Geometria Due Reference Cards

Ipersuperficie Algebriche

Send comments and corrections to ⟨maurizio@math.unipd.it⟩

Polinomi.

Notazioni sui multiindici. Se $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ usiamo come d'usuale $|\alpha|=\sum_i\alpha_i$ (lunghezza del multiindice), $\alpha!=\prod_i(\alpha_i!)$ (fattoriale del multiindice); se $\beta\in\mathbb{N}^n$ è un altro multiindice, poniamo $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n)\in\mathbb{N}^n$ (somma di multiindici), $\binom{\alpha}{\beta}=\prod_i\binom{\alpha_i}{\beta_i}$ (binomiale di multiindici), diciamo $\alpha\leqslant\beta$ se $\alpha_i\leqslant\beta_i$ per ogni i; se $X_1,\ldots,X_n$ sono indeterminate, poniamo $X^\alpha=X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$.

Iperderivazioni. Sia $f(X)\in C[X]=C[X_1,\ldots,X_n]$; tramite la posizione

$$f(X+Y)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}(D_\alpha f)(X)Y^\alpha$$

definiamo per ogni multiindice $\alpha\in\mathbb{N}^n$ le applicazioni D_α di $C[X]$ in sè, verificanti le seguenti proprietà ($f,g\in C[X]$, $c\in C$): $D_0=\mathrm{id}_{C[X]}$ (i.e. $f(X+Y)=f(X)+YC[X,Y]$), $D_\alpha(c)=0$ (se $\alpha\neq0$), $D_\alpha(cf)=cD_\alpha(f)$ e $D_\alpha(f+g)=D_\alpha(f)+D_\alpha(g)$ (linearità), $D_\alpha(fg)=\sum_{\beta+\gamma=\alpha}D_\beta(f)D_\gamma(g)$ (regola di Leibnitz).

Abbiamo poi che $D_\beta(X^\alpha)=\begin{cases}\binom{\alpha}{\beta}X^{\alpha-\beta} & \text{se } \beta\leqslant\alpha\\ 0 & \text{se } \beta\not\leqslant\alpha\end{cases}$ ed in particolare $D_{e_i}=\partial/\partial_i$. Se $\deg f=N$ allora $\deg(D_\alpha f)=N-|\alpha|$.

Le composizioni degli operatori di differenziazione danno le formule $D_\alpha D_\beta=D_\beta D_\alpha=\binom{\alpha+\beta}{\alpha}D_{\alpha+\beta}$, che si itera in $D_{\alpha_1}\cdots D_{\alpha_n}=\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)!}{(\alpha_1!)\cdots(\alpha_n!)}D_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$ e in particolare dà $(\alpha!)D_\alpha=D_{e_1}^{\alpha_1}\cdots D_{e_n}^{\alpha_n}$.

Caratteristica zero. Se il corpo è di caratteristica zero, allora le iperderivazioni si ottengono a partire dalle usuali derivazioni: $D_\alpha=\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial X_n}\right)^{\alpha_n}$.

Caratteristica positiva. Se il corpo è di caratteristica $p>0$, allora le derivazioni non sono sufficienti per definire tutti gli operatori di derivazione. Sia $\mathrm{ord}_p:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$ la funzione "ordine in p", $\mathbb{Z}_p$ il sottogruppo di $\mathbb{Q}$ con ordine in p positivo, per cui $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Se $n\in\mathbb{N}$ e $n=n_0+n_1p+\cdots n_hp^h$ è lo sviluppo in base p, abbiamo $\mathrm{ord}_p(n!)=n_1+n_2\frac{p^2-1}{p-1}+\cdots+n_h\frac{p^h-1}{p-1}=\frac{n-(n_0+n_1+\cdots+n_h)}{p-1}$. Di conseguenza se $N=\frac{n!}{(p!)^{n_1}\cdots(p^h!)^{n_h}}$ risulta $\mathrm{ord}_pN=0$, dunque $N\in\mathbb{Z}_p\smallsetminus p\mathbb{Z}_p$ e definiamo $c(n)\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ come il rappresentante di $N+p\mathbb{Z}_p\in\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$.

Ora, se $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\alpha_i=\beta_{0i}+\beta_{1i}p+\cdots+\beta_{h_ii}p^{h_i}$ e definiamo $c(\alpha)=\prod_ic(\alpha_i)$ abbiamo

$$D_\alpha=c(\alpha)D_{e_1}^{\beta_{01}}D_{pe_1}^{\beta_{11}}\cdots D_{p^{h_1}e_1}^{\beta_{h_11}}\cdots D_{e_n}^{\beta_{0n}}D_{pe_n}^{\beta_{1n}}\cdots D_{p^{h_n}e_n}^{\beta_{h_nn}}\ .$$

Composizione. Siano $f(Z)\in C[Z_1,\ldots,Z_m]$ e $g_i(X)\in C[X_1,\ldots,X_n]$ per $i=1,\ldots,m$. Allora abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial X_i}f(g(X))=\sum_{j=1}^m\frac{\partial f}{\partial Z_j}(g(X))\frac{\partial g_j}{\partial X_i}(X)\ .$$

Più in generale abbiamo che per ogni η

$$D_\eta(f(g(X)))=\sum_\gamma(D_\gamma f)(g(X))\sum_{\substack{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m\neq0\\ \Sigma\epsilon_i=\eta}}\prod_i\sum_{\substack{\beta_1,\ldots,\beta_{\gamma_i}\neq0\\ \Sigma\beta_k=\epsilon_i}}\prod_k D_{\beta_k}g_i(X)\ .$$

Formula di Euler. Se $Q\in C[T]_h$ è omogeneo di grado $N=\deg(Q)$, allora (valutando in 1 la derivazione di $Q(tT)=t^NQ(T)$) risulta $NQ(T)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial Q}{\partial T_i}(T)T_i$.

Si generalizza per ogni s nella formula

$$N(N-1)\cdots(N-s)Q(T)=\sum_{|\alpha|=s}(\alpha!)D_\alpha Q(X)X^\alpha\ .$$

Ipersuperficie.

Intersezioni di divisori con varietà lineari. Sia L una varietà lineare di $\mathbb{P}^(C)$, $\mathcal{D}=\mathrm{div}\varphi(X)$ un divisore in $\mathbb{P}^n(C)$ tale che $\overline{L}\not\subseteq\mathrm{Supp}\mathcal{D}$. Definiami il ciclo intersezione di L e $\mathcal{D}$ come il divisore (di L) $L\cap\mathcal{D}=\mathcal{D}\cap L=\mathrm{div}_L\psi(Y)$ dove X sono coordinate in $\mathbb{P}^(C)$, $X=AY$ sono equazioni parametriche di L (dunque le Y sono coordinate in L), $\psi(Y)=\varphi(AX)$ (la definizione non dipende dalle scelte di coordiante X e Y). Da notare che $\psi(Y)$ è omogeneo di grado $\deg_Y\psi(Y)=\deg_X\varphi(X)$. Si ha che $\mathrm{Supp}(\mathcal{D}\cap L)=Supp(\mathcal{D})\cap\overline{L}$ e $\mathrm{ord}(\mathcal{D}\cap L)=\mathrm{ord}(\mathcal{D})$.

Intersezioni con le rette. Sia $N=\mathrm{ord}(\mathcal{D})$, e sia r una retta di $\mathbb{P}^(C)$; allora $r\cap\mathcal{D}=\sum_{P\in r}e_PP$ ove $e_P=e_P(\mathcal{D},r)$. Se $\mathrm{Supp}(r\cap\mathcal{D})=\{P_1,\ldots,P_r\}$, risulta $r\leqslant N$, $\sum_{i=1}^re_{P_i}=N$ ed $e_Q=0$ se $Q\notin\{P_1,\ldots,P_r\}$.

Sia $\Phi_{X,Y}(\lambda,\mu)=\varphi(\lambda X+\mu Y)=\sum_{i=1}^NP_{\varphi,i}(X,Y)\lambda^{N-i}\mu^i$ con $P_{\varphi,i}(X,Y)=\sum_{|\alpha|=i}D_\alpha(\varphi)(X)Y^\alpha$ (che risultano polinomi di grado $N-i$ nelle X e i nelle Y). Allora il discriminante $D(X,Y)=D_{\lambda,\mu}\left(\Phi_{X,Y}(\lambda,\mu)\right)\in C[X,Y]$ risulta polinomio omogeneo di grado $N(N-1)$ sia nelle X che nelle Y.

Una retta generica di $\mathbb{P}^n(C)$ interseca $\mathcal{D}$ in N punti distinti (solo le rette del tipo $x\vee y$ con $D(x,y)=0$ violano la regola); in caratteristica zero, per ogni punto $P\notin\mathrm{Supp}(\mathcal{D})$ passano di tali rette.

Coni. Sia X un sottinsieme di $\mathbb{P}^n(C)$; definiamo il vertice $v(X)$ di X come l'insieme dei punti P di X per cui $P\vee Q\subseteq X$ per ogni $Q\in X$. Allora il vertice risulta una varietà lineare di $\mathbb{P}^n(C)$ e se non è vuoto, X si dice un cono di vertice $v(X)$.

Un cono X è varietà lineare sse $X=v(X)$ (coincide con il proprio vertice). Se X è un cono, e M è varietà complementare al vertice $v(X)$, allora X coincide con la proiezione dal vertice di $M\cap X$: $X=\bigcup_{Q\in M\cap X}v(X)\vee Q$. Viceversa, se L ed M sono due varietà complementari, allora la proiezione da L di un sottinsieme di M è un cono il cui vertice contiene L.

Sia V una ipersuperficie che sia un cono di vertice $v(V)$; scelte coordinate in modo che $v(V)$ abbia equazioni $X_0=\cdots=X_r=0$, allora $V=\mathrm{div}\varphi(X)$ con $\varphi(X)=\varphi(X_0,\ldots,X_r)$, omogeneo.

Punti Singolari e Coni Tangenti. Sia $\mathcal{D}$ un divisore di ordine N in $\mathbb{P}^n(C)$ e consideriamo $P\in\mathrm{Supp}(\mathcal{D})$. Per ogni retta per P non contenuta nel supporto di $\mathcal{D}$, abbiamo $e_P(\mathcal{D},r)\geqslant1$; definiamo la molteplicità di P in $\mathcal{D}$ il numero $m_P(\mathcal{D})=\min_{r\ni P}e_P(\mathcal{D},r)$; un punto si dice semplice, doppio, triplo, r-plo se $m_P(\mathcal{D})=1,2,3,r$ rispettivamente. Siccome $e_P(\mathcal{D},r)\leqslant N$ per ogni retta r, abbiamo che $m_P(\mathcal{D})\leqslant N$ per ogni punto P. Se $P\notin\mathrm{Supp}(\mathcal{D})$ definiamo $m_P(\mathcal{D})=0$.

Se $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ sono due divisori e P un punto di $\mathbb{P}^n(C)$ allora $m_P(\mathcal{D}+\mathcal{D}')\geqslant m_P(\mathcal{D})+m_P(\mathcal{D}')$ (vale l'uguaglianza se $P\notin\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'$).

Se L è varietà lineare contenente P, allora $e_P(\mathcal{D},L)\geqslant m_P(\mathcal{D})$, ed L si dice tangente a $\mathcal{D}$ in P se vale una maggiorazione stretta. In particolare, se L è tangente a $\mathcal{D}$ in P, allora ogni sottovarietà di L passante per P è tangente a $\mathcal{D}$ in P; viceversa, se tutte le rette di L passanti per P sono tangenti a $\mathcal{D}$ in P, allora L è tangente a $\mathcal{D}$ in P.

$\mathrm{Supp}(\mathcal{D})$ è un cono se e solo se $\mathcal{D}$ ha punti N-upli (cioè punti di molteplicità massima), e allora il vertice $v(\mathrm{Supp}(\mathcal{D}))$ è dato dall'insieme dei punti N-upli. Se la dimensione del vertice è $n-1$, allora $\mathcal{D}=NH$ ove H è il vertice; se la dimensione è $n-2$, allora $\mathcal{D}=H_1+\cdots+H_N$ con gli H_i iperpiani di cui almeno due distinti (la cui intersezione è il vertice del divisore).

Sia $\mathcal{D}=\mathrm{div}\varphi(X)$ divisore di ordine N in $\mathbb{P}^n(C)$; per un punto $P\in\mathrm{Supp}(\mathcal{D})$ di coordinate x, abbiamo che $m_P(\mathcal{D})=m\geqslant 1$ se e solo se per ogni multiindice α con $|\alpha|<m$ risulta $(D_\alpha\varphi)(x)=0$ (in caratteristica zero basta per $|\alpha|=m-1$) ed esiste β con $|\beta|=m$ per cui $(D_\beta\varphi)(x)\neq 0$.

Se $m_P(\mathcal{D})=m\geqslant 1$ allora $T_P(\mathcal{D})=\mathrm{div}(\sum_{|\alpha|=m}(D_\alpha\varphi)(x)X^\alpha)$ è divisore il cui supporto è un cono contenente P; si dice il cono tangente in P a $\mathcal{D}$ (iperpiano tangente se P è punto semplice); una varietà lineare è tangente in P a $\mathcal{D}$ se e solo se è contenuta in $\mathrm{Supp}(T_P(\mathcal{D}))$.

Sistemi lineari. L'insieme $H_{n,N}=C[X]_N$ dei polinomi omogenei di grado N nelle indeterminate $X=X_0,\dots,X_n$ è uno spazio vettoriale su C di dimensione $\binom{n+N}{n}$ con base standard data da X^α con $|\alpha|=N$. Scelte le coordinate in $\mathbb{P}^n(C)$, abbiamo una biiezione $\mathrm{Div}(n,N)\cong\mathbb{P}(H_{n,N})$, ove $\mathrm{Div}(n,N)$ indica l'insieme dei divisori di ordine N in $\mathbb{P}^n(C)$, che associa ad ogni divisore $\mathrm{div}\varphi(X)$ il punto corrispondente a φ in $\mathbb{P}(H_{n,N})$.

Dunque l'insieme dei divisori di un fissato grado N nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(C)$ ha struttura di spazio proiettivo di dimensione $\binom{n+N}{n}-1$; diciamo sistema lineare di divisori di ordine N una famiglia di divisori corrispondente a una sottovarietà lineare di $\mathbb{P}(H_{n,N})$ (fascio, rete se di dimensioni 1, 2 rispettivamente).

Una condizione sull'insieme dei divisori si dice lineare (r-upla) se i divisori che la soddisfano formano un sistema lineare (di codimensione r).

Esempi:

il passaggio per un punto di $\mathbb{P}^n(C)$ è una condizione lineare semplice; dunque per $\binom{n+N}{n}-1$ punti di $\mathbb{P}^n(C)$ passa almeno un divisore di ordine N, e genericamente uno solo;

il passaggio (semplice) per un punto di $\mathbb{P}^n(C)$ con un fissato iperpiano tangente è una condizione lineare doppia;

avere un fissato punto di $\mathbb{P}^n(C)$ come punto m-plo è condizione lineare; si esprime nel sistema $(D_\beta\varphi)(x)=0$ per ogni β con $|\beta|<m$, e se $\varphi=\sum_\alpha a_\alpha X^\alpha$ (dunque i coefficienti a_α sono coordinate per lo spazio proiettivo dei divisori) le equazioni diventano $\sum_\alpha a_\alpha\binom{\alpha}{\beta}x^{\alpha-\beta}=0$;

avere un fissato punto di $\mathbb{P}^n(C)$ come punto m-plo con un fissato cono tangente è condizione lineare;

Quadriche.

Una quadrica è un divisore di ordine 2 in $\mathbb{P}^n(C)$. Fissato un riferimento, una quadrica $\mathcal{Q}$ corrisponde a $\mathrm{div}\varphi(X)$ con $\varphi(X)=\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}X_iX_j$ ove $a_{ij}=a_{ji}$, e a cui associamo la matrice simmetrica (non nulla) $A=(a_{ij})$ di ordine $n+1$ a coefficienti in C; risulta $\varphi(X)=X^tAX$.

C'è una biiezione tra quadriche di $\mathbb{P}^n(C)$ e matrici simmetriche non nulle in $M_{n+1}(C)$ a meno di proporzionalità, dunque con struttura di spazio proiettivo di dimensione $\binom{n+2}{2}-1$.

Un cambiamento di coordinate $X=PY$ con $P\in\mathrm{GL}(n+1,C)$ comporta che la stessa quadrica avrà matrice $B=P^tAP$; due matrici si dicono congruenti se tra loro vale questa relazione. Due quadriche $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono proiettivamente equivalenti (cioè esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^n(C)$ con $f(\mathcal{Q})=\mathcal{Q}'$) se e solo se le matrici associate in un fissato (e dunque in ogni) sistema di riferimento sono (proporzionali a) matrici congruenti.

Quadriche nella retta proiettiva. Se $n=1$ allora una quadrica è la somma di due punti di $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$; se $A=\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}\\a_{01}&a_{11}\end{pmatrix}$ ponendo $\Delta=-\det(A)=a_{01}^2-a_{00}a_{11}$ possiamo distinguere tre casi:

(e) $\sqrt{\Delta}\notin C$, allora si tratta di due punti distinti non razionali su C (cioè in $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$ ma non in $\mathbb{P}^n(C)$: coppia ellittica di punti);

(i) $\sqrt{\Delta}\in C$, $\Delta\neq 0$, allora di tratta di due punti distinti razionali su C (cioè di $\mathbb{P}^n(C)$: coppia iperbolica di punti);

(p) $\Delta=0$, allora si tratta un punto (doppio), razionale su C (coppia parabolica di punti).

Generalità in $\mathbb{P}^n(C)$ per $n\geqslant 2$. In generale una quadruca è determinata dal suo supporto: se è irriducibile, abbiamo $\mathcal{Q}=1V$ con V ipersuperfice irriducibile; se $\mathcal{Q}=1H+1H'$ con H ed H' iperpiani distinti di $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$, abbiamo $\mathrm{Supp}(\mathcal{Q})=H\cup H'$; se $\mathcal{Q}=2H$ con H iperpiano, allora $\mathrm{Supp}(\mathcal{Q})=H$ (gli ultimi due casi la quadrica si dice riducibile). In particolare identifichiamo $\mathcal{Q}$ con $\mathrm{Supp}(\mathcal{Q})$ che è un sottinsieme di $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$, e usiamo $\mathcal{Q}_C=\mathcal{Q}\cap\mathbb{P}(C)$.

Punti singolari e Coni. Risulta $\frac{\partial\varphi}{\partial X_i}=2AX=2X^tA$; dunque un punto P di coordinate x è singolare per $\mathcal{Q}=\mathrm{div}\varphi(X)$ se e solo se $Ax=0$ (dunque si tratta d'una varietà lineare); se P non è singolare, allora $x^tAX=0$ è l'equazione dell'iperpiano tangente a $\mathcal{Q}$ in P.

La quadrica $\mathcal{Q}$ ha punti singolari se e solo se una (dunque ognuna) dalle sue matrici associata è singolare (i.e. di rango $r\leqslant n$), se e solo se è un cono (in tal caso il vertice è definito su C, coincide con l'insieme dei punti singolari e ha dimensione $n-r$; $\mathcal{Q}$ è allora proiezione dal vertice di una quadrica non degenere di una varietà complementare).

Sia r il rango di A, matrice associata a $\mathcal{Q}$; allora: se $2<r\leqslant n$ abbiamo una quadrica irriducibile (cono); se $r=2$ abbiamo $\mathcal{Q}=H+H'$ con H ed H' iperpiani distinti di $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$; se $r=1$ abbiamo $\mathcal{Q}=2H$ con H iperpiano.

Scegliendo coordinate in modo che $v(\mathcal{Q})$ abbia equazioni $X_0=\cdots=X_{r-1}=0$, sia M la varietà complementare di equazioni $X_r=\cdots=X_n=0$ e sia A' la matrice (invertibile) di $\mathcal{Q}'=\mathcal{Q}\cap M$ (che è quadrica non degenere di M); allora $\mathcal{Q}$ ha matrice $\begin{pmatrix}A'&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Dunque ogni matrice simmetrica a coefficienti in C è congruente in C ad una tale matrice con A' matrice quadrata invertibile di ordine r (rango di A).

Polarità. Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non degenere di $\mathbb{P}^n(C)$; la polarità rispetto a $\mathcal{Q}$ è l'applicazione $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})\to\mathbb{P}^n_C(\overline{C})^*$ che manda il punto P di coordinate x nell'iperpiano $P^\perp$ di coordinate plückeriane x^tA ($P^\perp$ si dice polare di P, e P polo di $P^\perp$). L'iperpiano $P^\perp$ è razionale su C se e solo se il punto P lo è. Due punti P e Q si dicono coniugati, e si scrive $P\perp Q$ se $P\in Q^\perp$ (equivalentemente $Q\in P^\perp$), e vale se e solo se $x^tAy=0=y^tAx$ (se x e y sono le coordinate dei due punti).

Per un sottinsieme Z di $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$ definiamo il polare rispetto a $\mathcal{Q}$ $Z^\perp=\{Q\in\mathbb{P}^n_C(\overline{C})|Q\perp P,\ \forall P\in Z\}$. Si hanno gli usuali risultati: $Z^\perp=\bigcap P\in ZP^\perp$ è varietà lineare, coincidente con $L^\perp$ se L è la varietà lineare generata da Z; una varietà lineare L è razionale su C se e solo se $L^\perp$ lo è; $L^{\perp\perp}=L$; per due varietà lineari L ed M risulta che $L<M$ sse $M^\perp<L^\perp$, $(L\vee M)^\perp=L^\perp\wedge M^\perp$, $(L\wedge M)^\perp=L^\perp\vee M^\perp$.

La varietà $L^\perp$ si dice la polare di L.

Generalizzazione per quadriche qualsiasi. Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica qualsiasi in $\mathbb{P}^n(C)$; se $L=\mathbb{P}(U)$ è varietà lineare di spazio sovrastante U, definiamo $L^\perp$ come la varietà lineare $\mathbb{P}(U^\perp)$ dove $U^\perp=\{v\in V_{n+1}(C)|y^tAx=0,\ \forall y\in U\}$ (nel caso di quadriche non degeneri le definizioni sono equivalenti). Se $L=\mathbb{P}^n(C)$ allora $L^\perp=v(\mathcal{Q})$ (vertice della quadrica), se $P\in v(\mathcal{Q})$ allora $P^\perp=\mathbb{P}^n(C)$; se $P\notin v(\mathcal{Q})$ allora $P^\perp$ è un iperpiano contenente $v(\mathcal{Q})$.

In generale, se L è varietà di dimensione m e $L\cap v(\mathcal{Q})$ ha dimensione s, allora $L^{\perp}$ è varietà lineare contenente $v(\mathcal{Q})$ e di dimensione $n-m+s$.

Per $n=1$, $\mathcal{Q}=Q_1+Q_2$ (punti distinti di $\mathbb{P}^n_C(\overline{C})$) la polarità associata a $\mathcal{Q}$ è l'involuzione con Q_1 e Q_2 punti uniti; dunque $P\perp Q$ se e solo se $(Q_1Q_2PQ)=-1$.

Piani e Coni Tangenti. Per $n\geqslant 2$ abbiamo $P\in\mathcal{Q}$ se e solo se $P\in P^{\perp}$, e in questo caso $P^{\perp}$ è l'iperpiano tangente a $\mathcal{Q}$ in P (di equazione $x^tAX=0$ se x sono le coordinate di P).

Una varietà lineare L si dice tangente a $\mathcal{Q}$ se $L\subseteq\mathcal{Q}$ oppure $L\cap\mathcal{Q}$ è quadrica degenere di L; dunque un iperpiano H è tangente a $\mathcal{Q}$ sse $H\cap\mathcal{Q}$ è degenere. L'iperpiano H è tangente a $\mathcal{Q}$ sse $H\ni H^{\perp}=P$, e allora H è l'iperpiano tangente a $\mathcal{Q}$ in P, e questo è l'unico punto in cui H è tangente a $\mathcal{Q}$; vale sse $aA^{-1}a^t=0$ (se a sono le coordiante plückeriane di H, si tratta dell'equazione della quadrica inviluppo di $\mathcal{Q}$).

Una varietà lineare L è tangente a $\mathcal{Q}$ sse L ed $L^{\perp}$ sono incidenti; $L\subseteq\mathcal{Q}$ sse $L\leqslant L^{\perp}$. Se L non è tangente a $\mathcal{Q}$, allora $L\cap\mathcal{Q}$ è quadrica non degenere di L, e la polarità associata a $L\cap\mathcal{Q}$ in L è la restrizione a L della polarità associata a $\mathcal{Q}$.

Sia $P\notin\mathcal{Q}$, r una retta per P, non tangente a $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}\cap r=Q_1+Q_2$; allora Q_1,Q_2,P sono distinti, e $Q=H\cap L$ con $H=P^{\perp}$ è il quarto armonico: $(Q_1Q_2PQ)=-1$.

Il cono $\mathcal{C}_P$ tangente a $\mathcal{Q}$ di vertice P (unione delle rette per P tangenti a $\mathcal{Q}$) è la proiezione da P della quadrica (non degenere) $\mathcal{Q}\cap H$ di H. $\mathcal{C}_P$ ha equazione $(x^tAX)^2-(x^tAx)(X^tAX)=0$.

Quadriche Inviluppo. La biiezione tra le quadriche non degeneri di $\mathbb{P}$ e quelle di $\mathbb{P}^*$ che associa a $\mathcal{Q}$ di matrice A la quadrica inviluppo $\mathcal{Q}^*$ di matrice A^{-1} (oppure $A^c=\det(A)A^{-1}$) ha espressione nelle coordinate $a_{i,j}$ e $a^*_{i,j}$ date da espressioni $a^*_{h,k}=(-)^{h+k}\det A_{h,k}$ polinomiali nelle $a_{i,j}$; la biiezione si estende a quadriche di rango n (non tutti i minori d'ordine n sono nulli), nel qual caso la quadrica inviluppo immagine ha rango 1 (dunque una stella di iperpiani, con centro nel vertice di $\mathcal{Q}$).

Descrizione delle quadriche inviluppo singolari: sia $\mathcal{Q}^*\subseteq\mathbb{P}^*$ quadrica di rango r. Se $r=1$ allora $\mathcal{Q}^*$ è una stella di iperpiani (contata due volte); se $r=2$ allora $\mathcal{Q}^*$ è una coppia di stelle di iperpiani con diversi centri; se $r>2$ allora esistono una varietà lineare L di $\mathbb{P}$ di dimensione $r-1$, e una quadrica non degenere $\mathcal{C}$ di L, tali che $H\in\mathcal{Q}^*$ sse $H>L$ oppure $H\cap L$ è tangente a $\mathcal{C}$.

Classificazione Proiettiva. Un $(n+1)$-edro (triangolo per $n=2$, tetraedro per $n=3$) di $\mathbb{P}^n(C)$ è l'insieme formato da $n+1$ punti $P_0,\dots,P_n$ (detti i vertici) tali che $\bigvee_i P_i=\mathbb{P}^n(C)$, e dagli iperpiani $H_i=\bigvee_{j\neq i}P_j$ (detti le facce). Si dice autopolare rispetto alla quadrica non degenere $\mathcal{Q}$ se $P_i^{\perp}=H_i$ per ogni i.

Se $\mathcal{Q}$ è quadrica di $\mathbb{P}^n(C)$, allora esistono punti razionali su C non appartenenti a $\mathcal{Q}$. Se $\mathcal{Q}$ è quadrica non degenere di $\mathbb{P}^n(C)$, allora esistono $(n+1)$-edri autopolari rispetto a $\mathcal{Q}$. In particolare: in un riferimento autopolare la quadrice ha matrice diagonale.

L'indice di una quadrica $\mathcal{Q}$ è la massima dimensione delle varietà lineari di $\mathbb{P}^n(C)$ (razionali su C) contenute in $\mathcal{Q}$. Si tratta di un intero $\geqslant -1$ (uguale a -1 sse $\mathcal{Q}_C=\varnothing$); da $L\leqslant L^{\perp}$ se $L\subseteq\mathcal{Q}$ abbiamo che l'indice è $\leqslant m-1$ (risp. m) se $n=2m$ è pari (risp. $n=2m+1$ è dispari). L'indice è un invariante proiettivo.

La classificazione proiettiva dipende dalla struttura del gruppo moltiplicativo $C^{\times}/(C^{\times})^2$.

se $(C^{\times})^2=C^{\times}$ (ogni elemento è un quadrato, per es. corpi algebricamente chiusi) allora possiamo diagonalizzare la (matrice della) quadrica avendo solo 1 e 0 in diagonale; dunque due quadriche sono proiettivamente equivalenti sse hanno lo stesso rango. Se la quadrica è non degenere, allora ha indice $m-1$ se $n=2m$, indice m se $n=2m+1$.

se $C^{\times}/(C^{\times})^2\cong\{\pm1\}$ (per es. $\mathbb{R}$) allora possiamo diagonalizzare la quadrica avendo valori 1, -1, 0 in diagonale. Se $\mathcal{Q}$ ha forma diagonale $X_0^2+\cdots+X_s^2-X_{s+1}^2-\cdots-X_m^2$ (ove possiamo supporre $h=s+1\geqslant k=m-s$) allora $t=(m-s-1)+(n-m)=n-s-1$ ($\leqslant s$) è l'indice di $\mathcal{Q}$. Dunque due quadriche sono proiettivamente equivalenti sse hanno lo stesso rango e lo stesso indice; oppure sse hanno la stessa segnatura (h,k) (corrispondente al numero di 1 e -1 nella forma diagonale) soggetti alle condizioni $1\leqslant h$, $0\leqslant k\leqslant h$, $h+k\leqslant n+1$ (teorema di Sylvester). Abbiamo allora che il rango di $\mathcal{Q}$ è $r=h+k$ e l'indice è $i=(n+1-r)+(k-1)=n-h$.

Esempi per $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: $n=1$ (retta proiettiva reale)

(r,i)	(h,k)	equazione	descrizione
$(1,0)$	$(1,0)$	$X_0^2=0$	coppia parabolica di punti
$(2,0)$	$(1,1)$	$X_0^2-X_1^2=0$	coppia iperbolica di punti
$(2,-1)$	$(2,0)$	$X_0^2+X_1^2=0$	coppia ellittica di punti

$n=2$ (piano proiettivo reale)

(r,i)	(h,k)	equazione	descrizione
$(1,1)$	$(1,0)$	$X_0^2=0$	coppia parabolica di rette
$(2,1)$	$(1,1)$	$X_0^2-X_1^2=0$	coppia iperbolica di rette
$(2,0)$	$(2,0)$	$X_0^2+X_1^2=0$	coppia ellittica di rette
$(3,0)$	$(2,1)$	$X_0^2+X_1^2-X_2^2=0$	irrid. con punti reali
$(3,-1)$	$(3,0)$	$X_0^2+X_1^2+X_2^2=0$	irrid. senza punti reali

$n=3$ (spazio proiettivo reale)

(r,i)	(h,k)	equazione	descrizione
$(1,2)$	$(1,0)$	$X_0^2=0$	coppia parabolica di piani
$(2,2)$	$(1,1)$	$X_0^2-X_1^2=0$	coppia iperbolica di piani
$(2,1)$	$(2,0)$	$X_0^2+X_1^2=0$	coppia ellittica di piani
$(3,1)$	$(2,1)$	$X_0^2+X_1^2-X_2^2=0$	cono con punti reali
$(3,0)$	$(3,0)$	$X_0^2+X_1^2+X_2^2=0$	cono immaginario (vertice reale)
$(4,1)$	$(2,2)$	$X_0^2+X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$	non degenere rigata
$(4,0)$	$(3,1)$	$X_0^2+X_1^2+X_2^2-X_3^2=0$	non deg. con punti reali
$(4,-1)$	$(4,0)$	$X_0^2+X_1^2+X_2^2+X_3^2=0$	non deg. senza punti reali

Teorema di Jacobi. Sia A matrice simmetrica in $M_{n+1}(C)$; poniamo Δ_i il minore d'ordine $i+1$ dato dalle prime $i+1$ righe e colonne. Allora se $\Delta_i\neq 0$ per ogni i, A è congruente alla matrice diagonale $\Delta_0,\Delta_1/\Delta_0,\dots,\Delta_n/\Delta_{n-1}$.

Completamento dei quadrati. Una quadrica si può diagonalizzare tramite il procedimento di completamento dei quadrati: si procede per ricorrenza (discendente) sul numero di variabili tramite:

- se c'è un termine quadratico, supponiamo $a=a_{00}\neq 0$ poniamo $aX_0^2+2\lambda X_0+\psi=a(X_0+a^{-1}\lambda)^2+(\psi-a^{-1}\lambda^2)$ (l'ultima parentesi non dipende da X_0);
- se tutti i termini quadrati sono nulli, possiamo supporre $b=a_{01}\neq 0$ e poniamo $bX_0X_1+\lambda X_0+\mu X_1+\psi=b(X_0+b^{-1}\mu)(X_1+b^{-1}\lambda)+(\psi-b^{-1}\lambda\mu)$ (l'ultima parentesi non dipende da X_0 e X_1) e usare l'identità $4pq=(p+q)^2-(p-q)^2$ al primo termine.

Quadriche rigate nello spazio. L'equazione della quadrica rigata $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(C)$ si può scrivere $X_0X_3-X_1X_2=0$; in tal modo si vede che la mappa di Segre

$$S\colon \mathbb{P}^1(C)\times\mathbb{P}^1(C)\longrightarrow\mathcal{Q}\subseteq\mathbb{P}^3(C)$$

definita da $S([v_0,v_1],[w_0,w_1])=[v_0w_0,v_0w_1,v_1w_0,v_1w_1]$ (proiettivizzazione di $C^2\times C^2\longrightarrow C^2\otimes_C C^2\cong C^4$) è una biiezione di $\mathbb{P}^1(C)\times\mathbb{P}^1(C)$ sull'immagine $\mathcal{Q}$. In particolare $\mathcal{Q}$ contiene due regoli di rette immagini tramite Segre di $\mathbb{P}^1(C)\times\{[a,b]\}$ e $\{[a,b]\}\times\mathbb{P}^1(C)$. Abbiamo che: due rette appartenenti allo stesso regolo sono tra loro sghembe; due rette di regoli diversi sono incidenti, e ogni retta di un regolo incontra tutte quelle dell'altro; per ogni punto di $\mathcal{Q}$ passa una retta di ciascun regolo.

Quadriche sui corpi finiti. Sia $p>2$ un primo, e sia C corpo con $q=p^f$ elementi. Ogni quadrica in $\mathbb{P}^n(C)$ con $n\geqslant 2$ contiene punti razionali su C. Se $n=2m$ $(m\geqslant 1)$ allora $\mathcal{Q}$ ha indice $m-1$, e due qualsiasi quadriche non degeneri sono proiettivamente equivalenti. Se $n=2m+1$ $(m\geqslant 0)$ allora $\mathcal{Q}$ ha indice m sse il determinante di una (dunque ognuna) sua matrice è un quadrato in C, altrimenti ha indice $m-1$; due quadriche non degeneri sono proiettivamente equivalenti sse hanno lo stesso indice.

Si possono contare i punti: $\sharp\mathbb{P}^n(C)=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, e

$$\sharp\mathcal{Q}_C=\begin{cases}\frac{q^n-1}{q-1} & \text{se } n=2m\\ \frac{(q^{m+1}-1)(q^m+1)}{q-1} & \text{se } n=2m+1 \text{ e indice}=m\\ \frac{(q^{m+1}+1)(q^m-1)}{q-1} & \text{se } n=2m+1 \text{ e indice}=m-1\end{cases}$$

Classificazione Affine. Sia H_∞ un iperpiano di $\mathbb{P}^n(C)$, e $\mathbb{A}=\mathbb{P}^n(C)\smallsetminus H_\infty$ lo spazio affine complementare; scegliendo coordinate tali che H_∞ sia $X_0=0$ possiamo supporre $\mathbb{A}=\mathbb{A}^n(C)\subseteq\mathbb{P}^n(C)$. Una quadrica affine di $\mathbb{A}$ è una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^n(C)$ non contenente H_∞ (le quadriche del tipo $H+H_\infty$ si dicono improprie). Cilindri sono i coni con vertice contenuto in H_∞. Se $\mathcal{Q}$ è quadrica affine, allora $\mathcal{Q}_\infty=\mathcal{Q}\cap H_\infty$ si dice la quadrica impropria di $\mathcal{Q}$.

Due quadriche affini $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono affinemente equivalenti sse esiste una affinità f con $f(\mathcal{Q})=\mathcal{Q}'$; in tal caso $\mathcal{Q}_\infty$ e $\mathcal{Q}'_\infty$ sono proiettivamente equivalenti come quadriche di H_∞.

Se $r\leqslant n$ è il rango di $\mathcal{Q}_\infty$, abbiamo le seguenti forme canoniche possibili per le equazioni di $\mathcal{Q}$:

- $\sum_{i=1}^r a_iX_i^2=0$ (la quadrica ha rango r, dunque sempre degenere, e si tratta di un cono proprio; caratterizzata da $\mathcal{Q}\cap H_\infty^\perp\not\leqslant H_\infty$);
- $X_0^2+\sum_{i=1}^r a_iX_i^2=0$ (la quadrica ha rango $r+1$, si dice quadrica a centro, di centro $H_\infty^\perp$, se è non degenere, se invece è degenere si tratta di cilindro, detto non parabolico; sono quadrice caratterizzate da $H_\infty^\perp\not\leqslant H_\infty$ e $\mathcal{Q}\cap H_\infty^\perp\leqslant H_\infty$);
- $\sum_{i=1}^r a_iX_i^2+2X_0X_n=0$ (la quadrica ha rango $r+2$, si dice paraboloide se è non degenere, se invece è degenere si tratta di cilindro, detto parabolico; sono quadrice caratterizzate da $H_\infty^\perp\leqslant H_\infty$).

Possiamo scrivere le equazioni canoniche affini:

$r(\mathcal{Q})$	$r(\mathcal{Q}_\infty)$	equazione	descrizione
$n+1$	$n+1$	$\sum_{i=1}^n a_iX_i^2=1$	a centro
$n+1$	$n-1$	$\sum_{i=1}^{n-1} a_iX_i^2+2X_n=0$	paraboloide
r	r	$\sum_{i=1}^r a_iX_i^2=0$	cono proprio
$r+1$	r	$\sum_{i=1}^r a_iX_i^2=1$	cilindro non parabolico
$r+2$	r	$\sum_{i=1}^r a_iX_i^2+2X_n=0$	cilindro parabolico

Se in C ogni elemento è quadrato, allora due quadriche $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono affinemente equivalenti sse $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}_\infty$ hanno lo stesso rango di $\mathcal{Q}'$ e $\mathcal{Q}'_\infty$ rispettivamente.

Se $C=\mathbb{R}$ le quadriche a centro si distinguono in ellissoidi e iperboloidi a seconda che $(\mathcal{Q}_\infty)_\mathbb{R}$ sia vuoto oppure no. Abbiamo la seguente classificazione dipendente da s:

tipo	equazione canonica	valori di s
a centro	$\sum_{i=1}^s X_i^2-\sum_{s+1}^n X_i^2=1$	$0\leqslant s\leqslant n$
paraboloidi	$\sum_{i=1}^s X_i^2-\sum_{s+1}^{n-1} X_i^2+2X_n=0$	$\frac{n-1}{2}\leqslant s\leqslant n-1$
coni propri	$\sum_{i=1}^s X_i^2-\sum_{s+1}^r X_i^2=0$	$\frac{r}{2}\leqslant s\leqslant r$
cil. non par.	$\sum_{i=1}^s X_i^2-\sum_{s+1}^r X_i^2=1$	$0\leqslant s\leqslant r$
cilindri par.	$\sum_{i=1}^s X_i^2-\sum_{s+1}^r X_i^2+2X_n=0$	$\frac{r}{2}\leqslant s\leqslant r$

Nel caso di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ i punti di una conica si dicono parabolici, iperbolici o ellittici a seconda che la conica degenere sul piano tangente in quel punto sia una coppia parabolica, iperbolica o ellittica di rette. I punti di una quadrica sono tutti dello stesso tipo, e a seconda di questo la quadrica si dice parabolica, iperbolica o ellittica. La classificazione dà:

tipo	r	s	equazione	descrizione
a centro	4,	0	$-X_1^2-X_2^2-X_3^2=1$	ell. senza punti reali
		1	$X_1^2-X_2^2-X_3^2=1$	iperb. ellittico
		2	$X_1^2+X_2^2-X_3^2=1$	iperb. iperbolico
		3	$X_1^2+X_2^2+X_3^2=1$	ell. con punti reali
paraboloidi	4,	1	$X_1^2-X_2^2+2X_3=0$	par. iperbolico
		2	$X_1^2+X_2^2+2X_3=0$	par. ellittico
coni propri	3,	2	$X_1^2+X_2^2-X_3^2=0$	con punti reali
		3	$X_1^2+X_2^2+X_3^2=0$	con vertice reale
	2,	1	$X_1^2-X_2^2=0$	coppia iperb. piani
		2	$X_1^2+X_2^2=0$	coppia ell. piani
	1,	1	$X_1^2=0$	coppia par. piani
cil. non par.	2,	0	$-X_1^2-X_2^2=1$	cil. ell. senza punti
		1	$X_1^2-X_2^2=1$	cil. iperbolico
		2	$X_1^2+X_2^2=1$	cil. ell. con punti
	1,	0	$-X_1^2=1$	coppia ell. piani paralleli
		1	$X_1^2=1$	coppia iperb. piani paralleli
cil. parab.	1,	1	$X_1^2+2X_3=0$	cilindro parabolico

Proprietà diametrali. Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non degenere di $\mathbb{P}^n(C)$; de U è un punto non appartenente a $\mathcal{Q}$ e $H=U^\perp$, allora l'omologia armonica di asse H e centro U lascia globalmente fissa $\mathcal{Q}$. Dunque:

(*c*) se $\mathcal{Q}$ è quadrica a centro, diciamo diametri gli iperpiani per il centro; $\mathcal{Q}$ risulta simmetrica rispetto al centro e rispetto ad ogni iperpiano nella direzione ad esso coniugata; il cono che proietta $\mathcal{Q}_\infty$ dal centro si chiama cono asintotico, e gli asintoti di $\mathcal{Q}$ sono le rette del cono asintotico;

(*p*) se $\mathcal{Q}$ è paraboloide, diciamo diametri gli iperpiani propri con polo improprio (i.e. gli iperpiani propri contenenti il punto $C_\infty=\mathcal{Q}\cap H_\infty$); tutti i punti di H_∞ distinti da C_∞ sono direzioni di simmetria.

Classificazione Euclidea. Uno spazio euclideo $\mathbb{E}=\mathbb{E}^n$ di dimensione $n\geqslant 2$ è una coppia $(\mathbb{A},\Omega_\infty)$ ove $\mathcal{A}=(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}),H_\infty)$ è spazio affine reale di dimensione n, e Ω_∞ è una quadrica reale non degenere priva di punti reali (segnatura $(n,0)$) di H_∞ (detta l'assoluto di $\mathbb{E}$; i suoi punti, impropri immaginari, si dicono i punti ciclici di $\mathbb{E}$). Una unità di misura di $\mathbb{E}$ è una coppia di punti (propri reali).

Assoluto e unità di misura di $\mathbb{E}$ determinano una forma quadratica non degenere (definita positiva) q sullo spazio vettoriale T delle traslazioni di $\mathbb{E}$ (uno spazio pseudo-euclideo viene definito senza restizione che l'assoluto non abbia punti reali, e dunque gli corrisponde una forma non degenere, ma non definita in generale).

Definiamo le usuali nozioni euclidee: distanza tra due punti (reali propri) $d(P,Q)=q(Q-P)$; sfera di centro C e raggio R (reale positivo) $\{P|d(P,C)=R\}$. Un sistema di riferimento cartesiano ortogonale è un sistema di riferimento $P_0,\dots,P_n,U$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tale che P_0 sia punto proprio, $P_1,\dots,P_n$ siano vertici di un n-edro di H_∞ autopolare rispetto a Ω_∞, e per cui si abbia $d(P_0,U_i)=1$ per ogni $U_i=(P_0\vee P_i)\wedge(U\vee\bigvee_{j\neq i}P_j)$. Equivalentemente un riferimento è cartesiano sse ogni sfera di raggio R e centro C di coordiante $(c_1,\dots,c_n)$ ha equazione $\sum_{i=1}^n(X_i-c_i)^2=R^2$; in particolare per ogni coppia di punti risulta $d(P,Q)=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}$; e l'assoluto ha equazioni $X_0=0$ e $X_1^2+\cdots+X_n^2=0$. Una sfera (generalizzata) è una quadrica contenente l'assoluto.

Le similitudini di $\mathbb{E}$ sono le affinità che lasciano globalmente fisso l'assoluto; equivalentemente, che mandano sfere in sfere, e se l'immagine di una sfera di raggio 1 è una sfera di raggio R, il numero reale positivo R si dice il rapporto di omotetia (se f è la similitudine, vale allora $d(fP,fQ)=Rd(P,Q)$ per ogni coppia di punti). Una omotetia è una omologia generale di asse improprio; chiaramente è una similitudine. Una isometria è una similitudine di rapporto 1; in un riferimento cartesiano ortogonale le isometrie hanno matrici $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ a & P\end{smallmatrix}\right)$ con P matrice ortogonale ($P^tP=PP^t=\mathbb{I}_n$). Orientamenti: due riferimenti cartesiani ortogonali sono equiorientati se la matrice di cambiamento ha determinante 1; vi sono due classi di equivalenza per questa relazione, dette gli orientamenti.

Data una varietà lineare (propria reale) L, detto $L_\infty=L\wedge H_\infty$, diciamo che la polare M_∞ di L_∞ rispetto a Ω_∞ è la direzione ortogonale a L; si tratta di una varietà sghemba con L. La simmetria (ortogonale) rispetto ad L è la simmetria di asse L e direzione ortogonale (si tratta di isometrie). Ogni isometria è proiezione di al più $n+1$ simmetrie (ortogonali) rispetto a iperpiani. Se L ed L' sono varietà lineari di dimensione $r\geqslant 0$ allora esiste almeno una isometria f di $\mathbb{E}$ tale che $fL=L'$.

Quadriche. Siano Ω e $\mathcal{Q}$ due quadriche distinte di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, la prima priva di punti reali (dunque non degenere); allora esistono riferimenti autopolari rispetto a Ω in cui $\mathcal{Q}$ ha matrice diagonale (se $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_h$ sono i coni del fascio generato da Ω e $\mathcal{Q}$, che sono tutti reali, con $1\leqslant h\leqslant n$ e di ranghi tali che $\sum_i r_i=n+1$, basta trovare riferimenti in $L_i=v(\mathcal{C}_i)$ che siano autopolari per $\Omega\cap L_i$).

Due quadriche $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ di $\mathbb{E}$ si dicono metricamente equivalenti se esiste una isometria f con $f(\mathcal{Q})=\mathcal{Q}'$. Tramite trasformazioni cartesiane ortogonali possiamo avere forme canoniche come nel caso affine (ma senza alterare gli a_i). Per coniche a centro, cilindri non parabolici e coni propri i coefficienti a_i si dicono (inversi de)i semiassi (reali quelli positivi, trasversi quelli negativi); si suppone che i semiassi reali siano non meno di quelli trasversi, e nel caso di coni che uno dei semiassi sia 1. Per paraboloidi e coni parabolici gli a_i si dicono i parametri; quelli positivi sono non meno di quelli negativi. Una quadrica si dice di rotazione se vi sono semiassi o parametri con molteplicità (>1); ciò succede sse esiste una varietà lineare L tale che ogni rotazione di asse L manda la quadrica in sè. Le rette $r_i=P_0\vee P_i$ (risp. gli iperpiani $H_i=\bigvee_{j\neq i}P_j$) si dicono assi (rispettivamente iperpiani principali) si $\mathcal{Q}$ se i punti $P_0,\dots,P_n$ sono quelli di un riferimento in cui $\mathcal{Q}$ abbia equazione canonica.

Due quadriche sono metricamente equivalenti se e solo se hanno gli stessi semiassi (o gli stessi parametri) con le stesse molteplicità.

Invarianti ortogonali. In certi casi i parametri si possono calcolare facilmente: sia A una matrice di $\mathcal{Q}$,

- per le quadriche a centro: $a_i=\rho_i/\lambda$ ove ρ_i $(i=1,\dots,n)$ sono gli autovalori di A e $\lambda=-\det A/\det A_\infty$;
- per i coni propri: gli a_i sono a meno di proporzionalità gli autovalori di A;
- per i paraboloidi: $a_i=c\rho_i$ ove ρ_i $(i=1,\dots,n-1)$ sono gli autovalori di A_∞ e $c=\pm\sqrt{-\prod_i\rho_i/\det A}$ (il segno scelto in modo che vi siano più parametri positivi).

Proprietà focali. Sia $\mathcal{Q}$ quadrica non degenere di $\mathbb{E}$; una retta r per un punto P si dice retta principale di $\mathcal{Q}$ in P se $H^\perp\in r$ ove H è liperpiano per P ortogonale ad r. Si dicono n-uple principali di $\mathcal{Q}$ in P le n-uple ortogonali di rette principali di $\mathcal{Q}$ in P.

Se $P\notin\mathcal{Q}$, le n-uple principali sono le n-uple di assi del cono tangente $\mathcal{C}_P(\mathcal{Q})$. Se $P\in\mathcal{Q}$, la normale n_P (all'iperpiano tangente in P) è retta pricipale, unica retta principale per P non appartenente all'iperpiano tangente $T_P(\mathcal{Q})$; inoltre $l_1,\dots,l_{n-1},n_P$ è una n-upla principale di $\mathcal{Q}$ in P sse $l_1,\dots,l_{n-1}$ è una $(n-1)$-upla di assi del cono $\mathcal{Q}\cap T_P(\mathcal{Q})$.

Un punto $P\in\mathbb{E}$ si dice un fuoco di $\mathcal{Q}$ se in P vi sono infinite n-uple pricipali di $\mathcal{Q}$. Ciò vale sse il fascio generato da $\mathcal{Q}$ e dal cono isotropo $\mathcal{I}_P$ (proiezione dell'assoluto da P) contiene coni di rango $\leqslant n-1$.

Per le quadriche a centro non di rotazione, con equazione canonica $\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{b_i}=1$ con $b_1<\dots<b_n$, i fuochi sono i punti delle n quadriche (dette focali) di equazioni $\begin{cases}X_i=0\\ \sum_{i\neq j=1}^n \frac{X_j^2}{b_j-b_i}=1\end{cases}$ (per $i=1,\dots,n$; si tratta di quadriche a centro, una per ogni tipo).

Per i paraboloidi non di rotazione, con equazione canonica $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{X_i^2}{b_i}=2X_n$ con $b_1<\dots<b_{n-1}$, i fuochi sono i punti delle $n-1$ quadriche (dette focali) di equazioni $\begin{cases}X_i=0\\ \sum_{i\neq j=1}^{n-1}\frac{X_j^2}{b_j-b_i}=2X_n-b_i\end{cases}$ (per $i=1,\dots,n-1$; si tratta di paraboloidi, uno per ogni tipo).