Geometria Due Reference Cards

Algebra Multilineare

Send comments and corrections to ⟨maurizio@math.unipd.it⟩

Anelli.

Un anello (associativo con unità) è un insieme con due operazioni, che sia un gruppo abeliano rispetto a una (la somma), un monoide (associativo con unità) rispetto all'altra (il prodotto) e che distribuisca il prodotto rispetto alla somma: $a(b+c)=ab+ac$. Si dice commutativo se il prodotto lo è. I morfismi di anelli (associativi con unità) sono le mappe di insiemi che rispettano le operazioni (e l'identità).

Un ideale (bilatero) di un anello R è un sottinsieme I che sia sottogruppo additivo e moltiplicativamente assorbente (i.e. $ab\in I$ se $a\in I$ oppure $b\in I$). Un ideale è massimale se non è contenuto in altri ideali propri; è primo se non è tutto R e vale: se $ab\in I$ allora $a\in I$ oppure $b\in I$). Ideali massimali sono primi. Un ideale è principale se si scrive come $aR=Ra$ per $a\in R$, e si indica con (a); è finitamente generato se è del tipo $a_1R+\cdots+a_mR$, e si indica con $(a_1,\ldots,a_m)$. Se I è un ideale di un anello R, il quoziente R/I eredita in modo naturale una struttura di anello.

Domini di integrità. Un anello si dice integro se vale la legge di cancellazione: $ab=ac$ implica $b=c$. Ciò vale se e solo se $ab=0$ implica $a=0$ o $b=0$, cioè se (0) è un ideale primo. Al contrario un elemento non nullo $a\in R$ si dice un divisore di zero se esiste b non nullo tale che $ab=0$; R è integro sse non ha divisori di zero.

Domini noetheriani. Un dominio di integrità è noetheriano se ogni ideale è finitamente generato. Vale il teorema della base di Hilbert: se A è noetheriano, allora $A[X]$ è noetheriano; dunque anche ogni $A[X_1,\ldots,X_n]$ (per induzione).

Domini a fattorizzazione unica. Un elemento si dice invertibile o unità se ha un inverso moltiplicativo; due elementi si dicono associati se uno si ottiene moltiplicando l'altro per una unità; un elemento è primo se si fattorizza solo tramite associati. Un dominio si dice a fattorizzazione unica se ogni elemento si scrive in modo essenzialmente unico (cioè a meno dell'ordine e di associati) come prodotto di (potenze di) primi a due a due non associati.

Domini a ideali principali. Un dominio di integrità si dice anello principale o ad ideali principali se ogni suo ideale è principale. In tal caso è dominio a fattorizzazione unica. Valgono i seguenti fatti: $(a)+(b)=(d)$ sse d è il massimo comun divisore di a e b; $(a)\cap(b)=(m)$ sse m è il minimo comune multiplo di a e b; se $a_1,\ldots,a_r$ sono a due a due primi tra loro, esiste un isomorfismo canonico $R/(\prod a_i)\cong\bigoplus R/(a_i)$ (teorema cinese del resto).

Domini euclidei. Un dominio di integrità si dice euclideo se esiste una funzione $\delta{:}R\smallsetminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{N}$ moltiplicativa ($\delta(ab)=\delta(a)\delta(b)$) e per cui esista una divisione euclidea (per ogni $a,b\in R\smallsetminus\{0\}$ esistano $q,r\in R$ tali che $a=bq+r$ con $r=0$ o $\delta(r)<\delta(b)$). Sono domini euclidei $\mathbb{Z}$ (con la funzione valore assoluto) e $C[X]$ (con la funzione grado) ove C è un corpo. Un dominio euclideo è principale.

Moduli.

Dato un anello R, un R-modulo (sinistro) è un insieme dotato di struttura di gruppo abeliano e di una applicazione (prodotto per gli scalari) $R\times M\to M$ che sia bilineare ($(a+b)m=am+bm$ e $a(m+n)=am+an$), associativa ($(ab)m=a(bm)$) e unitaria ($1m=m$). Se R è un corpo, gli R-moduli sono gli spazi vettoriali; se $R=\mathbb{Z}$, gli $\mathbb{Z}$-moduli sono i gruppi abeliani.

Una mappa di insiemi $f{:}M\to N$ tra due R-moduli si dice un morfismo di R-moduli, o lineare, se rispetta le due operazioni: $f(am+bm')=af(m)+bf(m')$ (ovvero $f(m+m')=f(m)+f(m')$ e $f(am)=af(m)$). Si definiscono nucleo e immagine: $\ker(f)=f^{-1}(0)$ e $\mathrm{im}(f)=f(M)$.

L'insieme dei morfismi lineari si indica con $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ ed ha una struttura naturale di R-modulo (usando la struttura di N).

Un sottomodulo di M è un sottinsieme N in cui le operazioni inducono una struttura di modulo (basta che sia chiuso per le due operazioni); il quoziente M/N eredita struttura di modulo. Valgono gli usuali teoremi di isomorfismo: un morfismo f induce un isomorfismo $M/\ker(f)\cong\mathrm{im}(f)$, per sottomoduli N ed N' vale $(N+N')/N'\cong N/(N\cap N')$ e per una inclusione di sottomoduli $N'\leqslant N$ vale $(M/N')/(N/N')\cong M/N$.

Generatori, indipendenza, basi. Una famiglia di elementi di M si dice generatrice se il sottomodulo generato coincide con M (i.e. ogni elemento di M si scrive come combinazione a coefficienti in A di elementi della famiglia). Si dice libera se lo zero si può ottenere solo con tutti i coefficienti nulli; una base di M è una famiglia generatrice libera. In generale i moduli non ammettono basi (es. R/I con I ideale di R); e un insieme minimale di generatori può non essere una base. I moduli che ammettono una base (finita) si dicono liberi (finiti).

La famiglia formata da un unico elemento $m\in M$ non nullo non è necessariamente libera; si dicono di torsione gli elementi per cui esiste $a\in A$ non nullo con $am=0$. Un modulo M si dice di torsione se ogni suo elemento è di torsione.

Si definiscono come d'usuale il prodotto e la somma diretti di una famiglia arbitraria di R-moduli (sequenze di elementi, quasi tutti nulli per la somma, con le operazioni componente per componente). Per famiglie finite, somma e prodotto diretti coincidono; per famiglie arbitrarie la somma è un sottomodulo del prodotto.

Per ogni R-modulo N, valgono le usuali proprietà
$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}M_i,N)\cong\prod_{i\in\mathcal{I}}\mathrm{Hom}_R(M_i,N)$
e $\mathrm{Hom}_R(N,\prod_{i\in\mathcal{I}}M_i)\cong\prod_{i\in\mathcal{I}}\mathrm{Hom}_R(N,M_i)$.
Dato un sottomodulo N di M, non è detto che esista un complementare, i.e. un sottomodulo N' con $M=N\oplus N'$.

Dualità. Il duale di M è l'insieme $M^*=\mathrm{Hom}_R(M,R)$ con la struttura naturale di R-modulo. Se $m^*\in M^*$ è tale che $m^*(m)=0$ per ogni $m\in M$, allora $m^*=0$; l'affermazione duale è falsa: se $m\in M$ verifica $m^*(m)=0$ per ogni $m^*\in M^*$, non è necessariamente zero.

Dato un morfismo $f{:}M\to N$, si definsce il morfismo trasposto $f^*{:}N^*\to M^*$ tramite $f^*(\varphi)=\varphi\circ f$. Risulta che f^* è un morfismo di R-moduli; inoltre ${}^*{:}\mathrm{Hom}_R(M,N)\to\mathrm{Hom}_R(N^*,M^*)$ è un morfismo di R-moduli (i.e. $(f+g)^*=f^*+g^*$ e $(af)^*=af^*$); infine $(\mathrm{id}_M)^*=\mathrm{id}_{M^*}$ e $(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$.

Abbiamo canonicamente che $(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}M_i)^*\cong\prod_{i\in\mathcal{I}}M_i^*$.

Se M è libero finito, allora anche M^* è libero finito, e data una base $m_1,\ldots,m_r$ di M, la base duale $m_1^*,\ldots,m_r^*$ di M^* è definita da $m_i^*(m_j)=\delta_{i,j}$.

Il morfismo canonico di valutazione $M\to M^{**}$ (manda m nel morfismo $m^*\mapsto m^*(m)$) in generale non è iniettivo né suriettivo; si tratta di un isomorfismo se M è libero finito.

Prodotto Tensore. Dati due R-moduli M ed N, definiamo l'R-modulo delle applicazioni bilineari da $M\times N$ in P nel modo ovvio, dunque

$$\mathrm{Bil}_R(M\times N,P)=\mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_R(N,P))=\mathrm{Hom}_R(N,\mathrm{Hom}_R(M,P))\,.$$

Il prodotto tensore di M ed N sopra R, indicato con $M\otimes_R N$ è un R-modulo (unico a meno di isomorfismo canonico) tale che $\mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N,P)\cong\mathrm{Bil}_R(M\times N,P)$ per ogni R-modulo P.

L'isomorfismo è realizzato da una applicazione bilineare canonica $M\times N\longrightarrow M\otimes_R N$.

L'R-modulo prodotto tensore è realizzato tramite la seguente costruzione: sia $M\otimes_R N=R^{(M\times N)}/\mathcal{T}$ ove $R^{(M\times N)}$ indica la somma diretta di copie di R indiciata dall'insieme $M\times N$, e $\mathcal{T}$ è il sottomodulo generato dagli elementi della forma $(x+x',y)-(x,y)-(x',y)$, $(x,y+y')-(x,y)-(x,y')$, $(ax,y)-a(x,y)$ e $(x,ay)-a(x,y)$.

$M\otimes_R N$ è generato dagli elementi della forma (x,y) al variare di x e y in M ed N risp., o anche in insiemi di generatori per i due moduli. Il morfismo naturale $M\times N\longrightarrow M\otimes_R N$ è bilineare e l'immagine di (x,y) si indica con $x\otimes y$.

Dati due morfismi $f{:}M\to M'$ e $g{:}N\to N'$, c'è un morfismo naturale $f\otimes g{:}M\otimes_R N\longrightarrow M'\otimes_R N'$ definito da $(f\otimes g)(x\otimes y)=f(x)\otimes g(y)$. Abbiamo che $(f+f')\otimes g=f\otimes g+f'\otimes g$, $f\otimes(g+g')=f\otimes g+f\otimes g'$, $(af)\otimes g=a(f\otimes g)=f\otimes(ag)$.

Abbiamo isomorfismi canonici:
di commutatività $M\otimes_R N\cong N\otimes_R M$,
di associatività $(M\otimes_R N)\otimes_R P\cong M\otimes_R(N\otimes_R P)$,
di distributività $(M\oplus N)\otimes_R P\cong(M\otimes_R P)\oplus(N\otimes_R P)$
e di "identità" $M\otimes_R R\to M\leftarrow R\otimes_R M$.

Se M è libero con base $m_1,\dots,m_r$, allora ogni elemento di $M\otimes_R N$ si scrive unicamente nella forma $\sum m_i\otimes y_i$ con $y_i\in N$. Se anche N è libero finito con base $n_1,\dots,n_s$, allora $M\otimes_R N$ è libero finito di base $m_i\otimes n_j$ (con $i=1,\dots,r$ e $j=1,\dots,s$, nell'ordine lessicografico si dice prodotto tensore delle due basi).

Il morfismo canonico $\mathrm{Hom}_R(M,N)\otimes_R P\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M,N\otimes_R P)$ che manda $f\otimes z$ nel morfismo $m\mapsto f(m)\otimes z$; è un isomorfismo se M è libero finito.

C'è un morfismo canonico $M^*\otimes_R N\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M,N)$ che manda $x^*\otimes y$ nel morfismo $x\mapsto x^*(x)y$. Si tratta di un isomorfismo se M è libero finito; in particolare sotto questa ipotesi abbiamo che $M^*\otimes_R M\cong\mathrm{Hom}_R(M,M)$, e il morfismo di R-moduli $\mathrm{Hom}_R(M,M)\cong M^*\otimes_R M\longrightarrow R$ si chiama la traccia; se f è rappresentato da una matrice $A=(a_{i,j})$ allora la traccia di f è $\sum_i a_{i,i}\in R$.

C'è un morfismo canonico $M^*\otimes_R N^*\longrightarrow(M\otimes_R N)^*$ che manda $x^*\otimes y^*$ nel morfismo $x\otimes y\mapsto x^*(x)y^*(y)$. Si tratta di un isomorfismo se uno dei due moduli è libero finito.

Restrizione ed estensioni degli scalari. Dato un morfismo di anelli $\varphi{:}R\to S$, ogni S-modulo N può esssere visto come R-modulo tramite la posizione $rn=\varphi(r)n$ (restrizione degli scalari). In particolare S stesso è un R-modulo, e per ogni R-modulo M possiamo definire un S-modulo tramite il prodotto tensore $M\otimes_R S$, ove la struttura di S-modulo è definita dal prodotto $s(n\otimes t)=n\otimes(st)$. Vale la seguente proprietà: $\mathrm{Hom}_R(M,N)\cong\mathrm{Hom}_S(M\otimes_R S,N)$ (ove N è un S-modulo), ovvero dare un morfismo R-lineare tra M e un S-modulo è equivalente a dare un morfismo S-lineare tra il cambiato di base di M e quell'S-modulo.

Se M è libero (finito) come R-modulo, allora $M\otimes_R S$ è libero (finito) come S-modulo.

Anche $\mathrm{Hom}_R(S,M)$ ha struttura di S-modulo, tramite $(sf)(t)=f(st)$, e possiede la proprietà duale a quella di $M\otimes_R S$, ovvero $\mathrm{Hom}_R(N,M)\cong\mathrm{Hom}_S(N,\mathrm{Hom}_R(S,M))$.

Moduli su Anelli Principali.

Matrici. Siano A,B matrici $m\times n$ a coefficienti in R. Esse si dicono equivalenti se esistono matrici quadrate invertibili U e V di ordini m e n tali che $B=UAV$. Si dicono elementarmente equivalenti se una si ottiene dall'altra tramite applicazione di un numero finito di operazioni elementari:

- moltiplicare una riga (o colonna) per una unità di R;
- scambiare di posizione due righe (o colonne);
- sommare ad una riga (o colonna) un qualsiasi multiplo scalare di un'altra.

Se R è un corpo le due nozioni coincidono.

Teorema dei Divisori Elementari. Sia R un anello principale; se A è una matrice $m\times n$ a coefficienti in R di rango r, allora è equivalente (elementarmente equivalente se R è euclideo) ad una matrice diagonale avente nella diagonale i valori $e_1,\dots,e_r,0,\dots,0$ con $e_i\in R$, non nulli, tali che $e_i|e_{i+1}$ per ogni $i=1,dots,r-1$. Gli e_i si dicono i fattori invarianti di A, sono determinati a meno di unità di R (ogni prodotto $e_1\cdots,e_s$ è un massimo comun divisore dei minori d'ordine s di A).

Se $e_i=\prod_j p_j^{h_{i,j}}$ è la decomposizione in fattori (a due a due) primi dei divisori elementari, con $h_{i,j}\geqslant 0$ e $h_{r,j}>0$, allora i $p_j^{h_{i,j}}$ si dicono i divisori elementari di A; rango e divisori elementari determinano i fattori invarianti.

Moduli di torsione. Sia M un R-modulo; definiamo il suo annullatore $\mathrm{ann}(M)=\{r\in R|rM=0\}$, che risulta un ideale di R. M si dice ciclico se $M=Rx$ per un $x\in M$; ciò si verifica sse $M\cong R/I$ con $I=\mathrm{ann}(M)=\mathrm{ann}(x)$.

Definiamo M_{tor} il sottomodulo degli elementi di torsione di M, i.e. $M_{\mathrm{tor}}=\{m\in M|rm=0 \text{ per } r\neq 0 \text{ in } R\}$.

Per $r\in R$ non nullo consideriamo i sottomoduli (di torsione) $M(r)=\{m\in M|rm=0\}$ e $M_{r-\mathrm{tor}}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}M(r^n)$. Se $r,r'\in R$ sono primi tra loro, allora $M(rr')=M(r)\oplus M(r')$.

Struttura dei moduli di torsione. Sia $\mathcal{P}$ un insieme di rappresentanti (a meno di associati) dei primi di R (anello principale; se M è un R-modulo di torsione (i.e. $M=M_{\mathrm{tor}}$), allora $M\cong\bigoplus_{p\in\mathcal{P}}M_{p-\mathrm{tor}}$ e $M_{p-\mathrm{tor}}$ di chiama la componente p-primaria o p-componente di M.

Moduli finitamente generati. Sia R un anello principale; ogni modulo finitamente generato è somma diretta del sottomodulo di torsione e di un sottomodulo libero finito (e due tali sottomoduli hanno la stessa dimensione). Nelle stesse ipotesi M è somma diretta di moduli ciclici; esistono $e_1,\dots,e_h\in R$ non unità, con $e_i|e_{i+1}$, tali che $M\cong\sum_j R/Re_j$; gli ideali Re_j sono unicamente determinati.

Endomorfismi di spazi vettoriali di dimensione finita. Sia V uno spazio vettoriale su C di dimensione finita, ed f un endomorfismo di V. Allora V assume struttura di modulo su $C[X]$ tramite la posizione $P(X)v=P(f)v$; si tratta di un modulo di torsione (ed ogni modulo di torsione si realizza in questo modo). Abbiamo dunque che $V\cong\bigoplus_{i=1}^h C[X]/e_i(X)$ come $C[X]$-modulo, ove $e_i(X)\in C[X]$ sono polinomi monici tali che $e_i(X)|e_{i+1}(X)$ (unicamente determinati).

Sia A la matrice associata ad f ina una base di V. I fattori invarianti della matrice $X-A$ in $C[X]$ sono $1,\dots,1,e_1(X),\dots,e_h(X)$. Il polinomio caratteristico di A (o di f) è $p_f(X)=\prod_i e_i(X)$; il polinomio minimo (generatore monico del nucleo del morfismo $C[X]\to C[f]$ che manda X in f) è $q_f(X)=e_h(X)$. In particolare il polinomio caratteristico ha gli stessi fattori del polinomio minimo, e $p_f(f)=0$ (teorema di Hamilton-Cayley).

Due matrici A e B sono simili in C se e solo se le matrici $X-A$ e $X-B$ sono equivalenti in $C[X]$.

forma canonica di Jordan. Sia $e(X)=X^n-a_{n-1}X^{n-1}-\cdots-a_0$ con $a_i\in C$, poniamo $V=C[X]/e(X)$; allora la moltiplicazione per X è un endomorfismo di V che nella base $1,X,\dots,X^{n-1}$ ha matrice

$$B=\begin{pmatrix} 0\ \cdots\ 0 & a_0 \\ & a_1 \\ \mathbb{I}_{n-1} & \vdots \\ & a_{n-1}\end{pmatrix}$$

che si dice matrice compagna del polinomio $e(X)$.

Se A è matrice quadrata a coefficienti in C, $e_1(X),\dots,e_h(X)$ fattori inverianti monici di grado positivo di $X-A$ in $c[X]$, allora A è simile in C alla matrice con blocchi diagonali B_i dati dalle matrici compagne degli $e_i(X)$.

Nota che la forma canonica di Jordan della matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{smallmatrix}\right)$ è $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -ab \\ 1 & a+b\end{smallmatrix}\right)$.

forma canonica razionale su C. Sia $p(X)$ polinomio monico di grado n positivo, poniamo $V=C[X]/p(X)^m$; allora la moltiplicazione per X è un endomorfismo di V che nella base $1,X,\dots,X^{n-1},p,Xp,\dots,X^{n-1}p,\dots p^{m-1},Xp^{m-1},\dots,X^{n-1}p^{m-1}$ ha matrice a blocchi (non nulli)

$$C=\begin{pmatrix} B & & & \\ N & B & & \\ & N & B & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & N \; B \end{pmatrix}$$

ove B è la matrice compagna di $p(X)$ (m blocchi) e N è la matrice nilpotente $\delta_{1,n}$ ($m-1$ blocchi); C si dice la matrice ipercompagna di $p(X)^m$.

Se A è matrice quadrata a coefficienti in C, $p_1(X)^{m_1},\dots,p_k(X)^{m_k}$ divisori elementari monici di $X-A$ in $c[X]$, allora A è simile in C alla matrice con blocchi diagonali C_i dati dalle matrici ipercompagne degli $p_i(X)^{m_i}$. Da notare che la forma canonica razionale su K può variare passando ad estensioni del corpo, perché i divisori elementari possono cambiare.

In particolare, il polinomio ipercompagno di $(X-c)^m$ è la matrice quadrata d'ordine m data da $c\mathbb{I}_m+(\delta_{i,i-1})$ (blocco di Jordan di ordine m ed autovalore c); dunque se A ha tutti i suoi autovalori in C (e.g. se C è algebricamente chiuso) allora la forma canonica razionale su C è fatta di blocchi di Jordan (e non cambia per estensioni di corpo).

Algebra Tensoriale.

Algebre. Sia R un anello; un'algebra A su R è un R-modulo dotato di una struttura di anello (associativo con unità, sul gruppo additivo dato dal modulo) compatibile con la struttura di R-modulo (cioè ...); equivalentemente si tratta di un anello (associativo con unità) A dotato di un morfismo di anelli $R\to A$, che manda R nel centro di A.

Diaciamo che A è una R-algebra graduata (su $\mathbb{N}$) se esiste una decomposizione $A=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}A_n$ come R-modulo, e che rispetta il prodotto di A, cioè $A_iA_j\subseteq A_{i+j}$.

Algebra Tensoriale. Dato un R-modulo M, definiamo l'algebra tensoriale $T_R(M)$ di M sopra R tramite $T_R(M)=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}T_{R,n}(M)$ ove $T_{R,n}(M)=M^{\otimes n}=M\otimes_R\cdots\otimes_R M$ (n volte), e il prodotto è definito dai morfismi canonici $T_{R,i}(M)\times T_{R,j}(M)\longrightarrow T_{R,i+j}(M)$ per ogni i e j (risulta un'algebra graduata).

In particolare abbiamo $T_{R,0}(M)=R$ e $T_{R,1}(M)=M$, e in quanto algebra $T_R(M)$ risulta generata da $T_{R,1}(M)$.

Se definiamo $T_R(M)\otimes_R T_R(N)=\bigoplus_{p,q\in\mathbb{N}}(T_{R,p}(M)\otimes_R T_{R,q}(N))$ abbiamo che $T_R(M\otimes_R N)\cong T_R(M)\otimes_R T_R(N)$ e per ogni grado $T_{R,n}(M\otimes_R N)\cong\bigoplus_{p+q=n}(T_{R,p}(M)\otimes_R T_{R,q}(N))$.

Se M è libero finito con base m_i ($i=1,\dots,n$), allora ogni $T_{R,n}(M)$ è libero finito con base $m_{i_1}\otimes\cdots\otimes m_{i_n}$ ($i_1,\dots,i_n=1,\dots,n$), mentre $T_R(M)$ è libero ma non finito, come modulo; però $T_R(M)$ è finitamente generato come R-algebra, ed è un'algebra di polinomi non commutativi sugli elementi della base di M.

Se $f{:}M\to N$ è un morfismo di R-moduli, abbiamo canonicamente un morfismo di R-algebre graduate $T_R(f){:}T_R(M)\to T_R(N)$; risulta $T_R(\mathrm{id}_M)=\mathrm{id}_{T_R(M)}$ e $T_R(g\circ f)=T_R(g)\circ T_R(f)$.

Proprietà universale. L'algebra tensoriale $T_R(M)$ ha un morfismo canonico di R-moduli $M\to T_R(M)$ che gode della seguente proprietà universale: ogni morfismo di R-moduli $M\to A$ ove A è una R-algebra (associativa) si estende ad un morfismo di R-algebre $T_R(M)\to A$, che lo fattorizza attraverso il morfismo canonico.

Tensori. Definiamo $T_R(M\oplus M^*)=\bigoplus_{p,q\in\mathbb{N}}T_p^q(M)$, ove $T_p^q(M)=(M^*)^{\otimes p}\otimes_R M^{\otimes q}$ sono gli R-tensori di tipo (p,q) su M.

Esempi: tensori di tipo (0,0): gli scalari, $T_0^0(M)=R$;
tensori di tipo (0,1): i vettori, $T_0^1(M)=M$;
tensori di tipo (1,0): i covettori, o forme lineari $T_1^0(M)=M^*$;
tensori di tipo (1,1): gli endomorfismi di M, $T_1^1(M)=M^*\otimes_R M\cong\mathrm{Hom}_R(M,M)$;
tensori di tipo (2,0): le forme bilineari su M, $T_2^0(M)=(M^*)^{\otimes 2}\cong\mathrm{Hom}_R(M^{\otimes 2},R)\cong\mathrm{Bil}_R(M\times M,R)$.

Contrazione. La contrazione di indici (h,k) dei tensori di tipo (p,q) è il morfismo $c_h^k{:}T_p^q(M)\to T_{p-1}^{q-1}(M)$ definito dalla posizione $c_h^k(x_H^*\otimes x_K)=x_h^*(x_k)x^*_{H\smallsetminus h}\otimes x_{K\smallsetminus k}$.

Algebra Simmetrica.

L'algebra simmetrica di M su R è il quoziente $S_R(M)=T_R(M)/\mathcal{S}$ ove $\mathcal{S}$ è l'ideale bilatero di $T_R(M)$ generato dagli elementi del tipo $x\otimes y-y\otimes x$ al variare di x e y in M. Abbiamo il morfismo canonico di proiezione $T_R(M)\to S_R(M)$ e indichiamo con $xy=x\odot y$ l'immagine di $x\otimes y$ (ill prodotto di x e y in $S_R(M)$). Di conseguenza $S_R(M)$ è un'algebra commutativa. Definiamo $\mathcal{S}_i=\mathcal{S}\cap T_{R,i}(M)$; allora risulta che $\mathcal{S}_0=\mathcal{S}_1=0$ e $\mathcal{S}=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{S}_i$ (cioè $\mathcal{S}$ è un ideale graduato). Di conseguenza se definiamo $S_{R,i}(M)=T_{R,i}(M)/\mathcal{S}_i$, risulta $S_{R,0}(M)=R$, $S_{R,1}(M)=M$ e $S_R(M)=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}S_{R,i}(M)$ (cioè $S_R(M)$ è un'algebra graduata).

Se $f{:}M\to N$ è un morfismo di R-moduli, abbiamo canonicamente un morfismo di R-algebre graduate $S_R(f){:}S_R(M)\to S_R(N)$; risulta $S_R(\mathrm{id}_M)=\mathrm{id}_{S_R(M)}$ e $S_R(g\circ f)=S_R(g)\circ S_R(f)$.

Se definiamo $S_R(M)\otimes_R S_R(N)=\bigoplus_{p,q\in\mathbb{N}}(S_{R,p}(M)\otimes_R S_{R,q}(N))$ abbiamo che $S_R(M\otimes_R N)\cong S_R(M)\otimes_R S_R(N)$ e per ogni grado $S_{R,n}(M\otimes_R N)\cong\bigoplus_{p+q=n}(S_{R,p}(M)\otimes_R S_{R,q}(N))$.

Se M è libero finito con base m_i ($i=1,\dots,n$), allora ogni $S_{R,n}(M)$ è libero finito con base $m_{i_1}\odot\cdots\odot m_{i_n}$ ($i_1\leqslant\dots\leqslant i_n\in\{1,\dots,n\}$), mentre $S_R(M)$ è libero ma non finito, come modulo; però $S_R(M)$ è finitamente generato come R-algebra, ed è un'algebra di polinomi commutativi sugli elementi della base di M e il morfismo di R-algebre $R[X_1,\dots,X_n]\longrightarrow S_R(M)$ che manda X_i in m_i è un isomorfismo di algebre graduate.

Proprietà universale. Componendo con la proiezione $T_R(M)\to S_R(M)$, abbiamo un morfismo canonico di R-moduli $M\to S_R(M)$. Questo morfismo possiede la seguente proprietà universale: ogni morfismo di R-moduli $M\to A$, ove A è una R-algebra, tale che $f(x)f(y)=f(y)f(x)$ per ogni $x,y\in M$, si estende unicamente ad un morfismo di R-algebre $S_R(M)\to A$ che lo fattorizza tramite il morfismo canonico.

Algebra Esterna.

L'algebra esterna di M su R è il quoziente $\bigwedge_R(M)=T_R(M)/\mathcal{E}$ ove $\mathcal{E}$ è l'ideale bilatero di $T_R(M)$ generato dagli elementi del tipo $x\otimes x$ al variare di x in M. Abbiamo il morfismo canonico di proiezione $T_R(M)\to\bigwedge_R(M)$, indichiamo con $x\wedge y$ l'immagine di $x\otimes y$ (il prodotto di x e y in $\bigwedge_R(M)$). Di conseguenza $\bigwedge_R(M)$ è un'algebra i cui elementi sono di quadrato nullo. Definiamo $\mathcal{E}_i=\mathcal{E}\cap T_{R,i}(M)$; allora risulta che $\mathcal{E}_0=\mathcal{E}_1=0$ e $\mathcal{E}=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{E}_i$ (cioè $\mathcal{E}$ è un ideale graduato). Di conseguenza se definiamo $\bigwedge_R^i(M)=T_{R,i}(M)/\mathcal{E}_i$, risulta $\bigwedge_R^0(M)=R$, $\bigwedge_R^1(M)=$

M e $\bigwedge_R(M)=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\bigwedge_R^i(M)$ (cioè $\bigwedge_R(M)$ è un'algebra graduata).

Se $f{:}M\to N$ è un morfismo di R-moduli, abbiamo canonicamente un morfismo di R-algebre graduate $\bigwedge_R(f){:}\bigwedge_R(M)\to\bigwedge_R(N)$; risulta $\bigwedge_R(\mathrm{id}_M)=\mathrm{id}_{\bigwedge_R(M)}$ e $\bigwedge_R(g\circ f)=\bigwedge_R(g)\circ\bigwedge_R(f)$.

Se definiamo $\bigwedge_R(M)\otimes_R\bigwedge_R(N)=\bigoplus_{p,q\in\mathbb{N}}(\bigwedge_R^p(M)\otimes_R\bigwedge_R^q(N))$ abbiamo che $\bigwedge_R(M\otimes_R N)\cong\bigwedge_R(M)\otimes_R\bigwedge_R(N)$ e per ogni grado $\bigwedge_R^n(M\otimes_R N)\cong\bigoplus_{p+q=n}(\bigwedge_R^p(M)\otimes_R\bigwedge_R^q(N))$. Si noti che il prodotto segue la regola $(x_p\otimes y_q)\wedge(u_r\otimes v_s)=(-)^{qs}(x^p\wedge u_r)\otimes(y^q\wedge v_s)$.

Se M è libero finito con base m_i $(i{=}1,\dots,n)$, allora $\bigwedge_R^i(M)=0$ se $i>n$, e per $i=1,\dots n$ ogni $\bigwedge_R^i(M)$ è libero finito con base $m_{i_1}\wedge\cdots\wedge m_{i_n}$ $(0\leqslant i_1<\ldots<i_n\leqslant n)$, dunque di dimensione $\binom{n}{i}$ mentre $\bigwedge_R(M)$ è libero finito come R-modulo di dimensione 2^n.

Proprietà universale. Per composizione con la proiezione canonica $T_R(M)\to\bigwedge_R(M)$, abbiamo un morfismo canonico di R-moduli $M\to\bigwedge_R(M)$. In particolare abbiamo $x\wedge x=0$ e $x\wedge y=-y\wedge x$ per ogni $x,y\in M$. Questo morfismo possiede la seguente proprietà universale: ogni morfismo di R-moduli $M\to A$, ove A è una R-algebra, tale che $f(x)f(x)=0$ per ogni $x\in M$, si estende unicamente ad un morfismo di R-algebre $\bigwedge_R(M)\to A$ che lo fattorizza tramite il morfismo canonico.

Applicazioni r-lineari alternanti. Una applicazione $M^r\to N$ si dice R-lineare alternante se è lineare separatamente in ogni variabile, e $f(x_1,\dots,x_r)=0$ se $x_i=x_j$ per $i\neq j$. Preso $z^*\in\bigwedge^{r-1}M^*$, allora l'applicazione $M^r\to M$ definita da $x_I=(x_i)\mapsto\sum(-)^i(z^*(x_{I\smallsetminus i}))x_i$ è r-lineare alternante.

Se $x_1,\dots,x_r\in M$ sono tali che $x_1\wedge\cdots\wedge x_r=0$ allora $f(x_1,\dots,x_r)=0$ per ogni applicazione r-lineare alternante.

Gli elementi $x_1,\dots,x_r\in M$ sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $r\in R$ tale che $r(x_1\wedge\cdots\wedge x_r)=0$ (se R è un corpo, la condizione è $x_1\wedge\cdots\wedge x_r=0$).

Tensori Antisimmetrici. Per ogni σ permutazione di $\{1,\dots,i\}$ consideriamo l'endomorfismo di $T_i(M)$ determinato da $z=x_1\otimes\cdots\otimes x_i\mapsto z_\sigma=x_{\sigma1}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma i}$. Un tensore $z\in T_i(M)$ si dice antisimmetrico se per ogni permutazione risulta $z_\sigma=\mathrm{sgn}(\sigma)z$; indichiamo con $A_i(M)$ l'R-sottomodulo dei tensori antisimmetrici. Per ogni $z\in T_i(M)$, definiamo il tensore antisimmetrico $a(z)=\sum_\sigma\mathrm{sgn}(\sigma)z_\sigma$; risulta che $a(z+z')=a(z)+a(z')$ e se z è antisimmetrico, allora $a(z)=(i!)z$.

Supponiamo che R contenga $\mathbb{Q}$ (una copia omeomorfa dei numeri razionali); allora abbiamo la decomposizione di R-moduli $T_i(M)=A_i(M)\oplus\mathcal{S}_i$ e risulta $A_i(M)\cong\bigwedge^i(M)$.

Determinanti. Siano M ed N R-moduli liberi finiti di basi $x_1,\dots,x_m$ e $y_1,\dots,y_n$, $f{:}M\to N$ un morfismo R-lineare di matrice A (matrice $m\times n$ a coefficienti in R) in fissate basi dei moduli. Allora $\bigwedge^i f{:}\bigwedge^i M\to\bigwedge^i N$ è applicazione lineare che nelle basi standard ha matrice $(\det A_{H,K})$ ove H è sottinsieme ordinato di $\{1,\dots,m\}$ e K è sottinsieme ordinato di $\{1,\dots,n\}$ di cadinalità i; cioè $\bigwedge^i(f)x_K=\sum_H\det(A_{H,K})y_H$.

In particolare se f è endomorfismo di M di matrice A (matrice quadrata di ordine n a coefficienti in R), allora $\bigwedge^n(f)$ è endomorfismo di $\bigwedge^n(M)\cong R$ di matrice (scalare) $\det(A)$. Indichiamo con x_N il prodotto esterno $x_1\wedge\cdots\wedge x_n$; da

$$(\bigwedge^r f\wedge\bigwedge^{n-r}f)x_K\wedge x_P=\begin{cases}0 & \text{se } P\neq K'\\ \epsilon_{KK'}\det(f)x_N & \text{se } P=K\end{cases}$$

e $(\bigwedge^r f\wedge\bigwedge^{n-r}f)x_K\wedge x_P=\sum_H(\epsilon_{HH'}\det A_{HK}\det A_{H'P})x_N$ si ottengono gli sviluppi

$$\det(f)=\det(A)=\epsilon_{KK'}\sum_H\epsilon_{HH'}\det A_{HK}\det A_{H'K'}$$

e

$$0=\sum_H\epsilon_{HH'}\det A_{HK}\det A_{H'P}\quad\text{se } P\neq K'\ .$$

L'endomorfismo f è iniettivo se e solo se $\ker(f)=0$ ed equivale a che $\det(f)$ non sia divisore di zero in R.

Si tratta di un automorfismo sse ammette una inversa (a destra o a sinistra), oppure sse è suriettivo, o ancora sse $\det(f)$ è unità di R.

Dualità. Esiste una applicazione $\mathbb{P}{:}\bigwedge M\longrightarrow\bigwedge M\otimes_R\bigwedge M$ tale che $\mathbb{P}(x)=x\otimes1+1\otimes x$ per ogni $x\in\bigwedge M$; risulta $(\mathbb{P}\otimes\mathrm{id}_{\wedge M})\mathbb{P}=(\mathrm{id}_{\wedge M}\otimes\mathbb{P})\mathbb{P}$.

Esiste una forma $\epsilon{:}\bigwedge M\to R$ data da $\epsilon(z)=z_0$; risulta che $(\epsilon\otimes\mathrm{id}_{\wedge M})\mathbb{P}z=1\otimes z$ e $(\mathrm{id}_{\wedge M}\otimes\epsilon)\mathbb{P}z=z\otimes1$.

Inoltre $\mathbb{P}(x_1\wedge\cdots\wedge x_r)=\sum_H\epsilon_{HH'}x_H\otimes x_{H'}$.

Se M è libero finito, allora $M^*\subset(\bigwedge M)^*$, e la definizione per $u,v\in(\bigwedge M)^*$ del prodotto $u\wedge v=\mu(u\otimes v)\mathbb{P}$ (ove μ è la moltiplicazione in R) rende $(\bigwedge M)^*$ una R-algebra associativa con unità ϵ.

Notazioni: $\mathbb{P}_2=\mathbb{P}$ e per induzione $\mathbb{P}_r=(\mathbb{P}_{r-1}\otimes\mathrm{id}_{\wedge M})\mathbb{P}$;
$\mu_2=\mu$ e per induzione $\mu_r=\mu(\mu_{r-1}\otimes\mathrm{id}_R)$.
Per $u_1,\dots,u_r\in(\bigwedge M)^*$ risulta $u_1\wedge\cdots\wedge u_r=\mu_r(u_1\otimes\cdots\otimes u_r)\mathbb{P}_r$;
se $x_1^*,\dots,x_r^*\in M^*$ e $x_1,\dots,x_s\in M$ allora
$$(x_1^*\wedge\ldots\wedge x_r^*)(x_1\wedge\ldots\wedge x_s)=\begin{cases}0 & \text{se } r\neq s\\ \det(x_i^*(x_j)) & \text{se } r=s.\end{cases}$$

In particolare $x^*\wedge x^*=0$, e dunque esiste un morfismo canonico $\bigwedge(M^*)\longrightarrow(\bigwedge M)^*$; se M è libero finito, si tratta di un isomorfismo.

Prodotto interno. Sia M un R-modulo libero finito. Definiamo l'applicazione prodotto interno $\bigwedge M^*\otimes\bigwedge M\longrightarrow\bigwedge M$ tramite $(y^*,x)\mapsto y^*\lrcorner x$ determinato da $z^*(y^*\lrcorner x)=(z^*\wedge y^*)x$ per ogni $z^*\in\bigwedge M^*$. Valgono allora le proprietà seguenti:
$y^*\lrcorner(x+x')=y^*\lrcorner x+y^*\lrcorner x'$, $(y^*+y^{*\prime})\lrcorner x=y^*\lrcorner x+y^{*\prime}\lrcorner x$,
$1\lrcorner x=x$ (1 è l'unità di $\bigwedge M^*$),
$(y^*\wedge y^{*\prime})\lrcorner x=y^*\lrcorner(y^{*\prime}\lrcorner x)$. Inoltre abbiamo per $x\in\bigwedge^r M$ e $y^*\in\bigwedge^s M^*$ che $y^*\lrcorner x\begin{cases}=0 & \text{se } r>s\\ \in\bigwedge^{r-s}M & \text{se } s\leqslant r\\ =y^*(x) & \text{se } s=r.\end{cases}$

Se e_i è base di M, allora $e_H^*\lrcorner e_K=\begin{cases}0 & \text{se } H\not\subseteq K\\ \epsilon_{K\smallsetminus H,H}e_{K\smallsetminus H} & \text{se } H\subseteq K.\end{cases}$

In particolare $e_i^*\lrcorner e_J$ risulta nullo se $i\notin J$ e risulta $(-)^{r-1}e_{J\smallsetminus i}$ se $J=(j_i)$ con $i=j_r$.

Regola di Leibnitz. Per ogni $z^*\in M^*$, $x\in\bigwedge^r M$, $y\in\bigwedge^s M$, risulta $z^*\lrcorner(x\wedge y)=(z^*\lrcorner x)\wedge y+(-)^r x\wedge(z^*\lrcorner y)$.

Regola di Taylor. Per ogni $z^*\in M^*$: $\mathbb{P}z=\sum_H(e_H^*\lrcorner z)\otimes e_H$.

Il morfismo $\bigwedge^r M\longrightarrow\bigwedge^{n-r}M^*$ che manda x in $x^\vee=x\lrcorner e_N^*$ è un isomorfismo.

Applicazione agli spazi vettoriali. Sia V uno spazio vettoriale su C dotato di una forma bilineare non degenere $\circ{:}V\times V\to C$. La forma si estende a forme bilineari non degeneri per ogni r $\bigwedge^r V\times\bigwedge^r V\longrightarrow C$ tali che $(u_1\wedge\cdots\wedge u_r)\circ(v_1\wedge\cdots\wedge v_r)=\det(u_i\circ v_j)$; e ad una forma bilineare non degenere $\bigwedge V\times\bigwedge V\longrightarrow C$ che si restringe alle precedenti.

Se $x,y\in\bigwedge V$ allora $y\lrcorner x$ è definito da $z\circ(y\lrcorner x)=(z\wedge y)\circ x$ per ogni $z\in\bigwedge V$. Se esistono basi ortonormali definiamo l'applicazione $*{:}\bigwedge^r V\longrightarrow\bigwedge^{n-r}V$ che manda x in $*x=x\lrcorner v_N=x\lrcorner(v_1\wedge$

$\cdots\wedge v_n)$; si tratta di un isomorfismo di spazi vettoriali tale che $(*x)\circ(*y)=x\circ y$, $x\wedge(*x)=v_N$, $x\wedge(*y)=(x\circ y)v_N$ e $*(*x)=(-)^{r(n-r)}x$.

Se $V=V_3(\mathbb{R})$ euclideo, allora $u\wedge v=*(u\wedge v)$ (il primo termine è il prodotto vettore, nel secondo c'è il prodotto esterno).

Se $V=V_2(\mathbb{R})$ con v_1,v_2 base ortonormale, u,v coppia di vettori (equiorientata con la base data) abbiamo $cos\vartheta(u,v)=\frac{u\circ v}{\|u\|\|v\|}$ e $sin\vartheta(u,v)v_1\wedge v_2=\frac{u\wedge v}{\|u\|\|v\|}$.

Vettori Puri. Sia V uno spazio vettoriale su C; se $U\leqslant V$, allora la sotto-C-algebra di $\bigwedge V$ generata da U è canonicamente isomorfa a $\bigwedge U$. Un elemento $x\in\bigwedge^r V$ si dice puro o completamente riducibile se $x=v_1\wedge\cdots\wedge v_r$ con $v_i\in V$. Se $x\in\bigwedge^r V$, allora $W=\{y^*\lrcorner x|y^*\in\bigwedge^{r-1}V^*\}$ è il minimo sottospazio di V tale che $x\in\bigwedge^r W$.

Sia $v_1,\dots,v_n$ una base di V, $x\in\bigwedge^r V$. Risulta che x è puro sse $x^\vee\in\bigwedge^{n-r}V^*$ lo è; in particolare sono puri tutti gli elementi di $\bigwedge^0 V$, $\bigwedge^1 V$, $\bigwedge^{n-1}V$ ed $\bigwedge^n V$. Per gli indici intermedi: x è puro sse $(y^*\lrcorner x)\wedge x=0$ per ogni $y^*\in\bigwedge^{r-1}V^*$; o anche sse $v_S^*((v_R^*\lrcorner x)\wedge x)=0$ per ogni R ed S di cardinalità $r-1$ ed $r+1$ rispettivamente (ma si possono escludere i casi $R\subseteq S$, banali).

Sono puri gli $x=\sum_I p_I v_I\in\bigwedge^r V$ che soddisfano le relazioni di Grassmann: $\sum_{i\in S\smallsetminus R}\epsilon_{i,R}\epsilon_{i,S\smallsetminus i}p_{R\cup i}p_{S\smallsetminus i}$ con le limitazioni precedenti su R ed S.

Se la caratteristica di C non è 2, allora $x\in\bigwedge^2 V$ è puro sse $x\wedge x=0$.

Se $x\in\bigwedge^r V$, definiamo l'annullatore di x come $\mathrm{ann}(x)=\{v\in V|v\wedge x=0\}$, che risulta un sottospazio di V di dimensione limitata da $\dim_C\mathrm{ann}(x)\leqslant n-r$. Allora x è puro sse la dimensione è $n-r$, e se $x=v_1\wedge\cdots\wedge v_r$, allora $\mathrm{ann}(x)=\langle v_1,\cdots,v_r\rangle$.

Grassmanniane.

Sia C un corpo. Definiamo $\mathbb{G}_{n,r}(C)=\{L\leqslant\mathbb{P}^n(C)|\dim(L)=r\}$ la grassmanniana delle sottovarietà lineari di dimensione r di $\mathbb{P}^n(C)$. In particolare $\mathbb{G}_{n,0}(C)\cong\mathbb{P}^n(C)$ (punti) e $\mathbb{G}_{n,n-1}(C)\cong\mathbb{P}^n(C)^*$ (iperpiani).

Se V è spazio vettoriale su C di dimensione $n+1$, definiamo $\mathbb{G}_r(V)=\{W\leqslant V|\dim_C W=r\}$. Abbiamo un morfismo naturale $\mathbb{G}_r(V)\to\mathbb{P}(\bigwedge^r V)$ dato da $U=\langle u_1,\dots,u_r\rangle\mapsto u_1\wedge\dots\wedge u_r$.

Risulta $\mathbb{G}_{n,r}(C)\cong\mathbb{G}_{r+1}(V)\subseteq\mathbb{P}^N(C)$ ove $N=\binom{n+1}{r+1}-1$, e l'immersione è definita dalle relazioni di grassmann, dunque varietà algebrica di $\mathbb{P}^N(C)$.

Se $L=Q_1\vee\cdots Q_r$ con $Q_i=\sum_j x_{j,i}v_j$ allora le coordinate del punto corrispondente in $\mathbb{P}^N(C)$ (coordinate plúckeriane di L) sono $[p_I]=\langle\sum_I p_I v_I\rangle$ ove p_I è il minore di ordine $r+1$ della matrice $(x_{j,i})$ ottenuto usando le righe di indici in I.

Risulta che $\mathbb{G}_{n,r}(C)$ e $\mathbb{G}_{n,n-r}(C)$ sono proiettivamente equivalenti (cioè ...). Per ogni $L,M\in\mathbb{G}_{n,r}(C)\subseteq\mathbb{P}^N(C)$, esiste una proiettività F di $\mathbb{P}^N(C)$ tale che $F(\mathbb{G}_{n,r}(C))\subseteq\mathbb{G}_{n,r}(C)$ e $FL=M$.

$\mathbb{G}_{n,r}(C)$ è varietà irriducibile non singlolare di $\mathbb{P}^N(C)$ di dimensione $(n-r)(r+1)$.

Rette dello spazio. Consideriamo $\mathbb{G}_{3,1}(C)\subseteq\mathbb{P}^5(C)$. Le relazioni di Plücker si riducono a $p_{01}p_{23}-p_{02}p_{13}+p_{03}p_{12}=0$; definiamo la matrice

$$Q=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

la forma bilineare $\psi(p,q)=q^tQp$ e la forma quadratica $\varphi(p)=\frac{1}{2}p^tQp$.

$\mathbb{G}_{3,1}(C)$ coincide con la quadica di equazione $\varphi(p)=0$. Due rette di coordinate plückeriane p e q sono complanari o sghembe a seconda che $\psi(p,q)=0$ o $\neq0$.

In particolare $\mathbb{G}_{3,1}(C)$ contiene rette (e.g. i fasci di rette in un fissato piano di centro un punto) e piani (e.g. le stelle di rette per un punto, oppure le rette di un fissato piano), ed ha indice 2.

I sistemi lineari di rette di $\mathbb{P}^3(C)$ sono gli insiemi del tipo $L\cap\mathbb{G}_{3,1}(C)$ con L varietà lineare di $\mathbb{P}^5(C)$. Supponiamo C algebricamente chiuso (è sufficiente che ogni elemento sia un quadrato).

Se $\dim L=4$, si hanno equazioni $\psi(a,p)=0$ con a fissato; si tratta delle rette che intersecano una fissata retta se $\varphi(a)=0$, oppure delle rette fisse di un sistema nullo se $\varphi(a)\neq0$.

Se $\dim L=3$, si hanno equazioni $\psi(a,p)=0$ e $\psi(b,p)=0$ con a e b indipendenti; vedendo le intersezioni di $a\vee b$ con la quadrica di Plücker si distinguono tre casi possibili: le rette che incidono due rette sghenbe date $(\varphi(a)=\varphi(b)=0\neq\psi(a,b))$, le rette incidenti due rette complanari $(\varphi(a)=\varphi(b)=\psi(a,b)=0)$, le rette fisse di un sistema nullo complanari con una fissata $(\varphi(a)=\psi(a,b)=0\neq\varphi(b))$.

Se $\dim L=2$, si hanno equazioni $\psi(a,p)=0$, $\psi(b,p)=0$ e $\psi(c,p)=0$ con a, b e c indipendenti; vedendo le intersezioni di $a\vee b\vee c$ con la quadrica di Plücker si distinguono i seguenti casi: le rette di un fissato piano (se $a\vee b\vee c\subseteq\mathbb{G}_{3,1}(C)$), le rette che si appoggiano a tre rette date (se $(a\vee b\vee c)\cap\mathbb{G}_{3,1}(C)$ è quadrica irriducibile o retta doppia), le rette fisse di un sistema nullo che si appoggiano a due date (se $(a\vee b\vee c)\cap\mathbb{G}_{3,1}(C)$ è una doppia retta).