Geometria Uno/Due Reference Cards

Geometria Proiettiva

Send comments and corrections to ⟨maurizio@math.unipd.it⟩

Reticoli di sottospazi.

Sia V uno spazio vettoriale su C di dimensione finita. Definiamo $\mathcal{S}(V):=\{W|W\leqslant V\}$, $\mathcal{P}(V):=\{W|W\leqslant V,\ \dim_C W=1\}$ e $\mathcal{I}(V):=\{W|W\leqslant V, \dim_C W=\dim_C V-1\}$ rispettivamente gli insiemi dei sottospazi, delle rette e degli iperpiani di V.

$\mathcal{S}(V)$ ha struttura di reticolo con le operazioni di intersezione e somma di sottospazi e l'ordine dell'inclusione. Osservazioni:
$W_1\subseteq W_2 \Longleftrightarrow W_1+W_2=W_2 \Longleftrightarrow W_1\cap W_2=W_1$,
$(W_1+W_2)\cap W_3\supseteq (W_1\cap W_3)+(W_2\cap W_3)$,
$(W_1\cap W_2)+W_3\subseteq (W_1+W_3)\cap (W_2+W_3)$
(in particolare il reticolo non è distributivo).

Se $W\leqslant V$ è un sottospazio, allora $\mathcal{S}(W)\subseteq\mathcal{S}(V)$ si dice il sottoreticolo completo (o sottospazio proiettivo completo) di sostegno W; $\mathcal{S}(V/W)\cong\{W'\in\mathcal{S}(V)|W\leqslant W'\}\subseteq\mathcal{S}(V)$ si dice la stella (proiettiva) completa di sostegno W, $\mathcal{P}(W)\subseteq\mathcal{P}(V)$ si dice il sottospazio proiettivo punteggiato di sostegno W.

La dualità canonica tra V e V^* induce un antiisomorfismo di reticoli $\tau_V:\mathcal{S}(V)\longrightarrow\mathcal{S}(V^*)$ dato da $W\mapsto W^\perp$ ed induce un antiisomorfismo $\mathcal{S}(V/W)\longrightarrow\mathcal{S}(W^\perp)\cong\mathcal{S}((V/W)^*)$. La dualità scambia sottospazi con stelle.

Un'applicazione lineare $f:V\longrightarrow V'$ induce una applicazione (insiemistica) $\mathcal{S}(f):\mathcal{S}(V)\longrightarrow\mathcal{S}(V')$ data da $W\mapsto f(W)$, soddisfacente alle seguenti proprietà:
$\mathcal{S}(f)(0)=0$; $\dim_C\mathcal{S}(f)(W)\leqslant\dim_C(W)$;
$\mathcal{S}(f)(W\cap W')\subseteq\mathcal{S}(f)(W)\cap\mathcal{S}(f)(W')$;
$\mathcal{S}(f)(W+W')=\mathcal{S}(f)(W)+\mathcal{S}(f)(W')$.

Se $F:\mathcal{S}(V)\longrightarrow\mathcal{S}(V')$ è una funzione avente le proprietà di diminuire le dimensioni e di rispettare la somma (di sottospazi), allora esiste $f:V\longrightarrow V'$ tale che $F=\mathcal{S}(f)$.

Geometria Proiettiva.

Spazi Proiettivi. Uno spazio proiettivo completo di spazio vettoriale sovrastante V ($\dim_C(V)=n+1$) è un insieme S dotato di una biiezione $\alpha_S:\mathcal{S}(V)\longrightarrow S$. Per trasporto risulta data una struttura di reticolo su S (le operazioni si indicano con $\vee$, $\wedge$ e la relazione con $\leqslant$); dunque se $s=\alpha(W)$ e $s'=\alpha(W')$ è $s\vee s'=\alpha(W\cap W')$, $s\wedge s'=\alpha(W+W')$ e $s\leqslant s'\Longleftrightarrow W\leqslant W'$. Lo spazio proiettivo punteggiato associato P è il sottinsieme di S dato da $\{s\in S|\alpha(s)\in\mathcal{P}(V)\}$; lo spazio proiettivo degli iperpiani associato I è il sottinsieme di S dato da $\{s\in S|\alpha(s)\in\mathcal{I}(V)\}$.

Lo spazio proiettivo duale S^* è costituito dallo stesso insieme S dotato della biiezione $\alpha^*_S=\alpha\circ\tau_V^{-1}:\mathcal{S}(V^*)\longrightarrow S$. Lo spazio proiettivo punteggiato P^* di S^* si identifica con lo spazio proiettivo degli iperpiani I associato a S

Per $t=\alpha(W)\in S$, con $W\in\mathcal{S}(V)$, poniamo $\dim(t):=\dim_C(W)-1$. In particolare: $\dim\alpha(0)=-1$ e $\alpha(0)\in S$ di dice il vuoto proiettivo; $t\in S$ si dice punto, retta, piano, iperpiano se $\dim(t)=0,1,2,n-1$ rispettivamente. Se $\dim(t)=m$ per $t\in S$, allora la sua dimensione considerato come $t\in S^*$ (elemento dello spazio proiettivo duale) risulta $\dim(t)=n-m-1$.

Formula di Grassmann: se $s,t\in S$ allora
$\dim(s)+\dim(t)=\dim(s\vee t)+\dim(s\wedge t)$.

Teorema di Dualità Proiettiva: ogni asserzione scritta in termini di elementi di uno spazio proiettivo coinvolgendo solo la struttura di reticolo è vera se e solo se risulta vera l'asserzione duale che si ottiene sostituendo $\vee$ con $\wedge$, $\wedge$ con $\vee$, $\leqslant$ con $\geqslant$ (relazione duale) e dim con $n-1-\dim$.

Applicazioni Proiettive, Proiettività. Una applicazione proiettiva $\varphi:S\longrightarrow S'$ è una funzione indotta da una applicazione lineare $f:V\longrightarrow V'$ tra gli spazi vettoriali sovrastanti, i.e. tale che $\varphi(\alpha(W))=\alpha'(f(W))$ per ogni $W\in\mathcal{S}(V)$.

Due applicazioni lineari f,g sono sovrastanti la stessa applicazione proiettiva se e solo se $g=\lambda f$ per $\lambda\in C^\times$.

Definiamo $\mathrm{im}(\varphi)=\alpha'(\mathrm{im}(f))$, e $\ker(\varphi)=\alpha(\ker(f))$ che si chiama il luogo di degenerazione dell'applicazione φ.

Risulta $\dim(\mathrm{im}(\varphi))+\dim(ker(\varphi))=\dim(S)-1$.

L'applicazione proiettiva $\varphi:S\longrightarrow S'$ non induce direttamente una applicazione tra gli spazi punteggiati, a causa del luogo di degenerazione, ma induce $\varphi:P\smallsetminus\ker(\varphi)\longrightarrow P'$.

Una proiettività è una applicazione proiettiva di S in sè il cui nucleo sia il vuoto proiettivo di S, ovvero che abbia immagine tutto S, o ancora tale che l'applicazione lineare sovrastante sia un isomorfismo. Il gruppo delle proiettività di S, sotto l'operazione di composizione, si indica con $\mathrm{PGL}(S)$ ed è isomorfo a $\mathrm{PGL}(V):=\mathrm{GL}(V)/C^\times$.

Siano $t=\alpha(W)$ e $t'=\alpha(W')$ elementi di S. Si dicono sghembi se $t\wedge t'=\alpha(0)$ (il vuoto di S, ovvero $W\cap W'=0$), incidenti altrimenti; si dicono complementari se sono sghembi e $t\vee t'=\alpha(V)$ (corrisponde a $W\oplus W'=V$). Indichiamo con T ill sottospazio di S di sostegno t, e con T^* la stella di S di asse t.

L'inclusione $T\subseteq S$ è applicazione proiettiva con applicazione lineare sovrastante l'inclusione $W\leqslant V$.

La proiezione $S\longrightarrow T^*$ data da $s\mapsto s\vee t$ è applicazione proiettiva di sovrastante la proiezione $V\longrightarrow V/W$. Più generalmente la proiezione di t' dal centro t è $T'\longrightarrow T^*$ data da $s\mapsto s\vee t$ di applicazione sovrastante la proiezione $W'\longrightarrow(W'+W)/W$.

Se t e t'' sono complementari, allora la sezione della stella di asse t con t'' è $T^*\longrightarrow T''$ data da $u\mapsto u\wedge t''$ di applicazione sovrastante l'isomorfismo canonico $V/W\longrightarrow W''$.

Se t e t'' sono complementari, allora la proiezione di t' su t'' di centro t è $T'\longrightarrow T''$ data da $u\mapsto(u\vee t)\wedge t''$ composta di una proiezione e di una sezione.

Coordinate. Lo spazio proiettivo standard di dimensione n su C è $\mathbb{P}^n(C):=V_{n+1}(C)/C^\times$; se $v\in V$ ha coordinate $(X_0,\ldots,X_n)^t$, il punto $P=[v]$ ha coordinate omogenee $[X_0,\ldots,X_n]^t$.

Modello topologico di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: sia $\mathbb{S}^n=\{x\in\mathbb{E}^{n+1}(\mathbb{R})|\,\|x\|=1\}$ la (buccia della) sfera di raggio 1 in $\mathbb{E}^{n+1}(\mathbb{R})$. Sia $\sigma:\mathbb{S}^n\longrightarrow\mathbb{S}^n$ la mappa antipodale $x\mapsto -x$. Allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\cong\mathbb{S}^n/\sigma$; in particolare si tratta di uno spazio topologico compatto. Se $n=1$ possiamo identificare un isomorfismo $\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (tramite la "proiezione dal polo nord" sull'asse X: $(x,y)\mapsto\frac{x}{1-y}$) $(x,y)\mapsto[1-y,x]$. La proiezione stereografica dal polo nord di $\mathbb{S}^2$ (sul piano $Z=0$: $(x,y,z)\mapsto(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z})$) dà un isomorfismo $\mathbb{S}^2\longrightarrow\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tramite $(x,y,z)\mapsto[1-z,x+iy]$.

Un sistema di riferimento in uno spazio proiettivo punteggiato di spazio vettoriale sovrastante V è il dato di un isomorfismo proiettivo $\rho:\mathbb{P}(V)\longrightarrow\mathbb{P}^n(C)$. Equivalentemente si tratta del dato di una base ordinata di V (a meno di proporzionalità); oppure di $n+2$ punti $P_0,\ldots,P_n,U$ di P tali che $n+1$ tra loro non stiano su un iperpiano (i $P_0,\ldots,P_n$ formano l'edro fondamentale, U è il punto unità); o dualmente di $n+2$ iperpiani $p_0,\cdots,p_n,u$ tali che $n+1$ tra loro abbiano sempre intersezione vuota.

Dato un riferimento su $\mathbb{P}(V)$, esiste unica l'applicazione proiettiva $\varphi:\mathbb{P}(V)\longrightarrow\mathbb{P}'(V)$ che sia assegnata su quel riferimento.

In particolare per ogni permutazione σ del gruppo simmetrico S_{n+2} esiste una proiettività φ_σ tale che $\varphi_\sigma(P_i)=P_{\sigma i}$. Nel caso del piano proiettivo ($n=2$), ogni permutazione dei quattro punti fondamentali induce una permutazione dei tre punti diagonali (del quadrilatero); abbiamo un morfismo suriettivo di gruppi $S_4 \to S_3$ il cui nucleo è il sottogruppo V di Klein di S_4.

Scelti dei riferimenti su $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}'(V)$, allora ogni applicazione proiettiva $\varphi:\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}'(V)$ si rappresenta (a meno di proporzionalità) tramite una matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1,n'+1}(C)$. Il gruppo $\mathrm{PGL}(\mathbb{P}(V))$ è isomorfo al gruppo quoziente $\mathrm{PGL}(n,C) := \mathrm{GL}(n+1,C)/C^{\times}$.

Dato un riferimento su uno spazio proiettivo punteggiato $\mathbb{P}$, il riferimento duale sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}^*$ si dice il riferimento di plúcker, e le coordinate in quel riferimento si scrivono in riga. Identificando un punto di coordinate a in $\mathbb{P}^*$ con l'iperpiano di $\mathbb{P}$ la cui equazione è data da quelle coordinate abbiamo che un punto di coordinate X appartiene all'iperpiano se e solo se $aX=0$.

Se $\varphi:\mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ ha matrice A in un riferimento scelto, i.e. $\varphi(X)= AX$ ove le X sono coordinate omogenee, allora $\varphi:\mathbb{P}^* \longrightarrow \mathbb{P}^*$ ha matrice A^{-1} nel riferimento duale, i.e. $\varphi(a)=aA^{-1}$.

Reciprocità, Polarità, Sistemi nulli. Una reciprocità è un isomorfismo proiettivo di uno spazio proiettivo sul suo duale $\Phi:\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^*(V)$. È equivalente ad avere un isomorfismo $V \to V^*$, o anche ad una forma bilineare non degenere $\varphi: V \times V \to C$. Una reciprocità si dice una polarità (risp. sistema nullo) se la forma φ è simmetrica (risp. alternante).

Una reciprocità determina una corrispondenza biunivoca tra punti e iperpiani di $\mathbb{P}(V)$. Se si tratta di una polarità, un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ e l'iperpiano $\Phi(P) \in \mathbb{P}^*(V) \cong \mathbb{I}(V)$ sono detti polo e polare uno dell'altro.

Una reciprocità Φ è polarità o sistema nullo se e solo se per ogni $P,Q \in \mathbb{P}(V)$ si ha $P \in \Phi(Q) \Leftrightarrow Q \in \Phi(P)$. In tal caso, se la caratteristica del corpo C è diversa da 2, Φ è polarità (risp. sistema nullo) se e solo se esiste (risp. non esiste) un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ tale che $P \notin \Phi(P)$.

Varietà Proiettive. Un sottinsieme L di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ si dice una varietà proiettiva (lineare) se è del tipo $\mathbb{P}(W)$ per un sottospazio W di V; cioè se e solo se è stabile per combinazioni lineari dei sui punti; ovvero sse per ogni coppia di suoi punti contiene la retta che li congiunge.

Dati m punti $P_1,\dots,P_m$ di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$, si dicono in posizione generale se gli m vettori che li rappresentano sono *li*, ovvero sse la più piccola varietà proiettiva che li contiene ha dimensione $m-1$. In tal caso le equzioni della varietà proiettiva congiungente gli m punti sono date dalla condizione $\mathrm{rk}(X \quad P_1 \quad \cdots \quad P_m)=m$, ove $X=(X_0,\dots,X_n)$ sono le coordinate scelte in $\mathbb{P}(V)$.

Spazi Affini e Proiettivi. L'immersione standard $\mathbb{A}^n(C) \longrightarrow \mathbb{P}^n(C)$ data da $(X_1,\dots,X_n) \mapsto [1,X_1,\dots,X_n]$ determina un isomorfismo di $\mathbb{A}^n(C)$ sull'aperto U di $\mathbb{P}^n(C)$ daterminato da $X_0 \neq 0$. L'applicazione inversa $U \longrightarrow \mathbb{A}^n(C)$ si scrive come $[X_0,X_1,\dots,X_n] \mapsto (\frac{X_1}{X_0},\dots,\frac{X_n}{X_0})$.

Una matrice $A \in \mathrm{PGL}(n,C)$ di una proiettività di $\mathbb{P}^n(C)$ si restringe ad una affinità di $\mathbb{A}^n(C)$ se e solo se è (proporzionale a una) della forma $B=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ a & B' \end{smallmatrix}\right)$ con $B' \in \mathrm{GL}(n,C)$, ovvero se e solo se lascia (globalmente) stabile l'iperpiano "all'infinito" di equazione $X_0=0$. Viceversa ogni affinità di $\mathbb{A}^n(C)$ si estende unicamente ad una proiettività di $\mathbb{P}^n(C)$ della forma suddetta. Le traslazioni di $\mathbb{A}^n(C)$ sono le (restrizioni di) proiettività che lasciano puntualmente fermo l'iperpiano all'infinito. La simmetria di asse V e direzione U è la proiettività involutoria con V e U spazi di punti uniti complementari e U contenuto nell'iperpiano all'infinito; in particolare se V è un punto, si tratta della simmetria centrale di centro quel punto.

Due varietà affini in $\mathbb{A}^n(C)$ sono parallele se e solo se i loro completamenti proiettivi hanno intersezione lungo l'iperpiano all'infinito, i cui punti quindi sono le "direzioni" possibili nello spazio affine.

Dati uno spazio proiettivo punteggiato $\mathbb{P}$ e un iperpiano $H \subseteq \mathbb{P}$, l'insieme $\mathbb{P} \smallsetminus H$ resta munito in modo canonico di una struttura di spazio affine (della stessa dimensione di $\mathbb{P}$) con spazio delle traslazioni associato $T:=\{\psi \in \mathrm{PGL}(\mathbb{P}) \mid \psi(H) \subseteq H\}$. Scegliendo un riferimento in modo che $H=V(X_0)$, i quozienti $(\frac{X_1}{X_0},\dots,\frac{X_n}{X_0})$ si dicono le coordinate affini associate su $\mathbb{P} \smallsetminus H$.

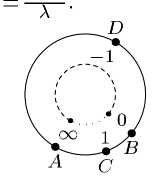
Retta Proiettiva, Trasformazioni di Moëbius, Birapporto. La retta proiettiva standard $\mathbb{P}^1(C)$ si può identificare con la retta affine $\mathbb{A}^1(C)$ a cui s'è aggiunto un punto all'infinito: $C \cup \{\infty\}$ ove ∞ è un simbolo fuori di C. Una proiettività φ della retta è data da una matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PGL}(2,C)$, e in coordinate affini si può scrivere come $\varphi(X)=\frac{c+dX}{a+bX}$ (trasformazioni lineari fratte, o trasformazioni di Moëbius, o omografie), e si tratta di affinità se si scrivono $\varphi(X)=c+dX$.

Dati tre elementi distinti $a,b,c \in C \cup \{\infty\}$, la proiettività che agisce con $\varphi(a)=\infty$, $\varphi(b)=0$ e $\varphi(c)=1$ si scrive come $\varphi(X)=\frac{(c-a)(X-b)}{(c-b)(X-a)}$.
Definiamo come birapporto dei quattro elementi $a,b,c,X \in C \cup \{\infty\}$ il valore $\varphi(X)$: $\mathrm{CR}(a,b,c,X)=(abcX):=\frac{(c-a)(X-b)}{(c-b)(X-a)}$. Si tratta di un invariante per trasformazioni di Moëbius.

Dati quattro punti A,B,C,X di $\mathbb{P}^1(C)$ (di cui i primi tre distinti) il birapporto (cross ratio) si calcola tramite:
$\mathrm{CR}(A,B,C,X)=(ABCX)=\frac{x_0}{x_1}$ ove $[x_0,x_1]$ sono le coordinate omogenee di X nel riferimento di $\mathbb{P}^1(C)$ costituito dai punti A,B,C. Si ha che $\mathrm{CR}(A,B,C,X)=\frac{\mathrm{DR}(A,C,X)}{\mathrm{DR}(B,C,X)}$.
In coordinate qualsiasi, se $A=[a_0,a_1]$, $B=[b_0,b_1]$, $C=[c_0,c_1]$, allora $(ABCX)=\left|\frac{\left|\begin{smallmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{smallmatrix}\right|}\right| \Big/ \left|\frac{\left|\begin{smallmatrix} a_0 & a_1 \\ x_0 & x_1 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} b_0 & b_1 \\ x_0 & x_1 \end{smallmatrix}\right|}\right|$

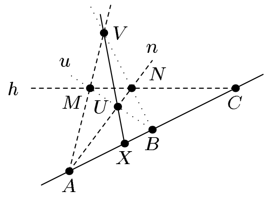
Azione delle permutazioni: se $(ABCD)=\lambda$, allora:
$(ABCD)=(BADC)=(DCBA)=(CDAB)=\lambda$;
$(BACD)=(ABDC)=(CDBA)=(DCAB)=\frac{1}{\lambda}$;
$(ACBD)=(BDAC)=(DBCA)=(CADB)=1-\lambda$;
$(ADCB)=(BCDA)=(DABC)=(CBAD)=\frac{\lambda}{\lambda-1}$;
$(CABD)=(DBAC)=(BDCA)=(ACDB)=\frac{1}{1-\lambda}$;
$(DACB)=(CBDA)=(ADBC)=(BCAD)=\frac{\lambda-1}{\lambda}$.

Il birapporto è nullo se $X=B$, 1 se $X=C$ e ∞ se $X=A$. Nel caso $C=\mathbb{R}$ il valore di $(ABCX)$ risulta negativo se i primi due punti separano gli ultimi due, positivo altrimenti.

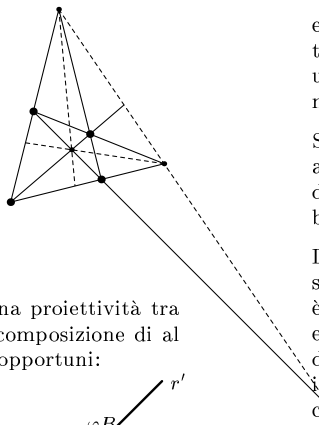


Una quaterna A,B,C,X si dice armonica se $(ABCX)=-1$. Se φ è una involuzione di $\mathbb{P}^1(C)$ (cioè una proiettività non identica tale che $\varphi^2=\mathrm{id}$) con due punti uniti A e B, allora per ogni punto P distinto dai punti uniti vale $(ABP\varphi(P))=-1$. Viceversa dati due punti A e B di $\mathbb{P}^1(C)$ e $c \in C \smallsetminus \{0,\infty\}$, esiste una unica proiettività con punti fissi A e B e definita su $P \neq A,B$ da $(ABP\varphi(P))=c$; si tratta di una involuzione sse $c=-1$.

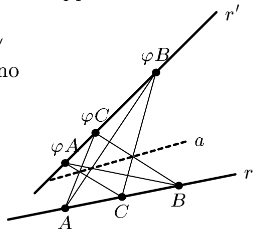
Costruzione grafica del quarto armonico dopo tre punti: siano A,B,C punti di una retta proiettiva r immersa nel piano $\mathbb{P}^2(C)$; si traccino due rette distinte $m,n(\neq r)$ per A e una retta $h(\neq r)$ per C; $M:=m \cap h$ e $N:=n \cap h$; $u:=M \vee B$ e $v:= N \vee B$; $U:=u \cap n$ e $V:=v \cap m$; $k:=U \vee V$; il quarto armonico è $X:=k \cap r$.



Quadrangolo piano completo: è la figura formata da quattro punti, a tre a tre non allineati, detti vertici e dalle sei rette che li congiungono, dette lati. I punti di intersezione di coppie di lati opposti si dicono i punti diagonali. Le rette passanti per due punti diagonali si dicono le diagonali del quadrangolo; in ogni diagonale i punti diagonali separano armonicamente i punti di intersezione con i rimanenti due lati.

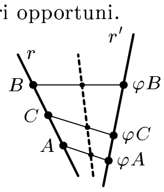


Proiettività tra rette immerse nel piano: una proiettività tra due rette distinte del piano si scrive come composizione di al più due proiezioni da rette a rette di centri opportuni: se $\varphi{:}r\longrightarrow r'$, e $A,B,C\in r$ distinti, allora i tre punti $(A\vee\varphi B)\cap(B\vee\varphi A)$, $(A\vee\varphi C)\cap(C\vee\varphi A)$ e $(B\vee\varphi C)\cap(C\vee\varphi B)$ sono allineati, la retta a che li congiunge si dice asse di collineazione per φ, e la proiettività si scrive come composizione della proiezione $r\longrightarrow a$ di centro φA e della proiezione $a\longrightarrow r'$ di centro A.



Una proiettività di una retta in sè si scrive come proiezione di al più tre proiezioni da rette a rette di centri opportuni.

Proiettività tra rette sghembe nello spazio proiettivo: si tratta di proiezioni di centro una retta (si può scegliere qualsiasi retta distinta da r ed r' che sia complanare con le tre rette $A\vee\varphi A$, $B\vee\varphi B$ e $C\vee\varphi C$).



In generale le proiettività conservano gli allineamenti e il birapporto di quattro punti allineati.

Teoremi fondamentali della Geometria Proiettiva.

Siano L ed M varietà lineari sghembe in $\mathbb{P}$ della stessa dimensione n; allora ogni proiettività di L su M è una proiezione di centro una varietà lineare di dimendione n.

Siano L ed M varietà lineari della stessa dimensione in $\mathbb{P}$ spazio proiettivo di dimensione abbastanza grande; allora ogni proiettività di L su M è composizione di al più due proiezioni.

Siano L, M ed N varietà lineari in $\mathbb{P}$ tali che N sia sghemba con le altre due e $L\vee N=M\vee N$. Allora $P\mapsto(P\vee N)\wedge M$ induce una proiettività di L su M che è l'identità su $L\wedge M$. Viceversa, una proiettività di L su M che sia l'identità su $L\wedge M$ è proiezione di M su L da un centro di dimensione $\dim(L)-\dim(L\wedge M)-1$.

Siano L ed M varietà lineari della stessa dimensione s in $\mathbb{P}$; sia data una proiettività di L su M che sia l'identità ristretta a $N\subseteq L\wedge M$ di dimensione $s-i$ $(1\leqslant i\leqslant s+1)$. Allora la proiettività è composizione di al più i proiezioni da punti.

Ogni proiettività tra varietà lineari di dimensione s in $\mathbb{P}$ è prodotto di al più $s+2$ proiezioni da punti.

Studio astratto delle Proiettività. Se la matrice $A\in\mathcal{M}_n(C)$ ha tutti gli autovalori in C, allora A è simile in C ad A^t; in particolare A e A^t hanno gli stessi autovalori con uguali molteplicità e nullità (ma in generale gli autovettori sono diversi).

Elementi uniti delle proiettività sono i sottospazi proiettivi mandati in sè stessi. I punti uniti corrispondono agli autovettori della matrice A della proiettività; gli iperpiani uniti (in coordinate plückeriane) corrispondono agli autovettori della matrice A^t. Dunque c'è la stessa configurazione di punti e iperpiani uniti. Due elementi uniti si dicono associati se corrispondono allo stesso autovalore, non associati altrimenti. Un punto ed un iperpiano uniti e non associati si appartengono. Se un autovalore ha un unico punto unito, e dunque un unico iperpiano unito, questi si appartengono sse l'autovalore ha molteplicità maggiore di 1.

Se C è algebricamente chiuso, allora ogni proiettività ammette almeno una bandiera (i.e. una catena $L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_{n-1}$) di varietà unite, e ogni varietà unita si inserisce in una tale bandiera.

Le involuzioni sono le proiettività φ non identiche tali che φ^2 sia l'identità. Se C è algebricamente chiuso, una proiettività è una involuzione sse esistono due sottospazi complementari L ed M di punti uniti, e associati a due autovalori uno opposto dell'altro. Per ogni retta $P\vee Q$ con $P\in L$ e $Q\in M$ la proiettività indotta è una involuzione avente P e Q come punti uniti. Nel caso delle rette proiettive: una proietività è una involuzione sse esiste una coppia di punti involutoria ($P\neq Q$ tali che $\varphi(P)=Q$ e $\varphi(Q)=P$); inoltre esiste unica l'involuzione una volta assegnati le immagini di due punti distinti (in particolare se vengono assegnati due punti fissi distinti).

Una omologia è una proiettività non identica con un iperpiano di punti uniti, detto asse di omologia; per dualità esiste un punto unito centro di una stella di iperpiani uniti, detto centro di omologia; l'omologia si dice speciale o generale a seconda che il centro appartenga o no all'asse. La matrice di una omologia in un riferimento che estenda un riferimento dell'asse è del tipo

$\begin{pmatrix}\mu & 0 \cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & \lambda\mathbb{I}\\ 0 & \end{pmatrix}$ se generale (il centro è il primo punto del riferimento), il rapprto μ/λ si dice l'invariante dell'omologia e per ogni punto P fuori dell'asse e diverso dal centro si ha $(CHP\varphi(P))=\mu/\lambda$;

ovvero

$\begin{pmatrix}\lambda & 1 \cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & \lambda\mathbb{I}\\ 0 & \end{pmatrix}$ se speciale (l'ulteriore punto del riferimento appartiene ad una retta unita esterna all'asse), il centro è il primo punto del riferimento, l'asse è $P_0\vee P_2\vee\cdots\vee P_n$.

Proiettività della Retta. Se C è algebricamente chiuso, le forme canoniche di Jordan classificano le proiettività di $\mathbb{P}^1(C)$ in sè. Si hanno solo tre forme: l'identità (di matrice $\lambda\mathbb{I}$ con $\lambda\neq0$), l'omologia generale con due punti uniti (di matrice $\left(\begin{smallmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{smallmatrix}\right)$ con $\lambda\neq\mu$ non nulli), e l'omologia generale con un solo punto unito (di matrice $\left(\begin{smallmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{smallmatrix}\right)$ con $\lambda\neq0$).

Se C è qualsiasi, definiamo $\Delta(A){:=}(\mathrm{tr}(A))^2-4\det(A)$; una proiettività si dice parabolica se $\Delta(A)=0$, iperbolica se $\Delta(A)$ è quadrato in C, ellittica se $\Delta(A)$ non è quadrato in C (queste condizioni dipendono solo dalla proiettività e non dalla matrice che la rappresenta). Una proiettività è parabolica, iperbolica, ellittica a seconda che abbia un unico punto unito (necessariamente razionale su C), due punti uniti distinti in $\mathbb{P}^1(C)$, nessuno punto unito razionale su C (e allora ha due punti uniti in $\mathbb{P}^1(C[\sqrt{\Delta}])$).

Se $C=\mathbb{R}$ e φ è una involuzione, allora φ non è parabolica, ed è ellittica o iperbolica a seconda che $\det(A)$ sia positivo o negativo. Se P,Q sono punti distinti, non uniti e non uno l'immagine dell'altro per l'involuzione φ, allora φ è ellittica o iperbolica a seconda che $(P\varphi(P)Q\varphi(Q))$ sia negativo o positivo.

Proiettività del Piano. Se C è algebricamente chiuso, le forme canoniche di Jordan classificano le proiettività di $\mathbb{P}^2(C)$ in sè. Si hanno sei forme: l'identità (di matrice $\lambda\mathbb{I}$ con $\lambda\neq0$);

$\left(\begin{smallmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&0\\0&0&\mu\end{smallmatrix}\right)$ con $\lambda\neq\mu$ non nulli, è l'omologia generale (centro P_0 e asse $P_1\vee P_2$);

$\left(\begin{smallmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{smallmatrix}\right)$ con $\lambda\neq0$, è l'omologia speciale (centro P_0 e asse $P_0\vee P_2$);

$\left(\begin{smallmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&0\\0&0&\nu\end{smallmatrix}\right)$ con λ,μ,ν distinti e non nulli, vi sono tre punti e tre rette unite;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&0\\0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda\neq\mu$ non nulli, vi sono due punti uniti P_0 e P_2, e due rette unite $P_0\vee P_1$ e $P_0\vee P_2$;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$ con $\lambda\neq 0$, vi è un unico punto unito P_0 e un'unica retta unita $P_0\vee P_1$.

Teorema di Desargues. Due triangoli A,B,C e A',B',C' (di lati a,b,c e a',b',c', ove una minuscola congiunge le due maiuscole diverse) si dicono prospettivi se le rette $A\vee A'$, $B\vee B'$ e $C\vee C'$ si incontrano in un punto; si dicono omologici se i tre punti $a\wedge a'$, $b\wedge b'$ e $c\wedge c'$ sono allineati. Un triangolo è prospettivo se e solo se è omologico (si tratta di un'affermazione autoduale: una implicazione è duale dell'altra).

Proiettività dello Spazio. Se C è algebricamente chiuso, le forme canoniche di Jordan classificano le proiettività di $\mathbb{P}^3(C)$ in sè. Si hanno quattordici forme: l'identità (di matrice $\lambda\mathbb{I}$ con $\lambda\neq 0$);

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$ omologia speciale di asse $P_0\vee P_2\vee P_3$ e centro P_0; sono unite le rette passanti per il centro;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$ la retta $P_0\vee P_3$ è di punti uniti, la retta $P_0\vee P_1$ è unita, il piano $P_0\vee P_1\vee P_2$ è unito;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$ $P_0\vee P_2$ è retta di punti uniti, le rette $P_0\vee P_1$ e $P_2\vee P_3$ sono unite, i piani $P_0\vee P_1\vee P_3$ e $P_0\vee P_2\vee P_3$ sono uniti;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$ il punto P_0, la retta $P_0\vee P_1$ e il piano $P_0\vee P_1\vee P_2$ sono uniti;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\mu&0\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda\neq\mu$; $P_0\vee P_1$ e $P_2\vee P_3$ sono rette di punti uniti, e sono uniti i piani dei fasci di asse quelle due rette;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\mu&0\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda\neq\mu$; la retta $P_2\vee P_3$ è di punti uniti, la retta $P_0\vee P_1$ e i piani che la contengono sono uniti;

$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\mu&1\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda\neq\mu$; i punti P_0 e P_2, le rette $P_0\vee P_1$ e $P_2\vee P_3$, i piani $P_0\vee P_1\vee P_3$ e $P_0\vee P_2\vee P_3$ sono uniti;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\mu&0&0\\0&0&\mu&0\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda\neq\mu$; è l'omologia generale di asse $P_1\vee P_2\vee P_3$ e centro P_0;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\mu&1&0\\0&0&\mu&0\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda\neq\mu$; i punti P_0 e quelli della retta $P_1\vee P_3$, sono uniti; il piano $P_1\vee P_2\vee P_3$ e le rette di quel piano contenenti P_1 sono uniti;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\mu&1&0\\0&0&\mu&1\\0&0&0&\mu\end{pmatrix}$ con $\lambda\neq\mu$; i punti P_0 e P_1, la retta $P_1\vee P_2$ ed il piano $P_1\vee P_2\vee P_3$ sono uniti;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\mu&0&0\\0&0&\nu&0\\0&0&0&\nu\end{pmatrix}$ con λ, μ e ν distinti; P_0, P_1 e i punti della retta $P_2\vee P_3$ sono uniti; sui piani uniti $P_0\vee P_2\vee P_3$ e $P_1\vee P_2\vee P_3$ sono indotte omologie generali;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\mu&0&0\\0&0&\nu&1\\0&0&0&\nu\end{pmatrix}$ con λ, μ e ν distinti; P_0, P_1 e P_2 sono punti uniti, la retta $P_2\vee P_3$ è unita; sui piani uniti $P_0\vee P_2\vee P_3$ e $P_1\vee P_2\vee P_3$ sono indotte omologie speciali;

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\mu&0&0\\0&0&\nu&0\\0&0&0&\xi\end{pmatrix}$ con i quattro autovalori distinti; i quattro punti fondamentali sono uniti, come pure i quattro iperpiani e i sei assi;

Collineazioni. Se $\sigma{:}C\longrightarrow C'$ è un isomorfismo di corpi, e V, V' spazi vettoriali su C, C' risp., una applicazione di gruppi $f{:}V\longrightarrow V'$ si dice σ-lineare se $f(cv)=c^\sigma f(v)$ per ogni $c\in C$ e $v\in V$. Una applicazione $\mathbb{P}(V)\longrightarrow\mathbb{P}(V')$ si dice una σ-proiettività se è indotta da una applicazione σ-lineare.

Nota che se $C=C'=\mathbb{R}$, allora l'unico automorfismo di corpo è l'applicazione indentica (dipende dalla struttura d'ordine dei reali).

Una applicazione suriettiva $\varphi{:}\mathbb{P}^1(C)\longrightarrow\mathbb{P}^1(C')$ tale che conserva i birapporti, $(\varphi A\varphi B\varphi C\varphi D)=(ABCD)^\sigma$ per ogni quaterna di punti distinti, è una σ-proiettività. Se $C=C'$, $\sigma=$id: le proiettività tra rette sono le applicazioni biunivoche che conservano il birapporto.

Siano C e C' corpi di caratteristica diversa da due; una applicazione suriettiva $\varphi{:}\mathbb{P}^1(C)\longrightarrow\mathbb{P}^1(C')$ tale che conserva le quaterne armoniche è una σ-proiettività per un ben determinato $\sigma{:}C\longrightarrow C'$ iso di corpi (che dipende da φ). Se $C=C'=\mathbb{R}$: le proiettività tra rette sono le applicazioni biunivoche che conservano l'armonia.

Siano $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$ spazi proiettivi di dimensione $n\geqslant 2$ sui corpi C e C' risp., e $\psi{:}\mathbb{P}\longrightarrow\mathbb{P}'$ una collineazione, i.e. una biiezione che conservi l'allineamento dei punti; allora ψ è una σ-proiettività per un ben determinato $\sigma{:}C\longrightarrow C'$ iso di corpi (che dipende da ψ). Se $C=C'=\mathbb{R}$: le proiettività tra spazi di dimensione $n\geqslant 2$ sono le collineazioni.