Geometria Uno/Due Reference Cards

Curve Algebriche Piane

Send comments and corrections to ⟨maurizio@math.unipd.it⟩

Polinomi.

Polinomi e Polinomi Omogenei. Algebra dei polinomi in n indeterminate a coefficienti in C: $C[T]:=C[T_1,\dots,T_n]$; scriviamo gli elementi come $\sum_\alpha a_\alpha T^\alpha$ ove $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $T^\alpha=T_1^{\alpha_1}\cdots T_n^{\alpha_n}$. Poniamo $|\alpha|:=\sum_i\alpha_i$, $\alpha!:=\prod_i\alpha_i!$, $\alpha\leqslant\beta$ sse $\alpha_i\leqslant\beta_i$ per ogni i. Se $P(T)=\sum_\alpha a_\alpha T^\alpha\in C[T]$ definiamo $\deg P:=max\{|\alpha|\,|\,a_\alpha\neq0\}$. Il polinomio è omogeneo di grado m se $a_\alpha=0$ quando $|\alpha|\neq n$; omogeneo se è omogeneo di qualche grado.

Indichiamo con $C[T]_h$ l'algebra dei polinomi in $C[T_0,T_1,\dots,T_n]$ che siano omogenei.

Affinizzazione di polinomi omogenei:
$a:C[T]_h\longrightarrow C[T]$ data da $Q(T)\mapsto Q^a(T):=Q(1,T_1,\dots,T_n)$.

Omogeneizzazione di polinomi:
$h:C[T]\longrightarrow C[T]_h$ data da $P(T)\mapsto P^h(T):=T_0^dP(\frac{T_1}{T_0},\dots,\frac{T_n}{T_0})$ se $d=\deg(P)$.

Risulta $P^{ha}=P$ e $Q^{ah}=T_0^{-c}Q$ se $T_0^c\|Q$ (i.e. $T_0^c|Q$ e $T_0^{c+1}\nmid Q$).

Formula di Taylor: se $P\in C[T]$ e $a=(a_1,\dots,a_n)\in C^n$ allora $P(T)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\partial^{|\alpha|}P}{\partial T^\alpha}(a)(T-a)^\alpha$.

Formula di Euler: se $Q\in C[T]_h$, $N=\deg(Q)$, allora
$NQ(T)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial Q}{\partial T_i}(T)T_i$.

Risultante Siano $f(X)=\sum_{i=0}^m a_iX^{m-i}$ e $g(X)=\sum_{j=0}^n b_jX^{n-j}$ due polinomi con $a_0\neq0$ o $b_0\neq0$. Per un polinomio $s(X)=\sum_{i=0}^{m+n-1}c_iX^{m+n-i}$, l'equazione $fh+gk=s$ con h e h polinomi di grado minore o uguale di n e m rispettivamente ha soluzione a seconda del rango della matrice formata dai coefficienti dei polinomi $f,Xf,\dots,X^{n-1}f,g,Xg,\dots,X^{m-1}g$.

Definiamo il risultante $R_{m,n}(f,g)$ di f e g come

$$R(f,g)=R(a_i,b_j)=\underbrace{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & & & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m\\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & & & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix}}_{m+n\text{ colonne}}\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\ \vdots\\a\end{matrix}}\right\}n\text{ righe}\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\ \vdots\\a\end{matrix}}\right\}m\text{ righe}\end{array}$$

Risulta che $R(f,g)\neq0$ se e solo se f e g sono primi tra loro; $R(f,g)=0$ se e solo se f e g hanno un fattore di grado positivo in comune (oppure $a_0=b_0=0$).

Polinomi omogenei: se φ e ψ sono polinomi omogenei (in due variabili), allora con l'ovvia definizione del risultante risulta che $R(\varphi,\psi)=0$ se e solo se φ e ψ hanno un fattore di grado positivo in comune.

Se $C[X]_{<m}$ indica lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore di m con base $X^{m-1},X^{m-2},\dots,X,1$ (e negli apazi prodotto la base standard, allora il risultante $R_{m,n}(f,g)$ è il determinante della matrice dell'applicazione lineare

$$C[X]_{<n}\times C[X]_{<m}\longrightarrow C[X]_{<m+m}$$

che manda (ξ,η) in $\xi f+\eta g$.

Risulta che $R_{m,n}(f+gh,g)=R_{m,n}(f,g)$ (se il $\deg(h)\leqslant m-n$), $R_{m,n+s}(f,gh)=R_{m,n}(f,g)R_{m,s}(f,h)$ (se $\deg(h)\leqslant s$), $R_{m+r,n}(fh,g)=R_{m,n}(f,g)R_{r,n}(h,g)$ (se $\deg(h)\leqslant r$), $R_{m,n+s}(f,g)=a_0^sR_{m,n}(f,g)$ e $R_{m+r,n}(f,g)=(-)^{rn}b_0^rR_{m,n}(f,g)$.

Infine $R_{m,n}(f,g)=a_0^ng(\alpha_1)\cdots g(\alpha_m)=(-)^{mn}b_0^mf(\beta_1)\cdots f(\beta_n)$.

Pensato come funzione dei coefficienti di f e g, risulta che $R(a,b)\in\mathbb{Z}[a_i,b_j]$ è polinomio a coefficienti interi nelle variabili a_i e b_j. Inoltre è biomogeneo di grado n nelle a_i e di grado m nelle b_j; è isobarico di peso mn nelle a_i e b_j se si danno pesi i ad a_i e pesi j a b_j.

Esistono polinomi $A(X)$ e $B(X)$ in $\mathbb{Z}[a_i,b_j][X]$ di grado nella X minore o uguale ad n ed m risp. tali che $R(f,g)=Af+Bg$.

Se $f(X)=a_0\prod_{i=1}^m(X-\alpha_i)$ e $g(X)=b_0\prod_{j=1}^n(X-\beta_j)$, allora risulta $R(f,g)=a_0^nb_0^m\prod_{i=1}^m\prod_{j=1}^n(\alpha_i-\beta_j)$.

Se $F,G\in A[X_0]$ con $A=C[X_1,\dots,X_r]$ sono (complessivamente nelle $X_0,X_1,\dots,X_r$) omogenei di grado m ed n, allora $R_{X_0}(f,g)\in C[X_1,\dots,X_r]$ risulta (complessivamente nelle $X_1,\dots,X_r$) omogeneo di grado mn.

Discriminante. Per un polinomio monico $f(X)=\sum_{i=0}^m a_iX^{m-i}=\prod_{i=1}^m(X-\xi_i)$ definiamo $D=\prod_{i<j}(\xi_i-\xi_j)^2$, polinomio simmetrico nelle ξ_i, dunque anche polinomio nelle a_i. Banalmente, f ha radici multiple se e solo se $D=0$.

Dato un polinomio $f(X)=\sum_{i=0}^m a_iX^{m-i}=a_0\prod_{i=1}^m(X-\xi_i)$, definiamo il discriminante $D(f)=D(a_i)=a_0^{2m-2}\prod_{i<j}(\xi_i-\xi_j)^2$.

Siccome $R(f,f')=a_0^{2m-1}\prod_{i\neq j}(\xi_i-\xi_j)$, risulta l'uguaglianza $R(f,f')=(-)^{m(m-1)/2}D(f)$. Si tratta di un polinomio di grado $2m-2$ nelle a_i.

Sia $a_0\neq0$; risulta che f ha radici multiple se e solo se $D(f)=0$.

Polinomi omogenei: dato un polinomio omogeneo in due variabili $\varphi(X_0,X_1)=\sum_{i=1}^m a_iX_0^{m-i}X_1^i=\prod_{i=1}^m(\alpha_iX_0-\beta_iX_1)$, definiamo $D(\varphi)=D_n(a_i)=\prod_{i<j}(\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i)$. Allora $\varphi(X_0,X_1)$ ha fattori multipli se e solo se $D(\varphi)=0$.

Esempi: $D(a_0,a_1,a_2)=a_1^2-4a_0a_2$;
$D(a_0,a_1,a_2,a_3)=a_1^2a_2^2-4a_0a_2^3-4a_1^3a_3-27a_0^2a_3^2+18a_0a_1a_2a_3$.

Se $F\in A[X_0]$ con $A=C[X_1,\dots,X_r]$ è complessivamente omogeneo di grado m, allora $D(F)\in C[X_1,\dots,X_r]$ risulta omogeneo di grado $m(m-1)$.

Ipersuperficie, Divisori.

Ipersuperficie. Dato $P\in C[T]$ (risp. $Q\in C[T]_h$) definiamo la ipersuperficie $V(P)$ di $\mathbb{A}^n(C)$ (risp. $V(Q)$ di $\mathbb{P}^n(C)$) come l'insieme dei punti che soddisfano l'equazione $P(T)=0$: $\{X\in\mathbb{A}^n(C)|P(X)=0\}$ (risp. $Q(T)=0$: $\{X\in\mathbb{P}^n(C)|Q(X)=0\}$). Nota che la buona definizione nel caso di ipersuperficie proiettive è assicurata dalla omogeneità del polinomio.

Si ha che $V(P_1P_2)=V(P_1)\cup V(P_2)$; una ipersuperficie si dice irriducibile se non si scrive come unione di sottinsiemi propri che siano ipersuperficie; corrisponde alla irriducibilità del polinomio.

Con riferimento alla immersione standard $\mathbb{A}^n(C)\subseteq\mathbb{P}^n(C)$ si ha che $V(P)=V(P^h)\cap\mathbb{A}^n(C)$, $V(Q^a)=V(Q)\cap\mathbb{A}^n(C)$, e

$$V(Q)=\begin{cases}V(Q^{ah}) & \text{se } T_0\nmid Q\\ V(Q^{ah})\cup V(T_0) & \text{se } T_0|Q\end{cases}.$$

La $V(P^h)$ si dice il completamento proiettivo di $V(P)$.

Data una ipersuperficie affine (risp. proiettiva) V si definisce il suo ideale in $C[T]$ (risp. il suo ideale omogeneo in $C[T]_h$) come $I(V):=\{P\in C[T]|P(X)=0\ \forall X\in V\}$ (risp. $I(V):=\{P\in C[T]_h|P(X)=0\ \forall X\in V\}$).

Se C è algebricamente chiuso e $P\in C[T]$ è irriducibile, allora $I(V(P))=(P)$; se $P=\prod_iP_i^{r_i}$ con i P_i irriducibili, allora $V(P)=\bigcup_iV(P_i)$ e $I(V(P))=(\prod_iP_i)$.

Lemma di Study. Sia $F\in C[X_0,X_1,X_2]$ omogeneo irriducibile; se $V(F)\subseteq V(G)$ allora F divide G.

Divisori. Definiamo il gruppo abeliano dei divisori di $\mathbb{A}^n(C)$ $\bigoplus_V \mathbb{Z}V$, ove V varia su tutte le ipersuperficie irriducibili di $\mathbb{A}^n(C)$; gli elementi sono le somme formali del tipo $D=\sum_V e_V V$ con $e_V\in\mathbb{Z}$ (quasi tutti nulli), e e_V si dice la molteplicità di V in D. Il supporto di D è $\mathrm{Supp}(D):=\bigcup_{e_V\neq 0}V$; il suo grado è $\deg(D):=\sum_V e_V\deg(V)$ (somma finita).

Il divisore associato a $P=\prod_i P_i^{r_i}\in C[T]$ è $\mathrm{div}(P):=\sum_i r_iV(P_i)$; $\mathrm{Supp}(\mathrm{div}(P))=V(P)$, $\deg(\mathrm{div}(P))=\deg(P)$.

Curve Piane.

Cicli intersezione con le rette. Siano $\mathcal{C}=V(F)$, con $F\in C[X]_h:=C[X_0,X_1,X_2]_h$, una curva di ordine $n=\deg(P)$ in $\mathbb{P}^2(C)$ ed $r:=\mathrm{div}(a_0X_0+a_1X_1+a_2X_2)$ una retta di equazioni parametriche $X=\lambda P+\mu Q$.

Abbiamo $f(\lambda,\mu)=F(\lambda P+\mu Q)\in C[\lambda,\mu]_h$ e definiamo il ciclo intersezione di r e $\mathcal{C}$ come $\mathcal{C}\circ r:=\mathrm{div}_r f(\lambda,\mu)=\sum_P e_P P$ ove la somma è indicata su $P\in r\subseteq\mathbb{P}^2(C)$. Definiamo $m_P(\mathcal{C},r)=e_P$ la molteplicità di intersezione in P di $\mathcal{C}$ e r. Si ha $\mathrm{Supp}(\mathcal{C}\circ r)=\mathrm{Supp}(\mathcal{C})\cap\mathrm{Supp}(r)$.

Molteplicità e punti multipli. Sia $P\in\mathcal{C}=V(F)$; le rette del fascio per P hanno tutte la stessa molteplicità di intersezione in P con $\mathcal{C}$, tranne un numero finito (che sono le rette tangenti in P a $\mathcal{C}$), che hanno molteplicità maggiore. Poniamo $m_P(\mathcal{C})$ questa molteplicità generica.

Se P è l'origine del riferimento, e $F^a(X,Y)=F_s+F_{s+1}+\cdots+F_n$ con $F_l(X,Y)\in C[X,Y]$ omogeneo di grado l ed $F_s(X,Y)\neq 0$, allora $m_P(\mathcal{C})=s$ e $F_s(X,Y)=\prod(a_iX-b_iY)^{l_i}$ si dice l'equazione complessiva delle tangenti in P a $\mathcal{C}$. Si ha $\mathrm{div}F_s(X,Y)=\sum l_ir_i$ dove $r_i=\mathrm{div}(a_iX-b_iY)$. Il numero l_i si dice molteplicità di r_i come tangente in P a $\mathcal{C}$. Per ogni altra retta $r=\mathrm{div}(aX-bY)$ distinta dalle r_i, abbiamo $m_P(\mathcal{C},r)=s$.

I punti multipli della curca $\mathcal{C}=V(F)$ in $\mathbb{P}^2(C)$ si trovano risolvendo il sistema $\left\{\frac{\partial F}{\partial X_i}(X_0,X_1,X_2)=0 \,|\, i=0,1,2\right\}$, e se $P=[x_0,x_1,x_2]$ è un punto semplice di $\mathcal{C}$, allora la tangente in P a $\mathcal{C}$ ha equazione $\frac{\partial F}{\partial X_0}(x)X_0+\frac{\partial F}{\partial X_1}(x)X_1+\frac{\partial F}{\partial X_2}(x)X_2=0$.

Se $F(X,Y)=F^a(X_0,X_1,X_2)$, allora i punti multipli di $\mathcal{C}=V(F)$ in $\mathbb{A}^2(C)$ si trovano risolvendo il sistema $\left\{F(X,Y)=0,\ \frac{\partial F}{\partial X}(X,Y)=0,\ \frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y)=0\right\}$ e se $P=(x,y)$ è un punto semplice di $\mathcal{C}$, allora la tangente in P a $\mathcal{C}$ ha equazione $\frac{\partial F}{\partial X}(x,y)(X-x)+\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y)(Y-y)=0$.

Polare. Sia $\mathcal{C}=V(F)$ una curva, e $Q\in\mathbb{P}^2(C)$ un punto di coordinate $[x_0,x_1,x_2]$; diciamo polare di $\mathcal{C}$ rispetto a P la curva $\mathcal{P}_Q(\mathcal{C})=V(P_Q(F))$ di equazione $P_Q(F):=\sum_{i=0}^2 x_i\frac{\partial F}{\partial X_i}(X)$.
Per ogni Q, la polare $\mathcal{P}_Q(\mathcal{C})$ contiene i punti multipli di $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ non ha componenti multiple o lineari, allora $\mathcal{C}\cap\mathcal{P}_Q(\mathcal{C})$ contiene i punti multipli di $\mathcal{C}$ e i punti di tangenza delle tangenti a $\mathcal{C}$ da Q.

Equazioni Parametriche. Una curva $\mathcal{C}=V(F)\subseteq\mathbb{A}^2(C)$ si dice razionale se esistono due funzioni razionali $\varphi(t),\psi(t)\in C(t)$ (corpo quoziente di $C[t]$) tali che $F(\varphi(t),\psi(t))=0\in C(t)$ (cioè sia identicamente nullo). In tal caso le $\begin{cases}X=\varphi(t)\\ Y=\psi(t)\end{cases}$ si dicono una rappresentazione parametrica di $\mathcal{C}$.

Il vettore $(\frac{d\varphi}{dt}(t),\frac{d\psi}{dt}(t))^t$ risulta parallelo alla tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $(\varphi(t),\psi(t))$ se il punto è semplice.

Una curva piana irriducibile di ordine n dotata di un punto di molteplicità $n-1$ è razionale. Se il punto in questione è l'origine, allora $F(X,Y)=F_{n-1}(X,Y)+F_n(X,Y)$ e la rappresentazione parametrica è data da $\begin{cases}X=-\dfrac{F_{n-1}(1,t)}{F_n(1,t)}\\ Y=-t\dfrac{F_{n-1}(1,t)}{F_n(1,t)}\end{cases}$.

Flessi ed Hessiana. Un punto semplice P di $\mathcal{C}=V(F)$ si dice un flesso se la retta t_P tangente a $\mathcal{C}$ in P non è contenuta in $\mathcal{C}$ e risulta $m_P(\mathcal{C},t_P)\geqslant 3$. L'intero $r=m_P(\mathcal{C},t_P)-3$ si dice la molteplicità di P come flesso di $\mathcal{C}$.

Un punto P è un flesso sse $\det\left(\dfrac{\partial^2F}{\partial X_i\partial X_j}(P)\right)=0$.

Il polinomio di grado $3(n-2)$ ($n=\deg(F)$) $H_F(X):=\det\left(\dfrac{\partial^2F}{\partial X_i\partial X_j}\right)$ si dice l'hessiano di F, e $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}:=\mathrm{div}H_F(X)$ la ipersuperfice hessiana di $\mathcal{C}$.

L'intersezione $\mathrm{Supp}(\mathcal{C})\cap\mathrm{Supp}(\mathcal{H}_{\mathcal{C}})$ contiene i flessi e i punti multipli di $\mathcal{C}$ (se $\mathcal{C}$ è non singolare ha esattamente $3n(n-2)$ flessi, se contati con le molteplicità).

Un punto semplice P è un flesso r-plo di $\mathcal{C}$ se e solo se $m_P(\mathcal{C},\mathcal{H}_{\mathcal{C}})=r$, i.e. la molteplicità di intersezione di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ in P è r.

Teorema di Bézout. Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ curve algebriche piane senza componenti comuni; allora $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}\neq\emptyset$, e la cardinalità di $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$ è $\leqslant nm$ se n,m sono i gradi di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Inoltre ad ogni punto di intersezione $P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$ si può associare una molteplicità di intersezione $i_P(\mathcal{C},\mathcal{D})$ (l'ordine di zero a P del risultante $R_{F,G}(X_0,X_1)$ se $[0,0,1]\notin\mathcal{C}\cup\mathcal{D}$) tale che $\sum_{P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{D}}i_P(\mathcal{C},\mathcal{D})=mn$.

Se $P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ è singolare in $\mathcal{C}$, allora $i_P(\mathcal{C},\mathcal{D})\geqslant 2$.

Se $\mathcal{C}$ è una curva irriducibile di grado d, allora possiede al più $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ punti singolari.

Coniche.

Forme Quadratiche e Bilineari. Supponiamo che C sia un corpo di caratteristica diversa da due. Un polinomio $Q(X)\in C[X]$ omogeneo di grado due determina una forma quadratica di matrice simmetrica $A=A^t\in\mathcal{M}_n(C)$ data da $Q(X)=X^tAX$ ove $X=(X_1,\ldots,X_n)^t$; e una forma bilineare associata data da $G(X,Y)=X^tAY$, ove anche $Y=(Y_1,\ldots,Y_n)^t$.

Forme quadratica e bilineare corrispondenti sono legate dalle relazioni $Q(X)=G(X,X)$ e $G(X,Y)=\frac{1}{4}(Q(X+Y)-Q(X-Y))$.

Un cambiamento di base $P\in\mathrm{GL}(n,C)$ cambia la matrice della forma quadratica in P^tAP. Due matrici simmetriche $A,B\in\mathcal{M}_n(C)$ si dicono congruenti in C se e solo se esiste $P\in\mathrm{GL}(n,C)$ tale che $B=P^tAP$ (si tratta di una relazione di equivalenza). Si dicono ortogonalmente congruenti, o equivalentenente ortogonalmente simili, se si ha $P\in\mathrm{O}(n,C)$.

Sia Q una forma quadratica su $\mathbb{R}$, di matrice associata A;

Teorema di Sylvester (regola di inerzia): esistono due interi p e q con $p+q\leqslant n$, (gli indici della forma) e un cambiamento di base $P\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ tali che $Q(PZ)=\sum_{i=1}^p z_i^2-\sum_{i=p+1}^{p+q}z_i^2$;

esiste un cambiamento di base ortogonale $P\in\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ tale che $Q(PZ)=\sum_{i=1}^n\lambda_iz_i^2$ ove i λ_i sono gli autovalori della matrice A (dunque $p+q$ è il numero di autovalori non nulli);

esistono un intero r e un cambiamento di base complesso $P\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tali che $Q(PZ)=\sum_{i=1}^r z_i^2$.

Coniche. Una conica $\mathcal{C}$ è una ipersuperficie di grado due in $\mathbb{P}^2(C)$. Scriviamo $\mathcal{C}=V(Q)$ con $Q(X)\in C[X]_h$ di grado due, e anche $Q(X)=X^tAX$ con $X=(X_0,X_1,X_2)$ e

$A=\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{0,2} & a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}=A^t\in\mathcal{M}_3(C)$. Poniamo $A'=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(C)$.

Risulta $\frac{\partial Q}{\partial X_i}=2{}_iAX$ per $i=0,1,2$ e ${}_iA=(i+1)$-sima riga di A. In particolare i punti doppi sono quelli per cui $AX=0$.

Riducibilità. La conica $\mathcal{C}$ è irriducibile e non singolare se e solo se $\det A\neq 0$, se $x\in\mathcal{C}$ l'equazione della tangente in x è $xAX=0$; è $\mathcal{C}=r+s$ con $r\neq s$ rette distinte in $\mathbb{P}^1(\overline{C})$ se e solo se $\mathrm{rk}A=2$, e in tal caso l'unico punto doppio è $r\cap s$ ed è razionale su C; è $\mathcal{C}=2r$ con r retta definita su C se e solo se $\mathrm{rk}A=1$, e in tal caso tutti i punti di $\mathcal{C}$ sono doppi.

Proiettività delle coniche. La parametrizzazione razionale di una conica irriducibile $\mathcal{C}$ si ottiene a partire da un punto $P_0\in\mathcal{C}$ e dalla biiezione $\mathcal{C}\to P_0^*=$ stella di rette di centro P_0: immagine di $P\in\mathcal{C}$ è la retta $P_0\vee P$. Una seconda parametrizzazione usando un altro punto P_1 differisce dalla precedente per una proiettività $P_0^*\to P_1^*$ tra le due stelle (in particolare risulta definito il birapporto di quattro punti, almeno tre distinti, su una conica irriducibile: come il birapporto tra le quattro rette in una parametrizzazione).

Viceversa: *generazione di Steiner di una conica.* Siano P,Q punti in un piano proiettivo, e sia $p{:}P^*\to Q^*$ una proiettività tra le due stelle di rette di centri P e Q rispettivamente, con $p(P\vee Q)\neq P\vee Q$. Allora $r\cap p(r)$ al variare di r in P^* sono i punti di una conica irriducibile contenente P e Q.

Duale della generazione di Steiner di una conica. Siano r ed s due rette di un piano proiettivo, $p{:}r\to s$ una proiettività con $p(r\wedge s)\neq r\wedge s$ (i.e. non una proiezione). Allora le rette $P\vee p(P)$ al variare di $P\in r$ sono le tangenti ad una conica non degenere, che ammette r ed s come tangenti.

In particolare: dati due triangoli con vertici in una conica non degenere $\mathcal{C}$, esiste una conica $\mathcal{D}$ che è inscritta in entrambi i triangoli dati.

Proiettività. Definiamo $GP(\mathcal{C})$ il gruppo delle trasformazioni biiettive di una conica irriducibile $\mathcal{C}$ in sè che conservano il birapporto di ogni quaterna di punti di $\mathcal{C}$; sia $GO(\mathcal{C})$ il sottogruppo delle proiettività del piano che mandano $\mathcal{C}$ in sè. Allora la restrizione induce un isomorpfismo $GO(\mathcal{C})\to GP(\mathcal{C})$ di gruppi (in particolare, ogni proiettività della conica si estende a una proiettività del piano).

Teorema dell'asse di proiettività: supponiamo C algebricamente chiuso, e sia p una proiettività di $\mathcal{C}$; definiamo l'asse di p come la congiungente i punti fissi (eventualmente la tangente a $\mathcal{C}$ nell'unico punto fisso). Allora per ogni coppia di punti P e Q di $\mathcal{C}$, distinti dai punti fissi, si ha che l'intersezione di $P\vee p(Q)$ e $Q\vee p(P)$ appartiene all'asse.

Teorema di Pascal. Sia $\mathcal{C}$ una conica irriducibile, A_1,A_2,A_3,B_1,B_2 punti di $\mathcal{C}$; un punto B_3 del piano appartiene a $\mathcal{C}$ se e solo se i tre punti $(A_i\vee B_j)\wedge(A_j\vee B_i)$ sono allineati (e la retta si dice retta di Pascal; dati sei punti sulla conica, esistono 60 rette di Pascal associate). In particolare i lati opposti di un esagono inscritto in $\mathcal{C}$ si intersecano in un punto.

Teorema di Brianchon. Le diagonali di un esagono circoscritto a una conica irriducible si intersecano in un punto (duale di Pascal).

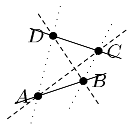
Sistemi Lineari. Le coniche di $\mathcal{P}^2(C)$ formano uno spazio proiettivo su C di dimensione cinque. Diciamo sistemi lineari di coniche le famiglie di coniche che corrispondono a varietà lineari di $\mathbb{P}^5(C)$, e condizioni lineari quelle che determinano un sistema lineare. La condizione si dice n-pla se determina una varietà di dimensione $5-n$ di $\mathbb{P}^5(C)$. Fasci sono i sistemi lineari di dimensione uno.

Condizioni lineari sono: Il passaggio per un punto (semplice), per due punti distinti (doppia), per tre punti non allineati (tripla), per quattro punti a tre a tre non allineati (quadrupla), passaggio per un punto e con data tangente (doppia). Non è lineare la condizione di avere una data tangente.

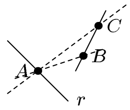
Fasci. Tre coniche A,B,C di un fascio determinano un sistema di coordinate proiettivo sul fascio, per cui ogni conica del fascio si scrive cone $\mathcal{C}(\lambda,\mu)=\mathrm{div}(X^t(\lambda A+\mu B)X)$ e le coniche degeneri del fascio sono individuate da $\det(\lambda A+\mu B)=0$, equazione omogenea di grado tre in λ e μ. Ogni fascio di coniche irriducibile (i.e. tale che non tutte le sue coniche siano riducibili) contiene da una a tre coniche riducibili.

Classificazione dei fasci irriducibili:

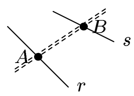
fascio di ciclo base $A+B+C+D$, cioè passanti per i quattro punti assegnati; vi sono tre coniche degeneri: $(A\vee B)+(C\vee D)$, $(A\vee C)+(B\vee D)$, $(A\vee D)+(B\vee C)$;



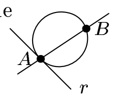
fascio di ciclo base $2A+B+C$, cioè passante per i tre punti dati e con tangente r assegnata in A; vi sono due coniche degeneri: $r+(B\vee C)$ e $(A\vee B)+(A\vee C)$;



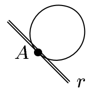
fascio di ciclo base $2A+2B$, cioè passante per i due punti dati e con tangenti r ed s assegnate tali che $A\notin s$ e $B\notin r$; vi sono due coniche degeneri: $r+s$ e $2(A\vee B)$;



fascio di coniche osculatrici a una conica irriducibile $\mathcal{C}$ in A (r sia la tangente); ciclo base $3A+B$ con $B\neq A$ un punto di $\mathcal{C}$; unica conica degenere del fascio è $r+(A\vee B)$;



fascio di coniche iperosculatrici a una conica irriducibile $\mathcal{C}$ in A (r sia la tangente); ciclo base $4A$; unica conica degenere del fascio è $2r$.



Polarità rispetto a una Conica. Sia $\mathcal{C}$ una conica irriducibile in $\mathbb{P}^2(C)$ di matrice associata A. Polarità associata alla conica è la proiettività $\mathbb{P}^2(\overline{C})\longrightarrow\mathbb{P}^2(\overline{C})^*$ data da $Y\mapsto y{:}=Y^tA$. La retta (di coordinate) y si dice la polare del punto Y, e Y si dice il polo di y. Proprietà della polarità:

$Y\in z$ se e solo se $Z\in y$; è una involuzione;

$Y\in y$ se e solo se $Y\in\mathcal{C}$, sse y è tangente a $\mathcal{C}$;

se $Y\notin\mathcal{C}$ allora $y\cap\mathcal{C}$ sono i punti di tangenza delle tangenti a $\mathcal{C}$ per Y; l'equazione complessiva delle tangenti a $\mathcal{C}$ per Y è data da $(X^tAX)(Y^tAY)-(Y^tAX)^2=0$.

Costruzione grafica della polare: se le tangenti alla quadrica da Y sonoo razionali su C, allora la polare di Y è la retta congiungente i due punti di tangenza; altrimenti è la retta che congiunge i poli di due qualsiasi rette distinte passanti per Y.

Un triangolo è autopolare rispetto alla conica $\mathcal{C}$ se ogni vertice è polo di un lato. Un tale triangolo si dice autopolare di prima specie se ogni vertice è polo del lato opposto; di seconda specie altrimenti, nel qual caso due lati sono tangenti alla conica.

Classificazione Proiettiva di Coniche Reali. Consideriamo le coniche non singolari di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$; a meno di equivalenza proiettiva complessa esiste un'unica classe di coniche non degeneri, con equazione canonica $X_0^2+X_1^2+X_2^2=0$.

A meno di equivalenza proiettiva reale esistono due classi di coniche non degeneri, a seconda che abbiano punti reali (equazione canonica $X_1^2+X_2^2-X_0^2=0$), oppure che non abbiano alcun punto reale (equazione canonica $X_0^2+X_1^2+X_2^2=0$).

Classificazione Affine di Coniche Reali. Le coniche non singolari di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ si dividono in due classi a meno di affinità complesse:

- coniche a centro se il polo della retta impropria è un punto proprio (che si dice il centro e ha coordinate date dai minori, con segni alterni, delle ultime due righe di A); equazione canonica per le coniche a centro è $X^2+Y^2=1$. Definiamo diametro una retta passante per il centro. L'applicazione $d\mapsto d':=D\vee C$ si dice l'involuzione dei diametri coniugati (rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}$); si tratta di una proiettività involutoria del fascio di rette di centro C; due rette di punti impropri $[0,\lambda,\mu]$ e $[0,\lambda',\mu']$ sono coniugate se e solo se $(\lambda\mu)A'\binom{\lambda'}{\mu'}=0$; equazione dei diametri coniugati: $a_{2,2}mm'+a_{1,2}(m+m')+a_{1,1}=0$. La retta impropria e due diametri coniugati danno un riferimento autopolare per le coniche a centro. Un diametro autoconiugato, dunque tangente a $\mathcal{C}$ nel suo punto improprio, si dice un asintoto di $\mathcal{C}$; equazione dei diametri autoconiugati: $a_{2,2}m^2+2a_{1,2}m+a_{1,1}=0$.

- parabole se sono tangenti alla retta impropria; ciò succede se e solo se $\det A'=0$; equazione canonica per le parabole è $2Y=X^2$ (in un riferimento autopolare formato da: retta impropria, una retta di direzione il punto di tangenza improprio, la tangente nell'altro punto della seconda retta).

Le coniche non singolari di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ si dividono in quattro classi a meno di affinità reali, tre classi di coniche a centro, e la classe delle parabole (ellissi, iperboli e parabole a seconda che $\mathcal{C}\cap r_\infty$ sia $P+\overline{P}$ non razionali su $\mathbb{R}$, $P+Q$, $2P$):

- ellissi senza punti reali, di equazione canonica $X^2+Y^2+1=0$; caratterizzata da: A è definita (positiva o negativa) e $\det A'>0$;
- ellissi con punti reali, di equazione canonica $X^2+Y^2=1$; caratterizzata da: A non è definita (positiva o negativa) e $\det A'>0$;
- iperboli, di equazione canonica $X^2-Y^2=1$; caratterizzata da: $\det A'<0$;
- parabole, di equazione canonica $2Y=X^2$; caratterizzata da: $\det A'=0$.

Classificazione Metrica Euclidea. Le trasformazioni ammesse sono del tipo $B=\begin{pmatrix}1&0\;0\\ \begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}&B'\end{pmatrix}$ con $B'\in\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ e $\binom{a}{b}\in\mathbb{R}^2$. I punti ciclici di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ sono $J_\infty=[0,1,i]$ e $\overline{J}_\infty=[0,1,-i]$. Dunque per la rigidità φ associata a B si ha $\varphi J_\infty=J_\infty$ se $B'\in\mathrm{O}^+(2,\mathbb{R})$ e $\varphi J_\infty=\overline{J}_\infty$ se $B'\in\mathrm{O}(2,\mathbb{R})\smallsetminus\mathrm{O}^+(2,\mathbb{R})$.

Diciamo circolo una conica reale irriducibile passante per i punti ciclici. L'equazione di un circolo è $X^2+Y^2+2cX+2dY+e=0$ con $e-c^2-d^2\neq 0$; centro del circolo è $(-c,-d)$. Se poi $e-c^2-d^2<0$ poniamo $R^2=c^2+d^2-e$, R si dice il raggio del circolo, che ha equazione $(X+c)^2+(Y+d)^2=R^2$, e dunque rappresenta il luogo dei punti di distanza R dal centro $C=(-c,-d)$.

Definiamo gli assi di una conica a centro come i diametri ortogonali al proprio coniugato. Nel caso di un circolo ogni diametro è un asse. Altrimenti esiste una unica coppia d,d' di assi i cui punti impropri $[0,\lambda,\mu]$ e $[0,-\mu,\lambda]$ soddisfano all'equazione $a_{1,2}\lambda^2+(a_{1,1}-a_{2,2})\lambda\mu-a_{1,2}\mu^2=0$. Vertici di una conica a centro sono le intersezioni della conica con gli assi.

Definiamo l'asse di una parabola di punto improprio C_∞ una retta d per C_∞ che sia ortogonale al suo polo D. Dunque una parabola ha un unico asse di punto improprio $C_\infty=[0,\lambda,\mu]$ e polo $D=[0,-\mu,\lambda]$, e di equazione $(0\ a_{1,2}\ a_{2,2})AX=0$. Vertice della parabola è $V=\mathcal{C}\cap d$.

Equazioni canoniche. Per le coniche a centro: sia (C,D,D',r_∞,d,d') il triangolo autopolare di prima specie formato dal centro a da due assi; in tale riferimento si ha $A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ con $a,b,c\in\mathbb{R}^\times$; dunque la conica ha equazione $\alpha X^2+\beta Y^2=1$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^\times$. Sia tratta di una iperbole se $\alpha\beta<0$, di una ellisse con punti reali se $\alpha,\beta>0$, di una ellisse senza punti reali se $\alpha,\beta<0$.

Le equazioni si possono anche scrivere $\pm\frac{X^2}{a^2}\pm\frac{Y^2}{b^2}=1$ con $a,b>0$ che si dicono i semiassi della conica.

Per le parabole: sia $(C_\infty,D,V,r_\infty,d,D\vee V)$ il triangolo autopolare di seconda specie formato dal punto improprio, dalla polare dell'asse e dal vertice; allora $A=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&b&0\\c&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-p\\0&1&0\\-p&0&0\end{pmatrix}$ con $p\in\mathbb{R}^\times$; dunque la conica ha equazione $X^2=2pY$; possiamo supporre $p>0$ e si chiama il parametro della parabola.

Invarianti ortogonali. I tre valori $\det A$, $\det A'$ e $\mathrm{tr}A'$ sono invarianti per rigidità, i.e. per congruenza tramite matrici del tipo B consentito. Si dicono gli invarianti ortogonali.

la conica è a centro se e solo se $\det A'\neq 0$ e una sua equazione è proporzionale a $\alpha+\beta X^2+\gamma Y^2=0$ con $\alpha\beta\gamma=\det A$, $\beta\gamma=\det A'$, $\beta+\gamma=\mathrm{tr}A'$.

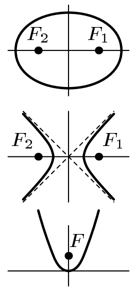
la conica è una parabola se e solo se $\det A'=0$; una sua equazione è proporzionale a $\beta X^2=2\alpha Y$ con $-\alpha\beta^2=\det A$, $\beta=\mathrm{tr}A'$, $\alpha\beta>0$.

Fuochi. Una retta r per $P\in\mathbb{E}^2$ è detta principale di $\mathcal{C}$ in P se la retta per P ortogonale a r ha polo (rispetto a $\mathcal{C}$) in r; cioè se e solo se la retta r e la sua ortogonale per P sono coniugate. Una coppia di tali rette per P si dice una "dupla principale" di $\mathcal{C}$ in P.

Un punto $F\in\mathbb{E}^2$ si dice un fuoco di $\mathcal{C}$ se per F vi sono infinite duple principali; ciò accade sse il fascio di coniche generato da $\mathcal{C}$ e da $(F\vee J_\infty)+(F\vee\overline{J}_\infty)$ contiene rette doppie; sse $(F\vee J_\infty)$ e $F\vee\overline{J}_\infty$ sono tangenti a $\mathcal{C}$. Dunque i fuochi sono le intersezioni delle tangenti a $\mathcal{C}$ dai punti isotropi di $\mathbb{E}^2$.

La condizione $\mathrm{rk}\left(A-\lambda\begin{pmatrix}x_1^2+x_2^2&-x_1&-x_2\\-x_1&1&0\\-x_2&0&1\end{pmatrix}\right)=1$ determina le quadriche focali.

Nel caso delle equazioni canoniche:



Ellissi: $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ con $a>b$,
$F_1(\sqrt{a^2-b^2},0)$, $F_2(-\sqrt{a^2-b^2},0)$;
$F(0,i\sqrt{a^2-b^2})$, $\overline{F}(0,-i\sqrt{a^2-b^2})$;
Iperboli: $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$,
$F_1(\sqrt{a^2+b^2},0)$, $F_2(-\sqrt{a^2+b^2},0)$;
$F(0,i\sqrt{a^2+b^2})$, $\overline{F}(0,-i\sqrt{a^2+b^2})$;
Parabole: $Y^2=-2pX$, $F(\frac{p}{2},0)$.

L'asse focale a è la retta contenente di due fuochi razionali per le coniche a centro, e l'asse contenente il fuoco e il punto improprio per le parabole. L'involuzione focale è l'involuzione dell'asse focale data da $R\mapsto S$ se $R=r\cap a$, $S=s\cap a$ con r,s rette principali per $P\notin a$. Per le coniche a centro (risp. parabole) si tratta della involuzione con punti fissi i due fuochi (risp. il fuoco e il punto improprio).

Le rette principali per $P\notin a$ sono le bisettrici di $P\vee F_1$ e $P\vee F_2$ se la conica è a centro, le bisettrici di $P\vee F$ e $P\vee C_\infty$ se si tratta di una parabola. Se $P\in\mathcal{C}$ si tratta di tangente e normale nel punto.

Le ellissi (risp. le iperboli) sono i luoghi del piano per cui la somma (risp. la differenza) delle distanze da due punti fissi (i fuochi) sono costanti.

Eccentricità. Per una conica a centro, siano V_1, V_2 i vertici dell'asse focale a; definiamo l'eccentricità $e=\frac{|F_1-F_2|}{|V_1-V_2|}$; risulta $e<1$ per le ellissi ($e=0$ per i circoli), $e>1$ per le iperboli, si definisce $e=1$ per le parabole.

Se l'equazione è $\frac{X^2}{a^2}\pm\frac{Y^2}{b^2}=1$, allora $e=\frac{\sqrt{a^2\mp b^2}}{a}$.

Si dice direttrice di una conica $\mathcal{C}$ una retta che sia polare di un fuoco.

Una conica è il luogo dei punti del piano per cui il rapporto e tra la distanza da un punto (fuoco) e una retta (direttrice) fissati è costante; si tratta di ellissi, parabole o iperboli a seconda che e sia minore, uguale o maggiore di 1.

Cubiche.

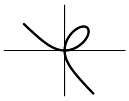
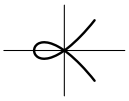
Una cubica è una curva di grado 3 di $\mathbb{P}^2_{C}(\overline{C})$. Lo spazio delle cubiche forma uno spazio proiettivo di dimensione nove.

Riducibilità. Una cubica è riducibile se e solo se ha un punto triplo (allora è il prodotto di tre rette d'un fascio) oppure ha due punti doppi (allora è il prodotto di una retta e una conica, eventualmente degenere).

Nodi e Cuspidi. Se la cubica ha un unico punto doppio, si tratta di curve razionali (parametrizzabili) e ci sono due possibilità:

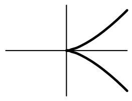
nel punto doppio ci sono due tangenti distinte, in tal caso si dice un nodo. Si può ridurre all'equazione canonica $X_0X_1X_2{=}X_1^3{+}X_2^3$ (il nodo è nell'origine e le tangenti sono $V(X_1)$ e $V(X_2)$), oppure $X_0X_2^2{=}X_1^3{+}X_1^2$ (il nodo è nell'origine e le tangenti sono $V(X_1 \pm X_2)$).

Le parametrizzazioni sono rispettivamente:

$\begin{cases} X=\frac{t}{1+t^3} \\ Y=\frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$,  e $\begin{cases} X=t^2-1 \\ Y=t(t^2-1) \end{cases}$,  .

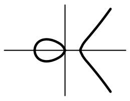
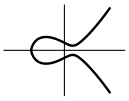
La cubica nodale contiene tre flessi, che sono allineati.

nel punto doppio c'è una unica tangente (di molteplicità due), in tal caso si dice una cuspide. Si può ridurre all'equazione canonica $X_0X_2^2{=}X_1^3$ (la cuspide è nell'origine e la tangente è $V(X_2)$).

Una rappresentazione parametrica è: $\begin{cases} X=t^2 \\ Y=t^3 \end{cases}$, 

La cubica cuspoidale contiene un solo flesso.

Cubiche non singolari. Una cubica non singolare ha nove flessi (e la retta per due qualsiasi flessi ne contiene un terzo). La sua equazione si può scrivere $X_0X_2^2{=}G(X_0,X_1)$ ove $G(X_0,X_1)$ è polinomio omogeneo di terzo grado con radici distinte; e non omogenea $Y^2{=}4X^3-g_2X-g_3$ con $g_2,g_3{\in}C$ e $g_2^3-27g_3^2{\neq}0$; oppure anche $Y^2{=}X(X-1)(X-\lambda)$ con $\lambda{\in}C$, $\lambda{\neq}0,1$.

Aspetti possibili:  ,  .

Legge di Gruppo su una Cubica Irriducibile. Sia $O{\in}\mathcal{C}$; dati due punti $P,Q{\in}\mathcal{C}$ definiamo la retta r come $P{\vee}Q$ se $P{\neq}Q$, come la tangente a $\mathcal{C}$ in Q altrimenti. Sia $R{=}(\mathcal{C}{\cap}r){\smallsetminus}\{P,Q\}$ e $s{=}O{\vee}R$. Definiamo $P{\oplus}Q{:=}(\mathcal{C}{\cap}s){\smallsetminus}\{R,O\}$. Si tratta di una applicazione $\mathcal{C}{\times}\mathcal{C}{\longrightarrow}\mathcal{C}$ che dà alla cubica una struttura di gruppo abeliano (la proprietà associativa non è ovvia). Intuitivamente: tre punti allineati hanno somma nulla.

Nel caso della cubica nodale: la struttura di gruppo corrisponde a quella di $C^{\times}$ (moltiplicativa).

Nel caso della cubica cuspoidale: la struttura di gruppo corrisponde a quella di C (additiva).