_1\end{cases}$

ed equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix}X-x_0 & l_0 & l_1\\ Y-y_0 & m_0 & m_1\\ Z-z_0 & n_0 & n_1\end{vmatrix}=0\ \text{ovvero}\ \begin{vmatrix}1&1&0&0\\X&x_0&l_0&l_1\\Y&y_0&m_0&m_1\\Z&z_0&n_0&n_1\end{vmatrix}=0.$$

posizioni reciproche di due piani: dati due piani $\pi_0=P_0+\langle v_0,v_0'\rangle$ e $\pi_1=P_1+\langle v_1,v_1'\rangle$ di equazioni cartesiane rispettivamente $a_0X+b_0Y+c_0Z+d_0=0$ e $a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1=0$, essi risultano:

incidenti se $\mathrm{rk}(v_0\,v_0'\,v_1\,v_1')=3$; ovvero sse la matrice $\left(\begin{smallmatrix}a_0&b_0&c_0\\a_1&b_1&c_1\end{smallmatrix}\right)$ ha rango due. In tal caso la retta di incidenza ha equazioni cartesiane date dal sistema delle due equazioni.

paralleli e distinti se $\mathrm{rk}(v_0\,v_0'\,v_1\,v_1')=2$; (i.e. gli spazi direttori coincidono: $\langle v_0,v_0'\rangle=\langle v_1,v_1'\rangle$) e $P_0\notin\pi_1$ (i.e. $\pi_0\cap\pi_1=\varnothing$); ovvero sse la matrice incompleta $\left(\begin{smallmatrix}a_0&b_0&c_0\\a_1&b_1&c_1\end{smallmatrix}\right)$ ha rango uno e la matrice completa $\left(\begin{smallmatrix}a_0&b_0&c_0&d_0\\a_1&b_1&c_1&d_1\end{smallmatrix}\right)$ ha rango due.

coincidenti se gli spazi direttori coincidono e $P_0\in\pi_1$; ovvero sse le matrici incompleta e completa hanno rango uno.

fasci di piani: i piani contenenti una fissata retta $r_0=P_0+\langle v_0\rangle$ (asse del fascio) di equazioni cartesiane $\begin{cases}a_0X+b_0Y+c_0Z+d_0=0\\ a_0'X+b_0'Y+c_0'Z+d_0'=0\end{cases}$ si scrivono come $P_0+\langle v_0,(l,m,n)^t\rangle$ con (l,m,n) vettore *li* con v_0, ovvero $\lambda(a_0X+b_0Y+c_0Z+d_0)+\mu(a_0'X+b_0'Y+c_0'Z+d_0')=0$ (i.e. $(\lambda a_0+\mu a_0')X+(\lambda b_0+\mu b_0')Y+(\lambda c_0+\mu c_0')Z+(\lambda d_0+\mu d_0')=0$ con $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$.

i piani paralleli ad un fissato spazio direttore $\langle v_0,v_1\rangle$ si scrivono come $P+\langle v_0,v_1\rangle$ con P punto qualsiasi, ovvero $(m_0n_1-n_0m_1)X+(-l_0n_1+n_0l_1)Y+(l_0m_1-m_0l_1)Z+c=0$ con $c\in C$ (i coefficienti sono i minori d'ordine due di (v_0v_1).

due piani distinti π_0 e π_1 determinano un fascio di piani descritto da $\lambda(a_0X+b_0Y+c_0Z+d_0)+\mu(a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1)=0$, ovvero $(\lambda a_0+\mu a_1)X+(\lambda b_0+\mu b_1)Y+(\lambda c_0+\mu c_1)Z+(\lambda d_0+\mu d_1)=0$ per $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$.

un piano π_2 appartiene al fascio di piani determinato da π_0 e π_1 se e solo se la matrice completa del sistema dei tre piani ha rango due.

stelle di piani: i piani passanti per un fissato punto P_0 si scrivono come $P_0+\langle v,w\rangle$ con v e w vettori *li*, ovvero $m(X-x_0)+l(Y-y_0)+n(Z-z_0)=0$ con $(l,m,n)\neq(0,0,0)$.

i piani paralleli ad un fissato vettore direzione v_0 (ovvero a una qualsiasi retta r_0 di direzione v_0) si scrivono come $P+\langle v_0,v\rangle$ con P punto qualsiasi e v vettore *li* con v_0, ovvero $aX+bY+cZ+d=0$ con $d\in C$, $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ tale che $al_0+bm_0+cn_0=0$.

tre piani distinti π_0, π_1 e π_2 che non appartengano ad un fascio determinano una stella di piani che si descrive tramite $\lambda(a_0X+b_0Y+c_0Z+d_0)+\mu(a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1)+$ $+\nu(a_2X+b_2Y+c_2Z+d_2)=0$, ovvero $(\lambda a_0+\mu a_1+\nu a_2)X+(\lambda b_0+\mu b_1+\nu b_2)Y+$ $+(\lambda c_0+\mu c_1+\nu c_2)Z+(\lambda d_0+\mu d_1+\nu d_2)=0$ per $(\lambda,\mu,\nu)\neq(0,0,0)$.

retta per due punti distinti: $P_0+\langle P_1-P_0\rangle$;

equazioni parametriche $\begin{cases} X=x_0+\alpha(x_1-x_0)\\ Y=y_0+\alpha(y_1-y_0)\\ Z=z_0+\alpha(z_1-z_0)\end{cases}$

ed equazioni cartesiane date dalla condizione:

$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} X-x_0 & x_1-x_0\\ Y-y_0 & y_1-y_0\\ Z-z_0 & z_1-z_0\end{pmatrix}=1$, ovvero $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ X & x_0 & x_1\\ Y & y_0 & y_1\\ Z & z_0 & z_1\end{pmatrix}=2$.

retta per un punto e di direzione un vettore: $P_0+\langle v_0\rangle$;

equazioni parametriche $\begin{cases} X=x_0+\alpha l_0\\ Y=y_0+\alpha m_0\\ Z=z_0+\alpha n_0\end{cases}$

ed equazioni cartesiane date da:

$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} X-x_0 & l_0\\ Y-y_0 & m_0\\ Z-z_0 & n_0\end{pmatrix}=1$ ovvero $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ X & x_0 & l_0\\ Y & y_0 & m_0\\ Z & z_0 & n_0\end{pmatrix}=2$.

posizione reciproche di due rette: date due rette $r_0=P_0+\langle v_0\rangle$ e $r_1=P_1+\langle v_1\rangle$ di equazioni cartesiane rispettivamente

$\begin{cases} a_0X+b_0Y+c_0Z+d_0=0\\ a_0'X+b_0'Y+c_0'Z+d_0'=0\end{cases}$ e $\begin{cases} a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1=0\\ a_1'X+b_1'Y+c_1'Z+d_1'=0\end{cases}$,

esse risultano:

sghembe se v_0 e v_1 sono *li* e $r_0\cap r_1=\varnothing$, ovvero sse la matrice incompleta del sistema delle due rette ha rango tre, e la matrice completa rango quattro;

incidenti e distinte se v_0 e v_1 sono *li* e $r_0\cap r_1\neq\varnothing$; ovvero sse le matrici incompleta e completa hanno rango tre. In tal caso il piano di appartenenza è dato da $P_0+\langle v_0,v_1\rangle$ ed è l'unico piano appartenente a entrambi i fasci di asse le due rette. Il punto di incidenza ha coordinate date dalla soluzione del sistema delle quattro equazioni.

parallele e distinte se v_0 e v_1 sono *ld* e $r_0\cap r_1=\varnothing$; ovvero sse la matrice incompleta ha rango due e la matrice completa ha rango tre. Il piano di appartenenza è $P_0+\langle P_1-P_0,v_0\rangle$ ed è l'unico piano appartenente a entrambi i fasci di asse le due rette.

coincidenti se v_0 e v_1 sono *ld* e $r_0\cap r_1\neq\varnothing$; ovvero sse la matrice incompleta e la matrice completa hanno rango due.

fasci di rette in un piano: con equazioni cartesiane, si tratta di intersecare il piano dato con la stella dei piani che soddisfano alle condizioni poste (passaggio per un punto o contenente una fissata direzione).

Se $\pi_0=P_0+\langle v_0,v_0'\rangle$ è il piano di giacenza, e si tratta del fascio per $P_1\in\pi_0$, il fascio di rette si scrive come $P_1+\langle\alpha v_0+\beta v_0'\rangle$ con $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$; se si tratta del facio di rette di direzione $v_1\in\langle v_0,v_0'\rangle$ allora si scrive come $(P_0+\alpha v_0+\beta v_0')+\langle v_1\rangle$ con (α,β) qualsiasi.

stelle di rette: le rette passanti per un fissato punto P_0 si scrivono come $P_0+\langle(l,m,n)^t\rangle$ con $(l,m,n)\neq(0,0,0)$, ovvero scegliendo due equazioni indipendenti tra $m(X-x_0)-l(Y-y_0)=0$, $n(X-x_0)-l(Z-z_0)=0$ e $n(Y-y_0)-m(Z-z_0)=0$.

le rette parallele ad un fissato vettore direzione v_0 si scrivono come $P+\langle v_0\rangle$ con $P=(x,y,z)^t$ punto qualsiasi, ovvero scegliendo due equazioni indipendenti tra $m_0(X-x)-l_0(Y-y)=0$, $n_0(X-x)-l_0(Z-z)=0$ e $n_0(Y-y)-m_0(Z-z)=0$.

posizioni reciproche di rette e piani: dati un piano $\pi_0=P_0+\langle v_0,v_0'\rangle$ e una retta $r_1=P_1+\langle v_1\rangle$, di equazioni cartesiane rispettivamente $a_0X+b_0Y+c_0Z+d_0=0$ e $\begin{cases} a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1=0\\ a_1'X+b_1'Y+c_1'Z+d_1'=0\end{cases}$,

essi risultano:

incidenti se v_0,v_0' e v_1 sono *li*; ciò accade sse le matrici completa e incompleta del sistema piano-retta hanno rango comune tre; le coordinate del punto di intersezione si ottengono applicando la regola di Cramer a tale sistema;

paralleli e disgiunti se $v_1\in\langle v_0,v_0'\rangle$ (i.e. se v_0,v_0' e v_1 sono *ld*) e $\pi_0\cap r_1=\varnothing$; ovvero sse la matrice incompleta ha rango due e la matrice completa ha rango tre.

appartenersi se $v_1\in\langle v_0,v_0'\rangle$ (i.e. se v_0,v_0' e v_1 sono *ld*) e $\pi_0\cap r_1\neq\varnothing$; ovvero sse le matrici incompleta e completa hanno rango due. In tal caso $r_1\subseteq\pi_0$.

Geometria Euclidea.

Uno Spazio Euclideo Reale è uno Spazio Affine $\mathbb{E}$ il cui spazio delle traslazioni sia uno spazio vettoriale euclideo reale.

Interpretazione euclidea delle equazioni cartesiane: i coefficienti delle variabili formano dei vettori che sono ortogonali al sottospazio direttore della varietà. Se L è il sottospazio $P_0+\langle v_1,\dots,v_m\rangle$ ed ha equazioni cartesianee date dal sistema $AX-b=0$ con $A\in\mathcal{M}_{r,n}$, $b\in\mathbb{R}^m$ ed $r=n-m$, allora risulta che le righe $A^1,\dots,A^r$ intese come (coordinate di) elementi di V sono indipendenti e ortogonali al sottospazio $\langle v_1,\dots,v_m\rangle$.
Si ha $V=\langle v_1,\dots,v_m\rangle\boxplus\langle A^1,\dots,A^r\rangle$.

Distanza tra punti: Definiamo la funzione distanza $d{:}\mathbb{E}\times\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{R}$ tramite: $d(P,Q):=\|Q-P\|$.
Proprietà della funzione distanza:

$d(P,Q)=0$ se e solo se $P=Q$;

simmetria: $d(P,Q)=d(Q,P)$;

disuguaglianza triangolare: $d(P,Q)\leqslant d(P,R)+d(R,Q)$.

Distanza tra punti e sottospazi: la distanza tra un punto P_1 e il sottospazio L è definita come $d(P_1,L):=\inf_{Q\in L}d(P_1,Q)$. Si annulla se e solo se $P_1\in L$. Se $P_1\notin L$ allora esiste unico $P_1'\in L$ tale che $d(P_1,L)+d(P_1',Q)$, e si chiama il punto di minima distanza. Si trova imponendo al generico vettore $P_1-P_0+\sum\alpha_iv_i$ di essere ortogonale ad ogni v_i (si tratta di un sistema quadrato con incognite le α_i).

Distanza tra sottospazi: siano L ed L' sue sottospazi di dimensioni m ed m'; la loro distanza è definita da $d(L,L'):=\inf_{Q\in L,Q'\in L'}d(Q,Q')$. Si annulla se e solo se $L\cap L'\neq\varnothing$. Se $L\cap L'=\varnothing$, allora si possono trovare i punti di minima distanza $P\in L$ e $P'\in L'$, cioè tali che $d(L,L')=d(P,P')$, imponendo al generico vettore $P_0-P_0'+\sum\alpha_iv_i-\sum\beta_jv_j'$ di essere ortogonale a ogni v_i e ad ogni v_j'. I punti di minima distanza sono unici se e solo se le varietà L ed L' sono sghembe.

In generale: $d(P+W,P'+W')=d(P,P'+W'+W)$.

Area di triangoli: dati tre punti non allineati P_0, P_1 e P_2, detti $P_1-P_0=(l_1,\cdots,l_n)$ e $P_2-P_0=(m_1,\cdots,m_n)$, l'area del triangolo da essi definito è $A(P_0,P_1,P_2)=\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i<j}(l_im_j-l_jm_i)^2}$

(sotto radice vi sono i quadrati dei minori d'ordine due della matrice dei due vettori).

Volumi di m-edri: dati $m+1$ punti indipendenti $P_0,\dots,P_m$, detti $v_i=P_i-P_0$, risulta che l'$(m+1)$-edro definito da quei punti ha misura m-dimensionale data da $\frac{1}{m!}\|(v_1\dots v_m)\|$ ove definiamo la "norma" di una matrice $m\times n$ con $m\leqslant n$ come la radice quadrata della somma dei quadrati dei minori di ordine m della matrice stessa (si tratta di $\binom{n}{m}$ termini).

Per un insieme di indici $1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant n$, abbreviato I, indichiamo con $P(I)$ la m-pla delle coordinate di P dei posti in I, e con $P(\hat{I})$ la $(n-m)$-pla delle coordinate di P dei posti non in I. Allora l'm-volume in questione si scrive come

$$\frac{1}{m!}\sqrt{\sum_I \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ P_0(I) & \cdots & P_m(I)\end{vmatrix}^2}$$

ove la somma è sulle m-ple intere tali che $1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant n$.

In particolare per $m=n-1$ risulta:

$$\frac{1}{(n-1)!}\sqrt{\sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ P_0(\hat{i}) & \cdots & P_{n-1}(\hat{i})\end{vmatrix}^2}$$

E per $m=n$ risulta: $\frac{1}{n!}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ P_0 & \cdots & P_n\end{pmatrix}\right|$.

Trasformazioni Euclidee, Rigidità, Conformità. Una applicazione $F\in\mathrm{Aff}(\mathbb{E})$ si dice una congruenza (o rigidità, o isometria) se l'applicazione φ associata rispetta la stuttura euclidea, i.e. il prodotto scalare. Indichiamo con $\mathrm{Rig}(\mathbb{E})$ questo gruppo (nota: $\mathrm{Rig}(\mathbb{E})\supseteq\mathrm{Trasl}(\mathbb{E})$), e definiamo le rigidità centrali di centro R $\mathrm{Rig}_R(\mathbb{E}):=\mathrm{Rig}(\mathbb{E})\cap\mathrm{Centr}_R(\mathbb{E})$. Ogni elemento di $\mathrm{Rig}(\mathbb{E})$ si può scrivere come composizione di una traslazione e di una rigidità di centro R preassegnato, e anche in ordine inverso.

Una applicazione $F\in\mathrm{Aff}(\mathbb{E})$ si dice una similitudine (o omotetia) se esiste $\rho\in\mathbb{R}$ (positivo) tale che $d(F(P),F(Q))=\rho d(P,Q)$. Ciò equivale a dire che F è una conformità, i.e. rispetta gli angoli tra i segmenti. Una dilatazione di centro R è un elemento di $\mathrm{Centr}_R(\mathbb{E})$ la cui matrice associata sia $\alpha\mathbb{I}$ (α è il fattore di dilatazione); si tratta di una conformità. Ogni conformità si scrive come composizione di una rigidità seguita da una dilatazione di centro R preassegnato, o anche in ordine inverso.

Piano euclideo: $\mathbb{E}^2$.

interpretazione euclidea delle equazioni cartesiane delle rette: la retta r di equazione $aX+bY+c=0$ ha direzione ortogonale al vettore $(a,b)^t$, dunque ha vettore direttore $(b,-a)$. L'angolo $\vartheta(r,r')$ tra due rette r ed r' è l'angolo formato dai vettori normali alle due rette, e quindi $cos\vartheta(r,r')=\frac{|aa'+bb'|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}}$.

distanza punto-retta: $d(P_0,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Se $r=P_1+\langle v_1\rangle$ e $u_1=\mathrm{cross}(v_1)$ (i.e. un vettore normale alla retta) allora $d(P_0,r)=\frac{|(P_1-P_0)\cdot u_1|}{\|u_1\|}$.

asse di un segmento: si tratta della retta dei punti equidistanti dai due punti dati P_0 e P_1; si scrive $(\frac12P_0+\frac12P_1)+\langle P_1-P_0\rangle^\perp$, oppure tramite l'equazione:
$(x_1-x_0)\left(X-\frac{x_0+x_1}{2}\right)+(y_1-y_0)\left(Y-\frac{y_0+y_1}{2}\right)=0.$

bisettrici di due rette incidenti: se $r_0=P_0+\langle v_0\rangle$ e $r_1=P_1+\langle v_1\rangle$ e $\|v_0\|=\|v_1\|$, allora le bisettrici sono date da $P+\langle v_0\pm v_1\rangle$ ove $P=r_0\cap r_1$.

se abbiamo equazioni cartesiane $a_0X+b_0Y+c_0=0$ e $a_1X+b_1Y+c_1=0$ con $a_0^2+b_0^2=a_1^2+b_1^2$ allora le bisettrici hanno equazioni $(a_0X+b_0Y+c_0)\pm(a_1X+b_1Y+c_1)=0$.

area di triangoli: $A(P_0,P_1,P_2)=\frac12\left|\det\begin{pmatrix}1&1&1\\P_0&P_1&P_2\end{pmatrix}\right|=\frac12\left|\begin{vmatrix}1&1&1\\x_0&x_1&x_2\\y_0&y_1&y_2\end{vmatrix}\right|$.

distanza tra rette parallele: è la distanza tra un punto qualsiasi di una e l'altra retta.

Spazio euclideo: $\mathbb{E}^3$.

interpretazione euclidea delle equazioni dei piani e delle rette: il piano π di equazione cartesiana $aX+bY+cZ+d=0$ è ortogonale al vettore $(a,b,c)^t$; dunque il sottospazio direttore del piano è dato da $\langle(a,b,c)^t\rangle^\perp$.

La retta $r=\pi\cap\pi'$ determinata dalle equazioni cartesiane di due piani non paralleli ha direzione ortogonale ai vettori $(a,b,c)^t$ e $(a',b',c')^t$, dunque un suo vettore direttore è dato da $(a,b,c)^t\wedge(a',b',c')^t$.

L'angolo $\vartheta(\pi,\pi')$ tra due piani π e π', corrisponde all'angolo tra i vettori normali, e dunque $\vartheta(\pi,\pi')=\frac{|aa'+bb'+cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$.
L'angolo tra due rette incidenti si misura come l'angolo tra i vettori direttori.

L'angolo tra un piano π e una retta $r=\pi'\cap\pi''$ si scrive come $sin\vartheta(\pi,r)=\frac{|(a\,b\,c)v|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\|v\|}$ se v è un vettore direttore della retta, per esempio $v=(a'\,b'\,c')^t\wedge(a''\,b''\,c'')^t$.

distanza punto-piano: $d(P_0,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
Se $\pi=P_1+\langle v_1,v_1'\rangle$ allora $d(P_0,\pi)=\frac{|(P_1-P_0)\cdot(v_1\wedge v_1')|}{\|v_1\wedge v_1'\|}$
(interpretazione geometrica: il numeratore è il volume di un parallelepipedo di cui il denominatore è la base).

distanza tra piani paralleli: si tratta della distanza tra un punto qualsiasi di un piano e l'altro piano.

distanza retta-piano: è nulla se non sono paralleli, e in tal caso è la distanza di un punto qualsiasi della retta dal piano.

distanza retta-retta: siano $r=P+\langle v\rangle$ e $r'=P'+\langle v'\rangle$;
allora se r ed r' non sono parallele: $d(r,r')=\frac{|(P-P'\cdot(v\wedge v')|}{\|v\wedge v'\|}$
(interpretazione geometrica: il numeratore è il volume di un parallelepipedo di cui il denominatore è l'area di base); mentre se sono parallele: $d(r,r')=\frac{\|(P-P')\wedge v\|}{\|v\|}$
(interpretazione geometrica: il numeratore è area di un parallelogramma di cui il denominatore è la misura della base).

distanza punto-retta: sia $r=P+\langle v\rangle$, allora $d(P_0,r)=\frac{\|(P-P')\wedge v\|}{\|v\|}$;
se abbiamo $r=\pi\cap\pi'$, allora

$$d(P_0,r)=\left\|\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{a^2+b^2+c^2}(a,b,c)^t+\frac{|a'x_0+b'y_0+c'z_0|}{a'^2+b'^2+c'^2}(a',b',c')^t\right\|$$

e si scrive anche

$$d(P_0,r)=\sqrt{d(P_0,\pi)^2+d(P_0,\pi')^2+d(P_0,\pi)d(P_0,\pi')cos\vartheta(\pi,\pi')}\,.$$

asse di un segmento: si tratta del piano dei punti equidistanti dai due punti dati P_0 e P_1; si scrive $(\frac12P_0+\frac12P_1)+\langle P_1-P_0\rangle^\perp$, oppure tramite l'equazione:
$(x_1-x_0)\left(X-\frac{x_0+x_1}{2}\right)+(y_1-y_0)\left(Y-\frac{y_0+y_1}{2}\right)+(z_1-z_0)\left(Z-\frac{z_0+z_1}{2}\right)=0.$

bisettrici di due piani incidenti: se abbiamo equazioni cartesiane $a_0X+b_0Y+c_0Z+d_0=0$ e $a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1=0$ con $a_0^2+b_0^2+c_0^2=a_1^2+b_1^2+c_1^2$ allora i piani bisettori hanno equazioni $(a_0X+b_0Y+c_0Z+d_0)\pm(a_1X+b_1Y+c_1Z+d_1)=0$.

area di triangoli: $A(P_0,P_1,P_2)=\frac12\|(P_1-P_0)\wedge(P_2-P_0)\|$, e si esplicita come

$$\frac12\sqrt{\begin{vmatrix}1&1&1\\x_0&x_1&x_2\\y_0&y_1&y_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&1&1\\x_0&x_1&x_2\\z_0&z_1&z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&1&1\\y_0&y_1&y_2\\z_0&z_1&z_2\end{vmatrix}^2}\,.$$

volume di tetraedri:

$$V(P_0,P_1,P_2,P_3)=\frac16\left|\det\begin{pmatrix}1&1&1&1\\P_0&P_1&P_2&P_3\end{pmatrix}\right|=\frac16\left|\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_0&x_1&x_2&x_3\\y_0&y_1&y_2&y_3\\z_0&z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}\right|\,.$$