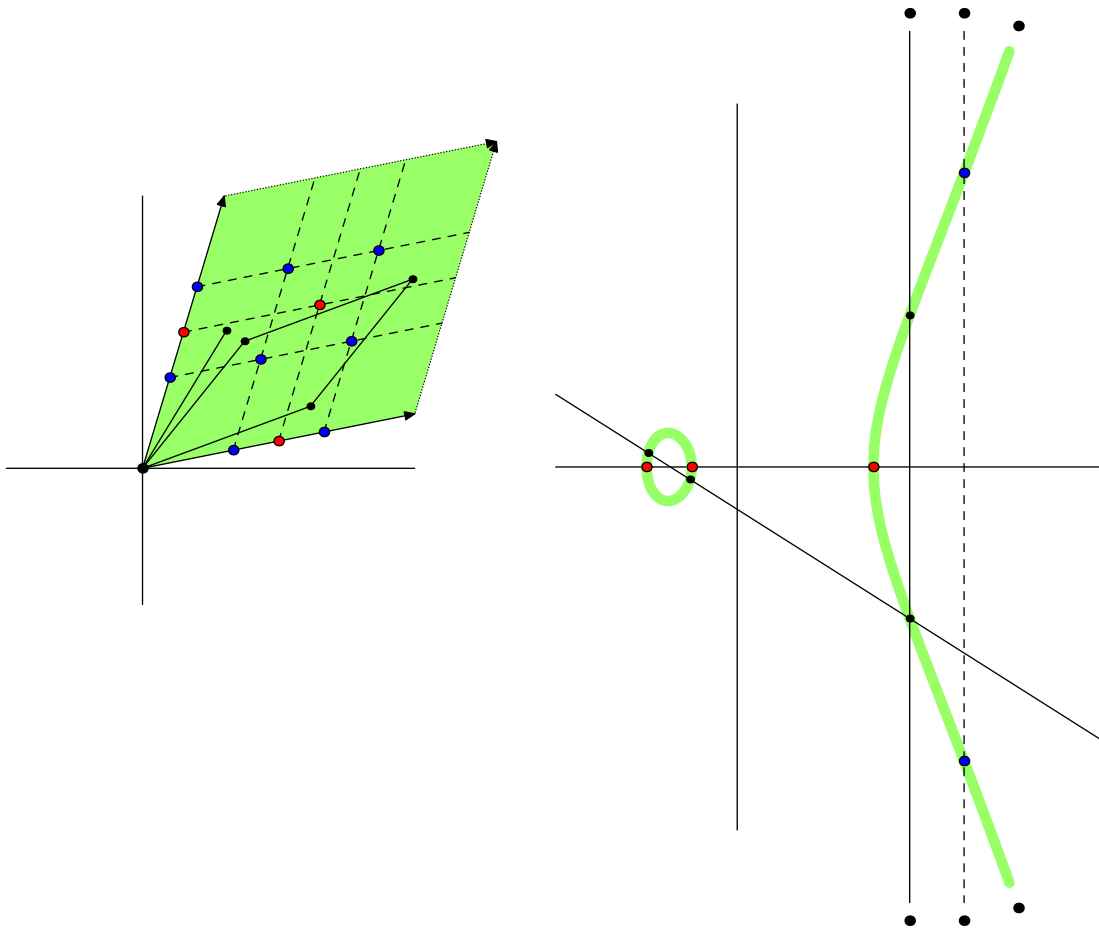


Maurizio Cailotto



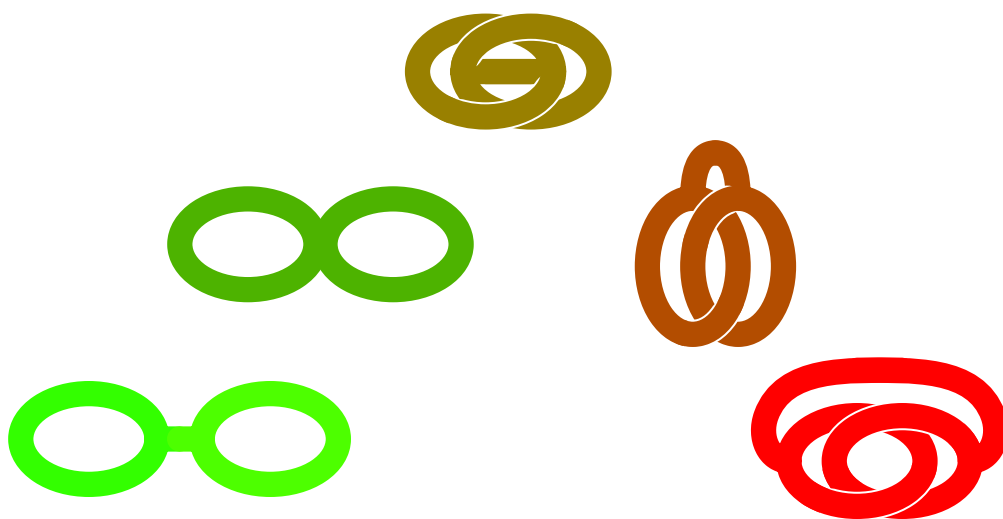
SdRc
Superficie di Riemann compatte
aa2006/7

Avvertenza. Questo testo è stato distribuito nell'anno accademico 2006/07 per il corso di Superficie di Riemann (6 CFU, 48 ore) del Corso di Studi in Matematica dell'Università di Padova. Una versione pdf si può ottenere dalla mia pagina web: <http://www.math.unipd.it/~maurizio/>

gennaio 2007

Da dove viene e dove va questo testo. Essenzialmente non vi è nulla di originale, se non un lavoro di riordino di conoscenze classiche per le quali consultavo spesso i libri di A.Cassa, H.M.Farkas, O.Forster, Ph.A.Griffiths, F.Kirwan, R.Miranda, D.Mumford, R.Narasimhan, E.Reyssat, ... e anche altri che ora non ricordo. Naturalmente, sono miei tutti gli errori, e ringrazio fin d'ora chi volesse segnalarli...

Info tecniche. Questo testo è stato scritto in Plain $\text{T}_\text{E}\text{X}$, e le figure state prodotte usando **MetaPost**. Siano ringraziati DEK e JDH. La figura iniziale vorrebbe visualizzare la corrispondenza tra tori e curve ellittiche; quella sotto come passare da una configurazione ad un'altra di un bitoro.



Copyright. Tutti i diritti di questo testo sono riservati all'autore (includere le eventuali edizioni precedenti). Non ne è consentito alcun uso a scopi commerciali. Sono consentite la riproduzione e la circolazione in formato cartaceo o su supporto elettronico portatile ad esclusivo uso scientifico, didattico o documentario, purché il documento non venga alterato in alcun modo, ed in particolare mantenga le corrette indicazioni di data e fonte originale e la presente nota di copyright.

Indice

Capitolo O. Preliminari a Geometria Variabile	1
1. Oggetti Geometrici.	1
2. Funzioni e Mappe.	3
3. Problema.	3
Capitolo I. Superficie reali compatte.	5
1. Superficie reali compatte: definizione, esempi.	5
2. Triangolazioni e Caratteristica di Eulero-Poincaré.	7
3. Genere Topologico e Classificazione.	9
4. Rivestimenti ramificati e Teorema di Riemann-Hurwitz.	12
5. Genere di Curve Algebriche Piane Complesse: formule di Plücker.	13
Capitolo II. Superficie di Riemann.	17
0. Richiami di Analisi Complessa.	17
1. Superficie di Riemann, Funzioni e Mappe.	19
2. Esempi: sfera di Riemann.	21
3. Esempi: tori complessi.	23
4. Esempi: curve algebriche complesse.	32
5. Esempi: superficie di germi olomorfi?	32
6. Esempi: curve modulari?	32
Capitolo III. Teorema di normalizzazione (desingularizzazione).	33
1. Struttura locale delle singolarità.	33
2. Teorema di desingularizzazione.	34
3. Applicazioni ed Esempi.	35
Capitolo IV. Teorema di Riemann-Roch.	37
0. Differenziali.	37
1. Divisori sulle Superficie di Riemann Compatte.	39
2. Spazi di Funzioni e Differenziali associati a Divisori (enunciato di Riemann-Roch).	42
3. Sistemi lineari e mappe proiettive associate a Divisori.	44
4. Sistemi molto ampi.	46
5. Sistemi canonici (e SdR ipergeometriche).	47
6. Classificazione di SdRc per generi piccoli.	49
7. Equivalenza tra SdRc e curve algebriche complesse?	51
8. Teorema di Riemann-Roch (dimostrazione).	51
9. Divisori Speciali e Teorema di Clifford?	54
10. Punti di inflessione e di Weierstrass, Automorfismi?	55
11. Cenni sugli spazi di moduli	55
Capitolo V. Varietà Jacobiane di Superficie di Riemann compatte.	57
0. Omologia delle superficie.	57
1. Varietà Jacobiana di una Superficie di Riemann.	58
2. Mappa di Abel-Jacobi.	59
3. Teoremi di Abel e di Jacobi.	59
4. Divisori Theta e teorema di Riemann?	60
5. Teorema di Torelli?	61

Capitolo O

Preliminari a Geometria Variabile

In questo capitolo preliminare richiameremo un importante risultato di Analisi Matematica come motivazione per una strategia di definizione degli oggetti di interesse della Geometria in generale.

1. Oggetti Geometrici.

Ricordiamo l'importante risultato di Analisi Matematica:

1.1. TEOREMA (DEL DINI, O DELLA FUNZIONE IMPLICITA). *Il sottinsieme di \mathbb{R}^2 descritto da $f(x, y) = 0$, con f funzione differenziabile, si può scrivere localmente come grafico di una funzione nell'intorno di ogni suo punto in cui $\nabla f(x, y) \neq 0$. Precisamente: se $f(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \neq 0$, allora esistono intorno U di x_0 in X e V di y_0 in Y , ed esiste una funzione $\varphi : U \rightarrow V$ tali che $f(x, y) = 0$ se e solo se $y = \varphi(x)$ (per $x \in U$ e $y \in V$), cioè*

$$\{(x, \varphi(x)) : x \in U\} = \{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = 0\} .$$

Inoltre tale φ è derivabile e risulta

$$\frac{d}{dx} \varphi(x_0) = - \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, \varphi(x_0))}$$

(come risulta “subito” differenziando totalmente $f(x, \varphi(x)) = 0$).

1.1.1. Il teorema si estende a funzioni di più variabili usando come ipotesi la massimalità del rango della matrice Jacobiana.

1.1.2. Il teorema si estende a funzioni di variabili complesse, usando ipotesi e conclusioni di differenziabilità in senso complesso.

1.1.3. Una delle osservazioni importanti da fare a proposito del risultato citato, è che un oggetto abbastanza complicato (quale l'insieme degli zeri di una funzione con qualche proprietà di differenziabilità) si comporta *localmente* come un oggetto decisamente più semplice (il grafico di una funzione differenziabile). Questo suggerisce una buona strategia per la definizione di oggetti geometrici usando come oggetti base certi tipi speciali e semplici di quegli stessi oggetti.

1.2. MODELLI LOCALI E OGGETTI GLOBALI. Chiamiamo “oggetti locali ammissibili” una certa classe di oggetti geometrici, e “mappe ammissibili” una certa classe di mappe tra oggetti locali ammissibili. Per noi vi saranno essenzialmente tre tipi di questi oggetti, che daranno luogo a tre tipi di geometrie:

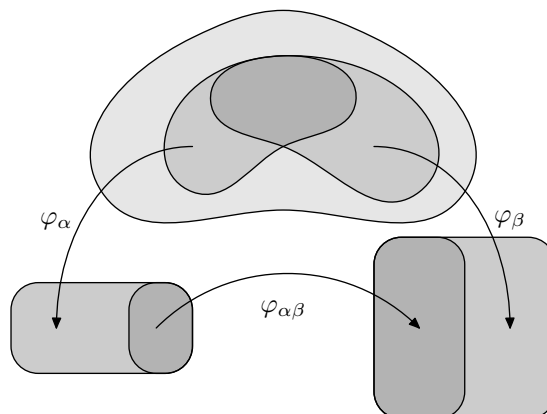
- (1) aperti di \mathbb{R}^n e mappe differenziabili di classe \mathcal{C}^m per $m \geq 0$ (geometria reale di classe \mathcal{C}^m);
- (2) aperti di \mathbb{C}^n e mappe differenziabili in senso complesso (geometria analitica complessa o olomorfa);
- (3) aperti (di Zariski) di varietà algebriche in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ e mappe razionali tra esse (geometria algebrica complessa).

1.2.1. Una volta decisi gli oggetti locali ammissibili per una certa geometria, definiamo gli oggetti ammissibili per quella geometria nel modo seguente: *sono gli spazi topologici X (con eventualmente fissate condizioni) che ammettono un ricoprimento fatto di aperti U_α ciascuno dei quali omeomorfo (in quanto spazio topologico) a un oggetto locale ammissibile V_α tramite $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, e tali inoltre che ogni qual volta due aperti del ricoprimento si intersecano, le mappe di transizione tra oggetti locali ammissibili che ne vengono indotte*

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

siano mappe ammissibili.

Ecco la nostra versione del classico disegno:



È chiaro che affinché una tale definizione sia ben posta è necessario che gli oggetti locali ammissibili e le mappe ammissibili abbiano certe proprietà di stabilità (per esempio: aperti di oggetti locali ammissibili devono essere ancora oggetti locali ammissibili; composizione di mappe ammissibili deve essere ammissibile, e simili ovvie proprietà).

1.2.2. CARTE E ATLANTI. Di solito, mutuando una terminologia geografica, le mappe φ_α si chiamano le carte di X , e la collezione delle carte di un ricoprimento aperto si chiama un atlante di X . Un atlante massimale per l'ordine naturale tra gli atlanti (restrizione delle carte ad aperti più piccoli) si chiama una struttura geometrica su X ; è chiaro che per dare una struttura geometrica è sufficiente dare un atlante, cioè le carte di un ricoprimento.

1.2.3. FUNZIONI DI TRANSIZIONE. Le mappe $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ sono dette mappe di transizione dell'atlante, e si possono usare per trasportare proprietà e definizioni dagli oggetti locali ammissibili agli oggetti ammissibili di quella geometria: ogni proprietà o definizione invariante per queste mappe ammette una estensione.

1.2.4. ATTENZIONE. Naturalmente ogni oggetto locale ammissibile è anche ammissibile (atlante con una unica carta...), ma le proprietà globali degli oggetti ammissibili possono essere molto diverse da quelle dei modelli locali; per esempio un oggetto può essere compatto come spazio topologico, anche se nessun modello locale lo è. Classificare gli oggetti che si ottengono usando questo tipo di definizioni è spesso difficile se non impossibile.

1.3. VEDIAMO ALCUNI CASI IMPORTANTI PER IL NOSTRO CORSO.

1.3.1. VARIETÀ REALI. Una varietà reale (di classe \mathcal{C}^n) è uno spazio topologico separato (o di Hausdorff: ogni due punti distinti hanno interni disgiunti) a base numerabile dotato di un atlante verso aperti di \mathbb{R}^m con mappe di transizione differenziabili (di classe \mathcal{C}^n).

1.3.2. VARIETÀ ANALITICHE COMPLESSE. Una varietà complessa è uno spazio topologico separato (o di Hausdorff: ogni due punti distinti hanno interni disgiunti) a base numerabile dotato di un atlante verso aperti di \mathbb{C}^m con mappe di transizione differenziabili (in senso complesso, cioè olomorfe; si ricordi che si tratta allora automaticamente di funzioni analitiche, cioè indefinitamente differenziabili e convergenti alla loro serie di Taylor).

1.3.3. VARIETÀ ALGEBRICHE. Una varietà algebrica su un corpo K è uno spazio topologico T_0 (o di Kolmogoroff: per ogni due punti distinti vi è un intorno dell'uno che non contiene l'altro), o T_1 (o di Fréchet: per ogni due punti distinti vi è un intorno di ciascuno che non contiene l'altro) a base numerabile dotato di un atlante verso aperti di varietà algebriche (zeri di polinomi in spazi affini) con mappe di transizione funzioni razionali. Si osservi che in questo caso i modelli ammissibili locali sono in corrispondenza con le algebre finitamente generate su \mathbb{C} , e le mappe ammissibili con le funzioni razionali tra tali algebre (nella direzione opposta): in questo caso il modello locale è quindi puramente algebrico.

1.3.4. Si osservi che una varietà complessa si può riguardare anche come varietà reale, e che una varietà algebrica su \mathbb{R} (risp. su \mathbb{C}) si può riguardare come varietà reale (risp. complessa).

1.4. ESEMPLI.

1.4.1. SPAZI PROIETTIVI. Gli spazi proiettivi ammettono ricoprimenti aperti fatti con spazi affini e mappe di transizione razionali (esplicitare per bene, se non lo si è mai visto): quindi si tratta di varietà algebriche. Si osservi che gli spazi proiettivi sono compatti (in quanto spazi topologici), mentre i modelli locali (spazi affini) non lo sono.

1.4.2. CURVE ALGEBRICHE COMPLESSE LISCE. Le curve algebriche complesse non singolari ammettono un ricoprimento con carte su aperti del piano complesso, e mappe di transizione olomorfe (differenziabili in senso complesso); dunque si tratta di varietà complesse, in particolare anche reali. Si tratta di varietà compatte.

1.4.3. CURVE ALGEBRICHE. Lo stesso vale per curve algebriche complesse qualsiasi, una volta che ne siano tolti i punti singolari (e allora non sono più compatte).

2. Funzioni e Mappe.

2.1. MAPPE TRA OGGETTI GEOMETRICI. Una volta definiti degli oggetti geometrici tramite modelli locali ammissibili (e mappe di transizione ammissibili tra le carte), viene spontaneo definire le mappe ammissibili tra questo tipo di oggetti nel modo seguente: *una mappa continua $f : X \rightarrow Y$ è ammissibile se per un atlante $\{\varphi_\alpha\}$ di X e un atlante $\{\psi_\beta\}$ di Y si ha che tutte le mappe composte $\varphi_\alpha^{-1} \circ f \circ \psi_\beta$ opportunamente ristrette sono mappe ammissibili di modelli locali.*

Di nuovo, la classe di modelli locali ammissibili e delle mappe ammissibili deve essere tale che la definizione sia indipendente dall'atlante scelto, cioè che valga per ogni atlante una volta che vale per uno.

2.2. FUNZIONI. Nei casi che in effetti ci interesseranno durante il corso, vi sono tra i modelli locali dei casi speciali che di solito si dicono “di dimensione uno” (\mathbb{R} per le geometrie reali, \mathbb{C} per la geometria analitica complessa, la retta affine per la geometria algebrica), e le mappe tra un oggetto geometrico X e questo modello locale di dimensione uno si dicono *funzioni su X* , e assumono una rilevanza speciale per studiare gli oggetti stessi.

Per esempio, spesso le mappe $X \rightarrow Y$ tra oggetti geometrici si possono caratterizzare come quelle funzioni continue che per composizione mandano funzioni su Y in funzioni su X .

2.2.1. Vi possono essere più modelli importanti di dimensione uno: per esempio nel caso delle geometrie complesse analitica ed algebrica, anche la retta proiettiva complessa assumerà una importanza strategica.

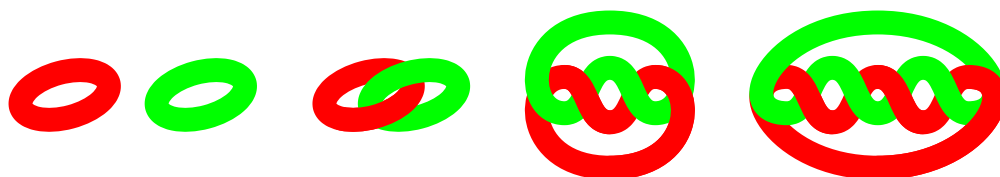
2.2.2. CENNO SUGLI SPAZI ANELLATI? In effetti, nella geometria algebrica moderna si preferisce dare una definizione che include primariamente sia lo spazio topologico che le “funzioni” in qualche senso definite sui suoi aperti, ricorrendo alla nozione di fascio (di anelli) su uno spazio topologico; noi non insisteremo su queste definizioni, che portano velocemente ad un eccesso di risultati formali troppo astratti per un corso elementare.

3. Problema.

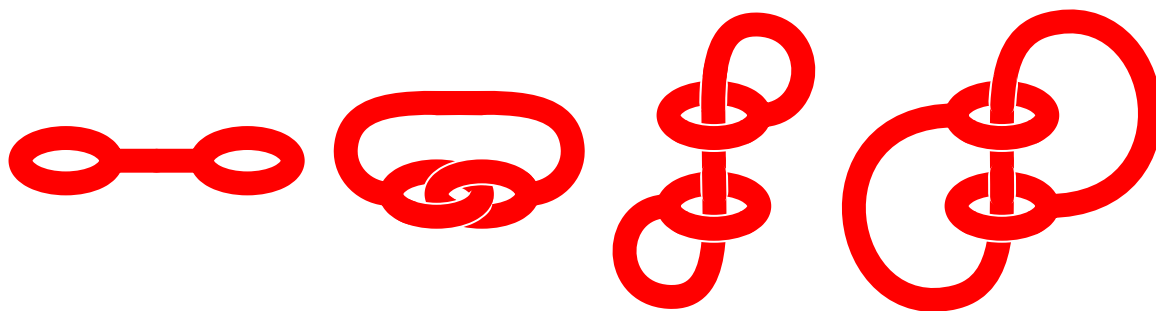
Due superfici reali X, Y immerse in \mathbb{R}^n si dicono omotope, o topologicamente equivalenti, se esiste una applicazione continua $\varphi : [0, 1] \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(0, \cdot)$ sia l'immersione di X in \mathbb{R}^n , $\varphi(1, \cdot)$ sia un omeomorfismo di X su Y , e per ogni t si abbia un omeomorfismo di X in $X_t = \text{im } \varphi(t, \cdot)$. Si tratta di avere un “disegno animato” che trasforma X in Y senza ricorrere a tagli, strappi, cuciture o altri accidenti discontinui.

Si considerino allora le seguenti superficie immerse in \mathbb{R}^3 , e si dica quali sono equivalenti tra loro, e quali no, giustificando le risposte positive tramite qualche fotogramma del “disegno animato”. Come è possibile giustificare delle risposte negative?

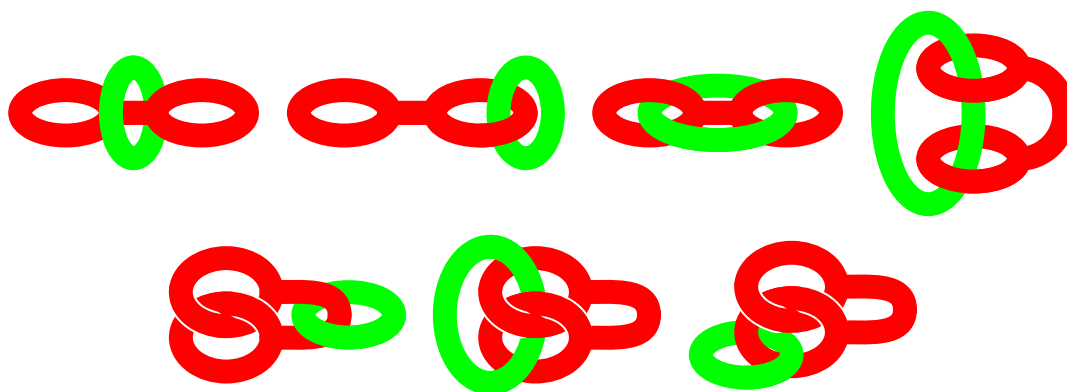
Due tori:



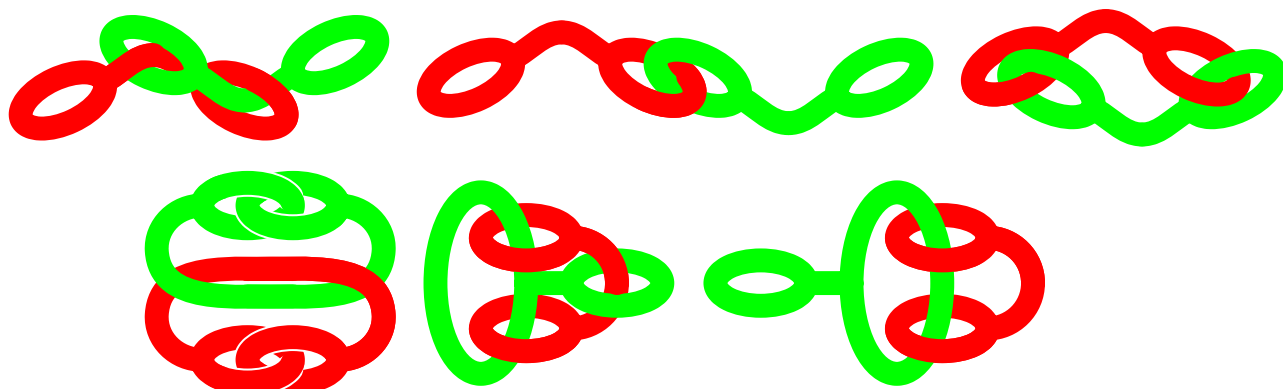
Un bitoro:



Un toro e un bitoro:



Immaginarsi tutte le configurazioni possibili di due bitori tipo quello rosso. Per esempio:



Si osservi invece che tutte le configurazioni precedenti di superficie possono essere “sciolte” in \mathbb{R}^4 : in particolare il miglior strumento per un ladro di biciclette sembra essere una palla aperta di \mathbb{R}^4 .

Capitolo I

Superficie reali compatte.

In questo capitolo presentiamo gli strumenti fondamentali per la classificazione delle superficie reali compatte e introdurremo la nozione di genere topologico, invariante fondamentale della classificazione. Il calcolo del genere è spesso difficile, e noi introdurremo il teorema di Riemann-Hurwitz quale principale strumento per questo, mostrandone l'applicazione al caso di curve algebriche piane complesse.

1. Superficie reali compatte: definizione, esempi.

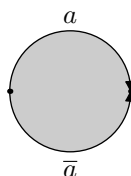
1.1. DEFINIZIONE (SUPERFICIE REALI). Seguendo la filosofia illustrata nel capitolo zero, una superficie reale S è uno spazio topologico separato e connesso localmente omeomorfo ad aperti di \mathbb{R}^2 (oppure a dischi aperti di \mathbb{R}^2) con mappe di transizione differenziabili. La superficie si dirà compatta se lo è in quanto spazio topologico. Una superficie si dirà orientabile se ammette un atlante tale che le mappe di transizione abbiano Jacobiane di determinante positivo in ogni punto; equivalentemente, se ogni cammino chiuso sulla superficie conserva l'orientamento.

1.1.1. Con cammino chiuso intendiamo una mappa φ dall'intervallo chiuso $[0, 1]$ in S tale che $\varphi(0) = \varphi(1)$, con orientamento intendiamo la scelta di un orientamento nello spazio tangente ad S nel punto iniziale (e finale).

1.1.2. NOTA SULLA CONNESSIONE: per comodità abbiamo richiesto che una superficie sia connessa; naturalmente tutto quello che vedremo si applicherebbe anche ad ogni componente connessa di una "superficie reale non connessa".

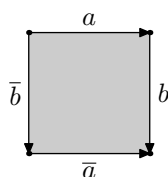
1.2. ESEMPLI. Vediamo subito alcuni esempi fondamentali che saranno i "pezzi base" della classificazione.

1.2.1. SFERA. La sfera \mathbb{S} , come ben noto, è una superficie reale compatta orientabile che si può presentare con un atlante di due carte (le proiezioni stereografiche dai due poli sul piano dell'equatore). Essa si può ottenere identificando in senso "discorde" i due lati di un poligono chiuso formato da due soli lati (un di-agono): si tratta di chiudere con un zip le due semicirconferenze di un cerchio del piano reale.



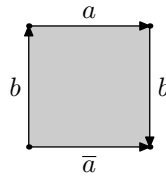
Rappresenteremo questa costruzione con il simbolo $a\bar{a}$ (girando intorno al bordo del poligono, si incontra uno dei due lati in un verso, l'altro nel verso opposto).

1.2.2. TORO. Il toro \mathbb{T} è la superficie reale compatta orientabile che si ottiene identificando i lati di un quadrato secondo il simbolo $ab\bar{a}\bar{b}$;



identificando prima una coppia di lati si ottiene un cilindro \mathcal{C} , e successivamente si identificano i due bordi rimanenti. Un atlante reale per il toro si può ottenere usando tre carte, quali?

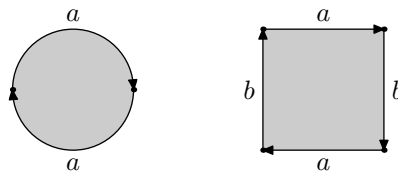
1.2.3. OTRE DI KLEIN. L'otre di Klein \mathbb{K} è la superficie reale compatta non orientabile che si ottiene identificando i lati di un quadrato secondo il simbolo $ab\bar{a}b$;



come per il toro, identificando i due lati a si ottiene un cilindro, ma poi i due bordi rimanenti sono identificati con l'orientamento opposto che per il toro. Atlante? Si veda per divertimento: <http://www.kleinbottle.com/>, ma si faccia attenzione in quanto il genere dichiarato è sbagliato...

È importante osservare che l'otre di Klein si può costruire prima identificando i due lati b , il che dà luogo ad una figura \mathcal{M} chiamata nastro di Moebius, e poi identificando i due lati a che nel nastro si sono uniti a formare un circuito chiuso (una circonferenza). Questa costruzione rende chiaro che la superficie non è orientabile, poiché \mathcal{M} contiene un percorso chiuso che inverte l'orientamento.

1.2.4. PIANO PROIETTIVO. Il piano proiettivo (reale) \mathbb{P} è la superficie compatta non orientabile che si ottiene identificando i lati di un di-agono secondo il simbolo aa , oppure i lati di un quadrato secondo il simbolo $abab$;



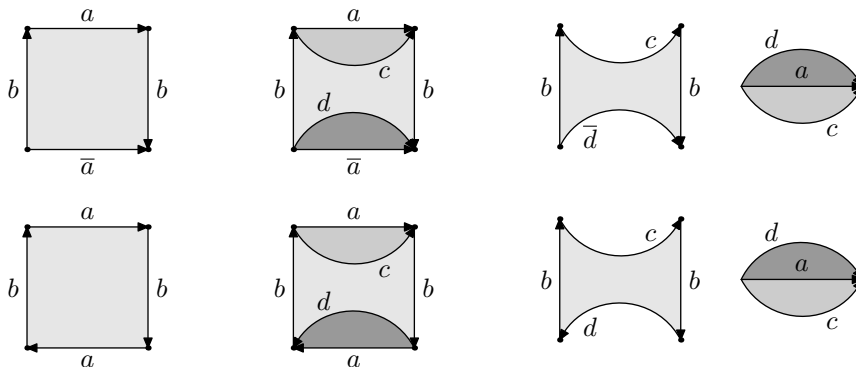
questa seconda costruzione rende chiaro che \mathbb{P} contiene nastri di Moebius, e dunque non è orientabile. Si può descrivere con un ben noto atlante formato di tre piani affini (si tratta del "solito piano proiettivo reale" ottenuto dal disco modulo antipodia del bordo...).

1.3. CHIRURGIA SULLE SUPERFICIE. Gli esempi visti sono stati costruiti partendo da poligoni piani con un numero pari di lati, ed identificandone a coppie i lati; implicitamente abbiamo dato alla superficie risultante la topologia quoziente della relazione di equivalenza che consiste nella identificazione dei lati nel modo via via indicato. Si osservi per inciso che in tutti i casi i vertici del poligono vengono tutti identificati in un unico punto della superficie.

Parleremo di "chirurgia delle superficie" quando passeremo da una rappresentazione di una superficie come "poligono modulo identificazione di lati" ad un'altra tale rappresentazione senza alterarne la topologia e la struttura di superficie reale.

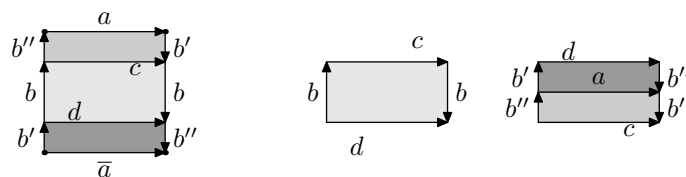
Per esempio possiamo osservare che:

1.3.1. Sia \mathbb{P} che \mathbb{K} si ottengono incollando (in modo diverso) un disco \mathcal{D} ad un nastro di Moebius.



In particolare, togliendo un disco \mathcal{D} a \mathbb{P} (oppure a \mathbb{K}) si ottiene un nastro di Moebius.

1.3.2. L'otre \mathbb{K} si ottiene come unione di due nastri di Möbius.



In particolare si osservi come vengono incollati i bordi dei due nastri per ottenere l'otre.

1.4. SOMMA CONNESSA. L'operazione chirurgica più importante per la classificazione delle superficie reali compatte è la somma connessa. Date due superficie S_1 ed S_2 , la somma connessa $S_1 \# S_2$ si ottiene tramite la costruzione seguente: si sceglie un disco D_i su S_i e un omeomorfismo $\varphi : B_1 \rightarrow B_2$ tra i bordi dei due dischi; allora $S_1 \# S_2$ è la superficie che si ottiene incollando secondo φ i due bordi B_i delle superficie bucate $S_i \setminus D_i$. Scrivere per bene il procedimento. Come si ottiene un atlante per $S_1 \# S_2$ a partire da atlanti di S_1 ed S_2 ?

Vediamo alcune proprietà evidenti (uguaglianza significa essere canonicamente isomorfi):

- 1.4.1.** $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$.
- 1.4.2.** $(S_1 \# S_2) \# S_3 = S_1 \# (S_2 \# S_3)$.
- 1.4.3.** $S \# S = S$ ($\forall S$).

Dunque $\#$ è operazione commutativa ed associativa, con elemento neutro S ; ma non esiste in generale il simmetrico di un fissato elemento S .

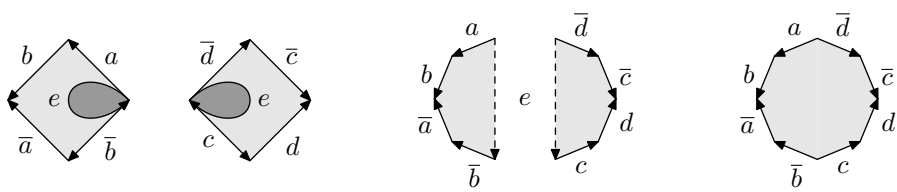
Vediamo alcuni esempi importanti per la classificazione:

1.4.4. $\mathbb{K} = \mathbb{P} \# \mathbb{P}$. L'abbiamo osservato prima: togliendo un disco al piano proiettivo di ottiene un nastro di Möbius, ed incollando due nastri per il bordo si ottiene un'otre di Klein.

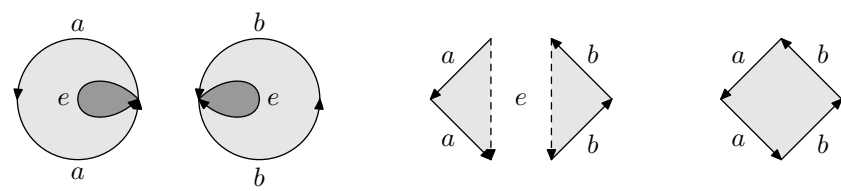
1.4.5. $\mathbb{K} \# \mathbb{P} = \mathbb{T} \# \mathbb{P}$. Questa formula è sorprendente, e si può verificare a partire dalla seguente: $\mathbb{K} \# \mathcal{M} = \mathbb{T} \# \mathcal{M}$, poiché \mathbb{P} si ottiene con opportune identificazioni da \mathcal{M} . Il punto essenziale è che sia \mathbb{K} sia \mathbb{T} si ottengono da cilindri per identificazione dei bordi (in due modi diversi), e la somma amalgamata di qualunque superficie S con un cilindro è semplicemente la superficie stessa a cui sono stati rimossi due dischi; questi due dischi sono poi incollati per il bordo seguendo le identificazioni richieste.

1.4.6. $\mathbb{T} \# \mathbb{P} = \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P}$. È una conseguenza delle prime due osservazioni. Però non si può "cancellare" \mathbb{P} e scrivere che \mathbb{T} sia $\mathbb{P} \# \mathbb{P}$, altrimenti anche \mathbb{T} e \mathbb{K} sarebbero uguali!

1.4.7. SOMMA CONNESSA DI n TORI. Si può rappresentare come un poligono con $4n$ lati con i bordi identificati secondo la sequenza $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 a_2 b_2 \bar{a}_2 \bar{b}_2 \dots a_n b_n \bar{a}_n \bar{b}_n$. Si può vedere facilmente per induzione a partire dalla seguente costruzione, che serve sia per il caso base che per il passo induttivo:



1.4.8. SOMMA CONNESSA DI n PIANI PROIETTIVI. Si può rappresentare come un poligono con $2n$ lati con i bordi identificati secondo la sequenza $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$. Si può vedere facilmente per induzione a partire dalla seguente costruzione, che serve sia per il caso base che per il passo induttivo:



2. Triangolazioni e Caratteristica di Eulero-Poincaré.

Il triangolo euclideo standard Δ è la regione del piano reale descritta dall'involuppo convesso dei punti O (origine), $O + e_1$, $O + e_2$ (versori degli assi), ovvero $\Delta = \{ \binom{x}{y} : 0 \leq x, y, x+y \leq 1 \}$.

Qualche volta conviene usare triangoli equilateri, nel qual caso si considerano come vertici le tre radici cubiche dell'unità nel piano di Gauss. Scrivere esplicitamente un omeomorfismo del triangolo euclideo nel triangolo equilatero standard.

Se S è una superficie, un triangolo di S è una mappa iniettiva e continua $\tau : \Delta \rightarrow S$ che sia un omeomorfismo sull'immagine. Chiamiamo lati e vertici dei triangoli di S le immagini dei lati e dei vertici dei corrispondenti triangoli euclidei.

2.1. DEFINIZIONE-TEOREMA (TRIANGOLAZIONI). Una triangolazione di una superficie reale S è una collezione di triangoli di S tale che:

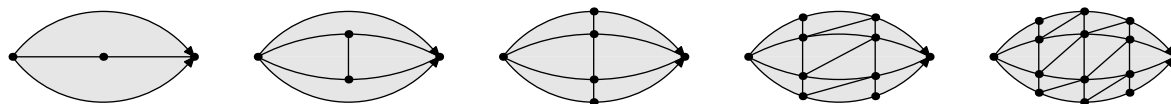
- (1) ogni punto P di S che non sia un vertice e non appartenga ad un lato, appartiene ad un unico triangolo che ne è un intorno;
- (2) ogni punto P di S che non sia un vertice ma appartenga ad un lato, appartiene ad esattamente due triangoli che si intersecano esattamente in quel lato, e la cui unione è un intorno di P ;
- (3) ogni punto P di S che sia un vertice appartiene ad un numero finito di triangoli che sono numerabili in modo tale che ciascuno abbia esattamente un lato in comune con il successivo nell'ordine ciclico, e l'unione di tutti è un intorno di P .

Ogni superficie reale ammette una triangolazione; una superficie è compatta se e solo se ammette una triangolazione finita (e allora tutte lo sono). Vale anche il viceversa in questo senso: uno spazio topologico separato e connesso è una superficie reale se e solo se ammette una triangolazione.

La dimostrazione di questo fatto non è banale. Ovviamente possiamo per definizione ricoprire la superficie S con un insieme (finito se compatta) di (immagini omeomorfe di) dischi chiusi; nel caso che ogni bordo di tali dischi sia diviso in un numero finito di segmenti dai bordi degli altri dischi, il risultato diventa facile: abbiamo a disposizione una "poligonazione" della superficie, e per ottenerne una triangolazione basta suddividere ogni poligono in triangoli. Tuttavia può presentarsi in caso in cui bordi di dischi si incontrano in infiniti punti, e per ricondursi al caso "finito" occorre un argomento delicato di deformazione dei bordi. □

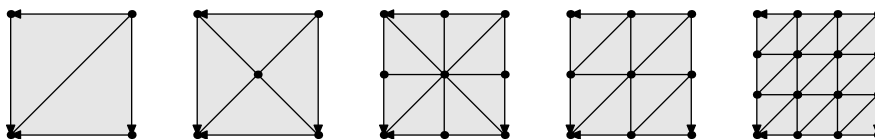
2.2. ESEMPLI.

2.2.1. SFERA. Alcune possibili triangolazioni della sfera vista come di-agono, alcune delle quali non rispettano la nostra definizione:



(si provi a disegnare tali triangolazioni sulla superficie sferica; si contino vertici, lati e triangoli).

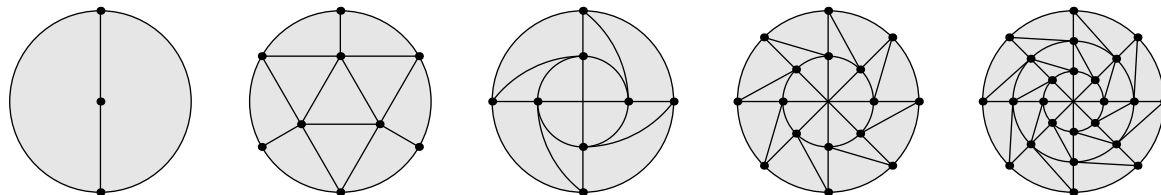
2.2.2. TORO. Alcune possibili triangolazioni della sfera vista come di-agono, alcune delle quali non rispettano la nostra definizione:



(si provi a disegnare tali triangolazioni sulla superficie torica; si contino vertici, lati e triangoli).

2.2.3. OTRE DI KLEIN. Esercizio.

2.2.4. PIANO PROIETTIVO. Alcune possibili triangolazioni della sfera vista come di-agono, alcune delle quali non rispettano la nostra definizione:



(si contino vertici, lati e triangoli). Si osservi che togliendo il triangolo centrale alla prima triangolazione si ottiene un nastro di Mœbius.

2.2.5. SOMME CONNESSE. Facile esercizio.

2.3. DEFINIZIONE-TEOREMA (CARATTERISTICA DI EULERO-POINCARÉ). *Data una superficie S , e una sua triangolazione \mathcal{T} , siano t il numero di triangoli, e il numero di lati, v il numero di vertici. La caratteristica di Eulero-Poincaré di S è per definizione l'intero $\chi(S) = t - e + v$. Tale intero non dipende dalla triangolazione scelta, ma solo dalla superficie S .*

Infatti, date due triangolazioni di una superficie, possiamo trovarne un'altra che è un raffinamento di entrambe, nel senso che ogni triangolo di ciascuna delle due è formato dalla unione di triangoli del raffinamento comune (questo fatto non è proprio banale, e richiede un argomento simile a quello del teorema precedente, per evitare che un lato sia diviso in infiniti segmenti). Di conseguenza, basta confrontare le caratteristiche di Eulero-Poincaré di una triangolazione e di un suo raffinamento. Ma ogni raffinamento si ottiene con un numero finito di operazioni simili ai seguenti tipi:

- (1) aggiungere un nuovo vertice interno ad un triangolo, e come lati i segmenti dal nuovo vertice ai tre vertici del triangolo: vi sono un vertice, tre lati e due triangoli più di prima;
 - (2) aggiungere un nuovo vertice interno ad un lato, e due lati che congiungono il nuovo vertice con i vertici opposti a quel lato dei due triangoli che lo condividono: vi sono un vertice, tre lati (dove?) e due triangoli più di prima;
 - (3) aggiungere un nuovo vertice interno ad un lato per i tre lati di un triangolo, il triangolo che li congiunge, e tre nuovi lati che congiungono i nuovi vertici ai vertici opposti dei tre triangoli adiacenti: vi sono tre vertici, nove lati e sei triangoli più di prima;
- e in ogni caso si vede che la caratteristica di Eulero-Poincaré non è variata.

Una alternativa è di mostrare che si può passare da una triangolazione di S ad una qualsiasi altra tramite un numero finito di "poligonazioni", con operazioni che non modificano il valore della caratteristica di Eulero-Poincaré (estendendo la definizione nel modo ovvio alle poligonazioni di una superficie). \square

2.4. ESEMPLI.

2.4.1. SFERA. $\chi(\mathbb{S}) = 2$.

2.4.2. TORO. $\chi(\mathbb{T}) = 0$.

2.4.3. OTRE DI KLEIN. $\chi(\mathbb{K}) = 0$.

2.4.4. PIANO PROIETTIVO. $\chi(\mathbb{P}) = 1$.

2.4.5. SOMME CONNESSE. $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$. In particolare si ha:

$$\chi(\#_{i=1}^n \mathbb{T}) = 2 - 2n,$$

$$\chi(\#_{i=1}^n \mathbb{P}) = 2 - n,$$

$$\chi(\mathbb{P} \# (\#_{i=1}^n \mathbb{T})) = 1 - 2n,$$

$$\chi(\mathbb{K} \# (\#_{i=1}^n \mathbb{T})) = -2n.$$

2.5. PROBLEMA: POLIEDRI REGOLARI. Usando la nozione di triangolazione, e sapendo che la caratteristica di Eulero-Poincaré della sfera è 2, si mostri che vi sono solo cinque poliedri regolari (tetraedro: 4 triangoli, cubo: 6 quadrati, octaedro: 8 triangoli, dodecaedro 12 pentagoni, icosaedro: 20 triangoli) specificando quali poligoni regolari si usano, quanti, e quanti si incontrano in ogni vertice. Si veda per esercizio: <http://darkwing.uoregon.edu/~koch/java/FourD.html>

3. Genere Topologico e Classificazione.

3.1. DEFINIZIONE (GENERE TOPOLOGICO). *Data una superficie S , definiamo il genere topologico di S come l'intero dato da:*

$$g(S) = \begin{cases} \frac{2 - \chi(S)}{2} & \text{se } S \text{ orientabile} \\ 2 - \chi(S) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque abbiamo che

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g(S) & \text{se } S \text{ orientabile} \\ 2 - g(S) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3.2. ESEMPLI.

3.2.1. SFERA. $g(\mathbb{S}) = 0$.

3.2.2. TORO. $g(\mathbb{T}) = 1$.

3.2.3. OTRE DI KLEIN. $g(\mathbb{K}) = 2$.

3.2.4. PIANO PROIETTIVO. $g(\mathbb{P}) = 1$.

3.2.5. SOMME CONNESSE. $g(S_1 \# S_2) = g(S_1) + g(S_2)$ se le superficie sono entrambe orientabili o entrambe non orientabili; $g(S_1 \# S_2) = 2g(S_1) + g(S_2)$ se S_1 è orientabile e S_2 è non orientabile (nel qual caso $S_1 \# S_2$ non è orientabile). In particolare:

$$g(\#_{i=1}^n \mathbb{T}) = n,$$

$$g(\#_{i=1}^n \mathbb{P}) = n,$$

$$g(\mathbb{P} \# (\#_{i=1}^n \mathbb{T})) = 2n + 1,$$

$$g(\mathbb{K} \# (\#_{i=1}^n \mathbb{T})) = 2n + 2.$$

3.3. TEOREMA (DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE REALI COMPATTE). *A meno di omeomorfismi, le superficie reali compatte si classificano nel modo seguente: sfera (rappresentazione poligonale $a\bar{a}$, genere 0), somma connessa di n tori (rappresentazioni poligonali $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_n b_n \bar{a}_n \bar{b}_n$, genere n), somma connessa di n spazi proiettivi (rappresentazioni poligonali $a_1 a_1 \cdots a_n a_n$, genere n). Equivalentemente: ogni superficie reale compatta orientabile è una sfera oppure la somma connessa di n tori, e ogni superficie reale compatta non orientabile è la somma connessa di una superficie reale orientabile e di un piano proiettivo o di un'otre di Klein.*

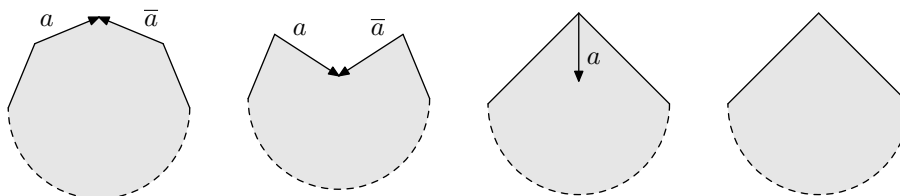
La dimostrazione di questo teorema è un esercizio di chirurgia delle superficie; bisogna mostrare che ogni superficie reale compatta si può rappresentare con uno dei poligoni (modulo identificazione dei lati) che abbiamo visto essere delle forme canoniche per le somme connesse di tori e piani proiettivi. Procediamo in cinque passi:

- (1) *Nel primo, si sceglie una triangolazione della superficie, e se ne ottiene un modello formato da un poligono piano con un numero pari di lati i quali devono essere a due a due identificati per ottenere la superficie di partenza.* Questo si ottiene scegliendo un ordine nell'insieme dei triangoli tale che l' i -esimo triangolo τ_i abbia un lato in comune, sia e_i , con almeno uno dei precedenti. Allora è chiaro che possiamo disporre sul piano i triangoli euclidei (equilateri) in modo da rispettare la comunanza dei lati corrispondenti, ed ottenere una figura poligonale piana come detto, e tale che la superficie di partenza si ottiene come quoziente topologico del poligono (la mappa dal poligono alla superficie è chiusa, poiché è mappa continua da un compatto ad uno spazio separato, quindi la superficie ha la topologia quoziente). Ora abbiamo un poligono con un numero pari di lati da identificare a due a due in uno dei due possibili modi; scegliendo un senso di percorrenza del bordo possiamo rappresentare la figura tramite una sequenza di lettere

$$abb\bar{c}\bar{a}\bar{d}\bar{c}de\bar{f}\bar{e}\bar{f}\bar{g}\bar{g}...$$

dove ogni lettera compare due volte e può comparire semplice o soprallineata a seconda che si presenti nel verso di percorrenza o meno. Dobbiamo quindi, tramite chirurgia, ridurre questo simbolo a uno di quelli standard. Questo si fa usando induzione sul numero di lati, per esempio con la strategia seguente.

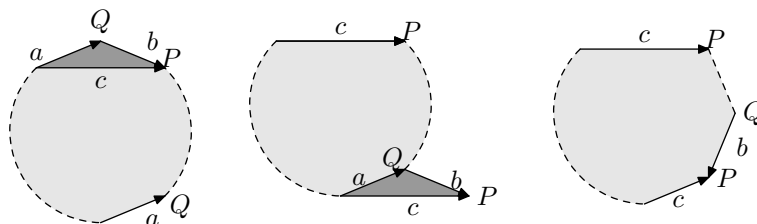
- (2) *Nel secondo, si eliminano tutte le coppie adiacenti discordi, se il poligono ha almeno quattro lati.* Infatti ogni coppia di lati adiacenti del tipo $a\bar{a}$ può essere eliminata nel modo ovvio, incollando i due lati:



Se così facendo ci si riduce ad un poligono con due lati, otteniamo una sfera (poligono $a\bar{a}$), oppure un piano proiettivo (poligono aa), e abbiamo finito.

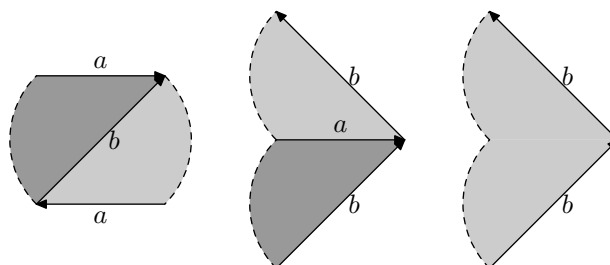
- (3) *Nel terzo, fa sì che tutti i vertici del poligono siano identificati in un unico punto della superficie.* Diciamo che due vertici sono equivalenti se vengono identificati nella superficie. Se vi è più di

una classe di equivalenza di vertici, con la seguente operazione:



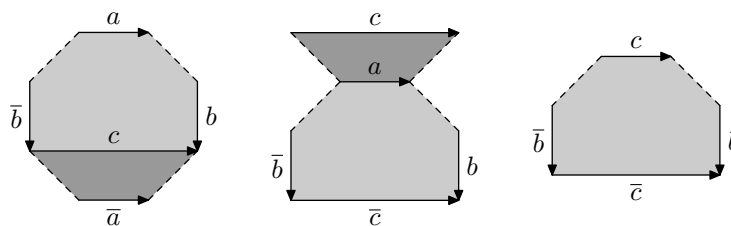
otteniamo un poligono che ha un vertice in più nella classe di P e uno in meno nella classe di Q , ferme restando le altre eventuali classi di equivalenza. Riutilizzando eventualmente il passo (2), si può procedere per induzione sul numero di classi e sul numero di vertici in ogni classe per ottenere il risultato voluto.

- (4) *Nel quarto si rendono adiacenti coppie di lati concordi.* Con la seguente operazione, possiamo rendere adiacenti due lati di una coppia concorde:

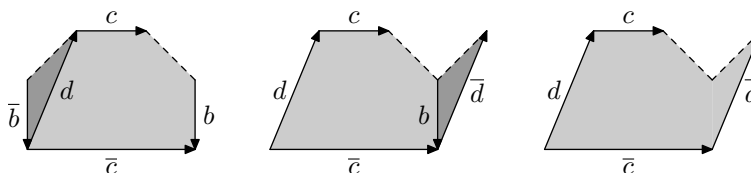


Se dopo aver reso adiacenti tutte le coppie concordi, troviamo solo coppie di lati concordi allora la superficie è la somma connessa di piani proiettivi, e abbiamo terminato.

- (5) *Nel quinto si rendono adiacenti coppie di lati discordi che si separano.* Intanto mostriamo che se si trova una coppia di lati come $\dots a \dots \bar{a} \dots$, allora esiste un'altra coppia discorda che separa la precedente, nel senso che dev'essere nella sequenza $\dots a \dots b \dots \bar{a} \dots \bar{b} \dots$; infatti, in caso contrario gli estremi del lato a non potrebbero mai essere identificati tra loro nella superficie. Ora, con le seguenti operazioni:



seguite da:



possiamo ricondurci ad una situazione in cui i quattro lati sono consecutivi nella sequenza $\dots a\bar{b}\bar{a}b \dots$, fermo restando il resto della sequenza. Ripetendo questo procedimento, possiamo supporre che tutte le coppie di coppie di lati discordi si presentino nella forma standard; ora se non vi sono coppie concordi, si tratta di una somma connessa di tori.

- (*) Resta da trattare il caso in cui si presentino sia coppie concordi, sia coppie discordi. Sostituendo ogni occorrenza di $\mathbb{T}\#\mathbb{P}$ con $\mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}$, possiamo ridurre tutta la sequenza ad una somma connessa di piani proiettivi: in questo modo si ottiene il primo enunciato del teorema. In alternativa, tenendo conto che possiamo sostituire $\mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}$ con $\mathbb{T}\#\mathbb{P}$, ed eventualmente $\mathbb{P}\#\mathbb{P}$ con \mathbb{K} , otteniamo il secondo enunciato del teorema. \square

3.4. TEOREMA (DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE REALI COMPATTE, SECONDA FORMA). *Due superficie reali compatte sono omeomorfe se e solo se sono entrambe orientabili o entrambe non orientabili, e hanno lo stesso genere oppure hanno la stessa caratteristica di Eulero-Poincaré.*

3.5. SIGNIFICATI TOPOLOGICI. In particolare, ogni superficie reale compatta orientabile di genere n è omeomorfa ad una sfera con n manici, oppure a un toro con n buchi (primo significato topologico del genere). E ogni superficie reale compatta non orientabile di genere n è omeomorfa alla somma connessa di un toro con n buchi con un piano proiettivo oppure con un'otre di Klein?

Il genere n di una superficie si può interpretare topologicamente in questi termini:

3.5.1. n è il massimo numero di cammini chiusi disgiunti che si possono togliere da una superficie, facendo in modo che rimanga ancora uno spazio connesso.

3.5.2. $2n$ è il massimo numero di cammini chiusi senza componenti comuni che si possono togliere da una superficie, facendo in modo che rimanga ancora uno spazio connesso.

3.6. PROBLEMA. Studiare la superficie che si ottengono dai seguenti simboli per poligoni:

3.6.1. $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_{n-1} a_n$

3.6.2. $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_{n-1} \bar{a}_n$

3.7. PROBLEMA. Nel caso di superficie compatte non orientabili, che cosa si può dire del significato topologico del genere? In particolare, se il genere è n , quanti "buchi" ha la superficie?

4. Rivestimenti ramificati e Teorema di Riemann-Hurwitz.

4.1. DEFINIZIONE (RIVESTIMENTO RAMIFICATO). Una mappa continua $f : X \rightarrow Y$ di superficie reali è detta un rivestimento (con n fogli) ramificato (lungo E sottinsieme finito di X) se valgono le seguenti condizioni:

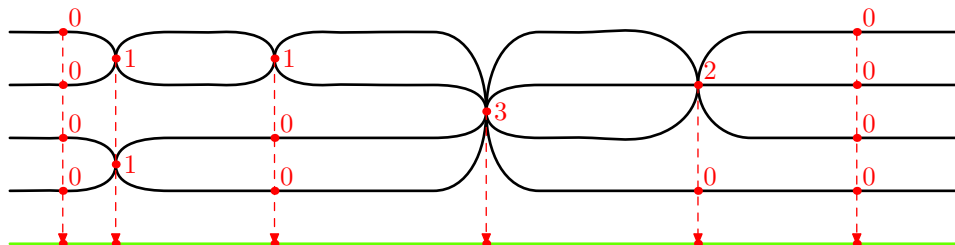
- (1) f è suriettiva, chiusa e a fibre finite;
- (2) f ristretta a $X \setminus E \rightarrow Y \setminus f(E)$ è rivestimento (con n fogli), cioè per ogni $y \in Y \setminus f(E)$ esiste un intorno aperto V tale che $f^{-1}V$ è unione disgiunta di n aperti omeomorfi a V tramite f ("una pila di dischi sopra V ").

4.1.1. Si noti dalla definizione che per ogni $y \in Y$ si ha che la fibra $f^{-1}y$ è finita, con esattamente n elementi se $y \notin f(E)$. Denotiamo con $e(f)$ il numero di fogli del rivestimento $X \setminus E \rightarrow Y \setminus f(E)$.

4.1.2. RAMIFICAZIONE IN UN PUNTO. Per ogni $x \in X$ e per ogni intorno U sufficientemente piccolo di x abbiamo che la restrizione $f|_U : U \rightarrow f(U)$ è un rivestimento fuori di x ; definiamo $e_{x,U}(f)$ il numero di fogli di $f|_U$. Tale funzione a valori interi è decrescente sul filtro degli intorni di x , e quindi diventa stabile per U sufficientemente piccolo: sia $e_x(f)$ tale valore. Diciamo che il punto x è semplice se $e_x(f) = 1$, di ramificazione altrimenti. Definiamo la ramificazione di f in x come $\text{ram}_x(f) = e_x(f) - 1$ (dunque nulla se il punto è semplice).

4.1.3. RAMIFICAZIONE DI f . La ramificazione (totale) di f è definita dalla somma $\text{ram}(f) = \sum_{x \in X} \text{ram}_x(f)$ (si noti che solo $x \in E$ possono dare contributo positivo).

4.1.4. LUOGO DI RAMIFICAZIONE. Per ogni $y \in Y$ abbiamo $f^{-1}y = \{x_1, \dots, x_r\}$ ove $\sum_i e_{x_i}(f) = e(f)$ e $r = \text{ram}_y(f) = e(f) - \sum_i \text{ram}_{x_i}(f)$.



(Il disegno suggerisce un rivestimento ramificato con quattro fogli, specificando la ramificazione in alcuni punti.)

4.1.5. ESEMPI FONDAMENTALI. Si considerino le mappe $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ date da $f_n(z) = z^n$ ristrette al disco unitario chiuso. L'unico punto di ramificazione è l'origine, in cui tutti gli n fogli si incrociano. Cosa succede se consideriamo $f_\infty : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ data da $f_\infty(z) = e^z$?

4.2. TEOREMA (RIEMANN-HURWITZ). *Se $f : X \rightarrow Y$ è un rivestimento ramificato di superficie reali compatte orientabili, allora vale la seguente relazione tra le caratteristiche di Eulero-Poincaré:*

$$\chi(X) = e(f)\chi(Y) - \text{ram}(f)$$

e dunque tra i generi:

$$g(X) = e(f)(g(Y) - 1) + \frac{\text{ram}(f)}{2} + 1$$

(in particolare, la ramificazione è pari).

Infatti, possiamo trovare una triangolazione di Y e una corrispondente triangolazione di X tali che ogni punto di ramificazione in Y sia vertice di esattamente $e(f)$ triangoli tali che le loro antimmagini siano triangoli disgiunti in X eventualmente con un vertice comune. Allora abbiamo $t_X = e(f)t_Y$ per il numero di triangoli, $e_X = e(f)e_Y$ per il numero di lati, e $v_X = e(f)v_Y - \sum_x (e_x(f) - 1)$ per il numero di vertici, da cui segue la formula per la caratteristica di Eulero-Poincaré di X . La formula per il genere ne è una conseguenza immediata. \square

4.2.1. Poiché $e(f) \geq 1$ e $\text{ram}(f) \geq 0$, abbiamo che $g(X) \geq g(Y)$, e dunque non possono esistere rivestimenti ramificati da superficie di genere minore a superficie di genere maggiore. In particolare non esistono rivestimenti ramificati dalla sfera al toro.

4.2.2. Se $g(X) = 1 = g(Y)$, allora necessariamente $\text{ram}(f) = 0$, dunque un rivestimento del toro sul toro non è mai ramificato.

4.2.3. Se $g(X) = g(Y) > 1$, allora necessariamente $e(f) = 1$ ed f è un isomorfismo. Altrimenti si avrebbe $e(f) = \frac{\chi(X) + \text{ram}(f)}{\chi(Y)} = 1 + \frac{\text{ram}(f)}{\chi(Y)} \leq 1$ (visto che $\chi(Y) < 0$), il che è assurdo.

4.2.4. Nel caso che $g(Y) = 0$ (rivestimenti della sfera) la formula diviene particolarmente facile e utile: $g(X) = 1 - e(f) + \text{ram}(f)/2$.

4.2.5. Se $g(Y) = 0$ e $g(X) > 0$, allora $\text{ram}(f) \geq 2(g(X) + 1)$.

4.2.6. Se $g(Y) = 1$ e $g(X) > 1$, allora $\text{ram}(f) = 2(g(X) + 1)$.

4.2.7. Se $g(Y) > 1$ e $g(X) > g(Y)$, allora $\text{ram}(f) \leq 2(g(X) - 2g(Y) + 1)$.

5. Genere di Curve Algebriche Piane Complesse: formule di Plücker.

5.1. Vogliamo applicare la formula di Riemann-Hurwitz per il calcolo del genere di curve proiettive piane complesse. Se la curva non è singolare, essa è una superficie reale in base al teorema del Dini, che ne fornisce delle carte locali. Nel caso invece che la curva sia singolare, anticipiamo che come genere della curva intenderemo il genere della sua normalizzazione in quanto Superficie di Riemann. Questa si ottiene sostituendo opportuni intornoi dei punti singolari con opportune parametrizzazioni dei rami di quei punti.

5.2. L'argomento chiave su cui si basano le nostre applicazioni alle curve algebriche è il seguente. Sia \mathcal{C} la curva proiettiva piana di equazione $f(X_0, X_1, X_2) = 0$ di grado d . Eventualmente cambiando il riferimento possiamo supporre che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{C}$ e che la retta impropria $X_0 = 0$ non sia tangente a \mathcal{C} . Sia $e = \deg_{X_2} f$ e consideriamo la mappa $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}_C^1$ che manda (X_0, X_1, X_2) in (X_0, X_1) (nella parte affine manda (X, Y) in X , una "proiezione"). Allora i punti di ramificazione di π sono tutti e soli quelli con tangente "verticale", cioè i punti della curva \mathcal{C} che appartengono anche alla polare di \mathcal{C} rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ma non alla retta impropria). Si tratta dei punti affini che soddisfano alle equazioni $f = 0$ e $\frac{\partial}{\partial X_2} f = 0$.

Possiamo allora usare la formula di Riemann-Hurwitz per π e scrivere che $g(\mathcal{C}) = 1 - e + \text{ram}(\pi)/2$, osservando che $e_P(\pi) = \text{ord}_y f(x, Y)$ e $\text{ram}_P(\pi) = \text{ord}_y \frac{\partial}{\partial Y} f(x, Y)$ se $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

5.2.1. In qualche caso si possono fare i conti anche violando le condizioni richieste.

5.3. CASO DI CURVE NON SINGOLARI. Se \mathcal{C} è non singolare, e il suo grado è d , possiamo supporre $d = \deg_{X_2} f$, e basta calcolare i punti di intersezione di \mathcal{C} con la polare $\mathcal{P}_{e_2}(\mathcal{C})$, che sono esattamente $d(d-1)$ per il teorema di Bézout. Dunque risulta:

$$g(\mathcal{C}) = 1 - d + \frac{d(d-1)}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

(formula genere-grado per curve proiettive piane lisce). In particolare abbiamo la seguente tabella grado-genere:

grado	1	2	3	4	5	6	7	8	...
genere	0	0	1	3	6	10	15	21	...

da cui si nota che rette e coniche sono entrambe di genere zero (curve razionali), e che non esistono curve piane lisce di generi 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, ... Vedremo comunque in futuro che esistono curve algebriche proiettive lisce immerse in qualche \mathbb{P}^n (anche con $n = 3$) di ogni genere.

5.4. CASO DI CURVE IPERELLITTICHE. Se consideriamo le curve di equazione $Y^2 = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)$ ($\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$) sappiamo che l'unico punto singolare è il punto improprio dell'asse Y , e con tangente esattamente la retta impropria. Tuttavia, la proiezione sull'asse delle X è chiaramente un rivestimento ramificato con due fogli, sono di ramificazione (uno) tutti i punti della curva sull'asse delle X , e l'unica incertezza riguarda il comportamento del punto improprio, che potrebbe portare ramificazione 1 oppure 0. D'altra parte, poiché la ramificazione totale dev'essere pari, risulta necessariamente questo: se $m = 2n$ è pari, allora il punto improprio non ramifica, se $m = 2n+1$ è dispari, allora il punto improprio ha ramificazione 1. Quindi abbiamo

$$g(\mathcal{C}) = \begin{cases} 1 - 2 + 2n/2 = n - 1 & \text{se } m = 2n \\ 1 - 2 + (2n + 2)/2 = n & \text{se } m = 2n+1. \end{cases}$$

Otteniamo quindi la seguente tabellina che distingue di casi pari e dispari delle ipergeometriche:

n		1	2	3	4	5	6	7	8	...
genere $m = 2n$		0	1	2	3	4	5	6	7	...
genere $m = 2n+1$		1	2	3	4	5	6	7	8	...

da cui si osserva che ogni genere può essere realizzato da curve proiettive piane (ipergeometriche), anche se si tratta quasi sempre di curve singolari. Si noti anche che curve ellittiche (iperellittiche di grado 3, non singolari) e iperellittiche di grado 4 sono ambedue di genere 1:

grado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
genere	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	...

5.5. CASO DI CURVE SINGOLARI. Per trattare in generale il caso di curve singolari, bisogna nel ragionamento generale prima esposto tener conto di quanto i punti singolari contribuiscono alla intersezione della curva con la polare descritta, e di quanto effettivamente essi contribuiscono alla ramificazione totale. Siccome ogni punto è sostituito dai propri rami...

Conviene perciò che il sistema di riferimento sia tale che nessuna tangente nei punti singolari sia una retta "verticale". Per ogni tale punto P possiamo distinguere i rami \mathfrak{P}_i ; allora è chiaro che ciascuno contribuisce con $m_{\mathfrak{P}_i}(\mathcal{C}')$ al calcolo di intersezione di \mathcal{C} con \mathcal{C}' , mentre dal procedimento di normalizzazione sarà chiaro che contribuisce con $m_{\mathfrak{P}_i} - 1$ alla ramificazione totale. Questo porta alle formule di Plücker generalizzate per il genere:

$$g(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{\sum_{\mathfrak{P} \in \mathcal{C}} (m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{C}') - m_{\mathfrak{P}} + 1)}{2}$$

ove la somma è estesa a tutti i posti sui punti singolari di \mathcal{C} . Questa formula si può usare con una polare generica \mathcal{C}' e anche usando polari diverse da posto a posto, purché per ogni posto si usi una polare generica per quel posto, cioè tale che $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{C}')$ sia minimo tra le polari.

In particolare abbiamo i seguenti casi speciali:

5.5.1. NODI. Un nodo ha due posti lineari, ciascuno dei quali ha molteplicità di intersezione 1 con la polare, e dà contributo nullo alla ramificazione; quindi ogni nodo contribuisce con $-(1+1)/2 = -1$ alla formula generalizzata.

5.5.2. CUSPIDI. Una cuspidine ordinaria ha un solo posto di molteplicità 2, ha molteplicità di intersezione 3 con la polare, e dà contributo 1 alla ramificazione; quindi ogni nodo contribuisce con $-(3-1)/2 = -1$ alla formula generalizzata.

5.5.3. CURVE DI PLÜCKER. Quindi per curve di Plücker, cioè curve che hanno solo nodi e cuspidi ordinarie come singolarità, abbiamo che

$$g(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \tau - \kappa,$$

ove τ è il numero dei nodi, e κ quello delle cuspidi. In particolare, coincide con la deficienza della curva \mathcal{C} .

5.5.4. PUNTI ORDINARI. Un punto ordinario m -uplo ha m posti lineari, ciascuno dei quali ha molteplicità di intersezione $m-1$ con la polare, e dà contributo nullo alla ramificazione; quindi ogni punto ordinario contribuisce con $-m(m-1)/2$ alla formula generalizzata.

5.5.5. SUPERCUSPIDI ORDINARIE. Una supercuspidale ordinaria di molteplicità r (come punto singolare) ha un solo posto di molteplicità r , ha molteplicità di intersezione $r^2 - 1$ con la polare, e dà contributo $r - 1$ alla ramificazione; quindi ogni supercuspidale ordinaria contribuisce con $-(r^2 - 1 - r + 1)/2 = -r(r - 1)/2$ alla formula generalizzata.

5.5.6. In particolare, per curve che abbiano solo singolarità ordinarie o supercuspidali ordinarie abbiamo una formula per il genere data da

$$g(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{\sum_P m_P(m_P-1)}{2},$$

ove la somma è estesa ai punti singolari e m_P è la molteplicità dei punti.

5.5.7. PROBLEMA. Determinare il contributo alla formula generalizzata di singolarità di molteplicità due, con unica tangente che interseca la curva con molteplicità $p \geq 3$ (il caso $p = 3$ è quello delle cuspidi ordinarie); conviene distinguere i casi pari e dispari di p .

Altro caso interessante è quello di punti di molteplicità m , con una unica tangente che interseca la curva con molteplicità $p \geq m + 1$ (il caso $p = m + 1$ è quello delle supercuspidali ordinarie).

5.6. ALTRI ESEMPLI.

5.6.1. Le curve di equazioni $Y^3 = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)$ con $m \geq 4$ (e $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$) hanno genere dato da

$$g(\mathcal{C}) = \begin{cases} m-2 & \text{se } d \equiv 0(3) \\ m-1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque otteniamo questa tabellina grado-genere:

grado	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
genere	3	4	4	6	7	7	9	10	10	...

5.6.2. Le curve di equazioni $Y^4 = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)$ con $m \geq 5$ (e $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$) hanno genere dato da

$$g(\mathcal{C}) = \begin{cases} 3m/2 - 3 & \text{se } d \equiv 0(4) \\ 3m/2 - 2 & \text{se } d \equiv 2(4) \\ 3(m+1)/2 - 3 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque otteniamo questa tabellina grado-genere:

grado	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
genere	6	7	9	9	12	13	15	15	18	19	21	21	...

5.6.3. Le curve di equazioni $Y^5 = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)$ con $m \geq 6$ (e $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$) hanno genere dato da

$$g(\mathcal{C}) = \begin{cases} 2m-4 & \text{se } d \equiv 0(5) \\ 2m-2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque otteniamo questa tabellina grado-genere:

grado	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
genere	10	12	14	16	16	20	22	24	26	26	30	...

5.6.4. Per esercizio, esplorare il caso di curve di equazioni $Y^n = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)$ con $m \geq n+1$ (e $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$).

5.7. PROBLEMI. Determinare, sia tramite analisi dei posti e formule di Plücker, sia tramite opportune mappe di rivestimento ramificato della retta proiettiva (per esempio le proiezioni sugli assi coordinati), il genere delle seguenti curve piane:

(5.7.1) $X_1^n + X_2^n = X_0^n$ (Fermat)

(5.7.2) $(X+Y)(X-Y) = X^4 + Y^4$

(5.7.3) $Y^2 = X^3 + Y^4$

- (5.7.4) $Y^2 = X^4 + Y^3$
- (5.7.5) $Y^2 = X^4 + XY^3$
- (5.7.6) $Y^2 = X^4 + Y^4$
- (5.7.7) $(Y - X^2)^2 = Y^3$
- (5.7.8) $(Y - X^2)^2 = XY^3$
- (5.7.9) $XY(X - Y) = X^4 + Y^4$
- (5.7.10) $Y^2X = X^4 + Y^4$
- (5.7.11) $Y^3 = X^4$
- (5.7.12) $(X - 1)(X + Y)(X - Y) = X^4 + Y^4$
- (5.7.13) $(X + Y)(X - Y) = X^4$
- (5.7.14) $X^2 = X^4 + Y^4$
- (5.7.15) $(X + Y)(X - Y) = X^5 + Y^5$
- (5.7.16) $X^2 = Y^5$
- (5.7.17) $(Y - X^2)^2 = Y^5$
- (5.7.18) $(Y - X^2)^2 = Y^5 + XY^4$
- (5.7.19) $XY(X - Y) = Y^5 + XY^4$
- (5.7.20) $X^2Y = Y^5 + XY^4$
- (5.7.21) $X^3 = Y^5$
- (5.7.22) $X(Y - X^2)^2 = Y^4$
- (5.7.23) $X(Y - X^2)^2 = Y^5$
- (5.7.24) $X^4 = Y^5$
- (5.7.25) $X^3Y = Y^5 + Y^5$
- (5.7.26) $X^2Y^2 = Y^5 + Y^5$
- (5.7.27) $XY(X + 2Y)(X - 2Y) = Y^5 + Y^5$
- (5.7.28) $X^2 + Y^3 = X^5$
- (5.7.29) $(X + Y)(X - Y) = X^5$

Capitolo II

Superficie di Riemann.

In questo capitolo, dopo un veloce richiamo delle nozioni legate alle funzioni olomorfe (funzioni di variabile complessa differenziabili in senso complesso), diamo la definizione di superficie di Riemann, di funzioni e mappe olomorfe e meromorfe tra superficie di Riemann, e vedremo i primi esempi importanti.

0. Richiami di Analisi Complessa.

0.1. DEFINIZIONE (FUNZIONE OLMORFA). Sia U un aperto di \mathbb{C} . Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ si dice olomorfa se è derivabile in senso complesso, cioè se per ogni punto $z \in U$ esiste il limite $\lim_{\mathbb{C} \ni \varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}$. Una funzione olomorfa su $U = \mathbb{C}$ si dice intera.

0.1.1. Si osservi che la condizione posta è molto forte, poiché si richiede di variare $\varepsilon \in \mathbb{C}$: quindi ε varia su tutto un intorno di 0 in \mathbb{C} , e si sta “controllando” il comportamento di f in tutto un intorno di ogni $z \in U$ (e non solo, per esempio, sulla rette per z).

0.2. CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN. Usando che \mathbb{C} è in biiezione con \mathbb{R}^2 , e le usuali identificazioni $z = x + iy$, $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dunque identificando $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, si vede che f è olomorfa se e solo se (u, v) è differenziabile in senso reale (come funzione di due variabili), e il suo differenziale in ogni punto è \mathbb{C} -lineare come funzione $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Per questo è necessario e sufficiente che il differenziale commuti con la “moltiplicazione per i ”, che è rappresentata in \mathbb{R}^2 dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Quindi una funzione f è olomorfa (differenziabile in senso complesso) se e solo se è differenziabile in senso reale e vale la seguente relazione:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Questa condizione si traduce nelle due relazioni seguenti

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

dette relazioni di Cauchy-Riemann.

0.3. SIMBOLOGIA COMPLETA. Conviene forse richiamare la simbologia completa di derivazioni e differenziali, con il dizionario complesso/reale:

$$\begin{aligned} z &= x + iy & x &= \Re(z), \quad y = \Im(z) \\ \bar{z} &= x - iy & \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ iz &= -y + ix & \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ dz &= dx + idy & dx &= \frac{dz+d\bar{z}}{2} \\ d\bar{z} &= dx - idy & dy &= \frac{dz-d\bar{z}}{2i} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial y} &= i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned}$$

e possiamo allora scrivere che f è olomorfa se e solo se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, ovvero se e solo se $f dz$ è una forma differenziale chiusa (cioè il differenziale complesso $d(f dz) = \bar{\partial}(f) d\bar{z} \wedge dz$ è nullo).

0.3.1. FUNZIONI ANTIOLOMORFE. Si dice spesso che una funzione $f = u + iv$ è antiolomorfa se $\bar{f} = u - iv$ è olomorfa, cioè sse $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$, sse $f d\bar{z}$ è una forma differenziale chiusa, sse valgono le antirelazioni di Cauchy-Riemann (esplicitare).

0.4. INTEGRAZIONI. Funzioni e differenziali di variabile complessa si possono integrare lungo cammini nel modo usuale per varietà reali:

0.4.1. se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ (I intervallo reale, $\gamma(x) \in \mathbb{C}$, continua) allora $\int_{\gamma} f dz = \int_I f \circ \gamma dx \in \mathbb{C}$, e se ω è una 1-forma differenziale complessa, $\int_{\gamma} \omega = \int_I \omega \circ \gamma \in \mathbb{C}$;

0.4.2. se $\Sigma : S \rightarrow \mathbb{C}$ (S aperto del piano reale, $\Sigma(x, y) \in \mathbb{C}$, continua) allora $\int_{\Sigma} f dz \wedge d\bar{z} = \int_S f \circ \Sigma dx \wedge dy \in \mathbb{C}$, e se η è una 2-forma differenziale complessa, $\int_{\Sigma} \eta = \int_S \eta \circ \Sigma \in \mathbb{C}$.

Naturalmente, valgono le formule di Gauss-Green: $\int_{\partial \Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$.

0.5. TEOREMA (CAUCHY). Supponiamo f funzione di classe \mathcal{C}^1 (in quanto funzione reale); allora f è olomorfa se e solo se per ogni regione (aperto limitato) Σ si ha $\int_{\partial \Sigma} f(z) dz = 0$.

0.6. FORMULE INTEGRALI DI CAUCHY. Se f è funzione olomorfa in z_0 e limitata in un intorno Δ , allora per ogni $z \in \Delta$ valgono:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} f(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

0.6.1. SVILUPPI DI TAYLOR. Conseguenze dalle formule integrali sono:

- (a) una funzione è olomorfa se e solo se è indefinitamente differenziabile (dunque ammette sviluppo di Taylor) e analitica (la sua serie di Taylor converge alla funzione);
- (b) una funzione è olomorfa se e solo se è limite uniforme di polinomi in z .

0.7. TEOREMA (LIOUVILLE). Se f è funzione olomorfa intera, allora f è limitata se e solo se è costante, ed è un polinomio (di grado minore o uguale ad n) se e solo se è $o(|z|^n)$.

0.7.1. ORDINE DI ZERO. Se $f(z) = \sum_{i \geq m} a_i (z - z_0)^i$ è lo sviluppo di Taylor di f in z_0 , e $a_m \neq 0$, allora m si dice ordine di zero di f a z_0 ; si scrive $\text{ord}_{z_0} f(z) = \min\{m \in \mathbb{N} : a_m \neq 0\}$.

0.8. TEOREMA (PRINCIPIO DI IDENTITÀ O CONTINUAZIONE ANALITICA). Se f è funzione olomorfa su un connesso, allora f è (identicamente) nulla se (e solo se) si annulla su un insieme con un punto di accumulazione.

0.9. TEOREMA (PRINCIPIO DEL MASSIMO MODULO). Se f è funzione olomorfa e z_0 è punto di massimo relativo per $|f|$, allora f è costante nella componente connessa di z_0 .

0.10. Ne segue subito che: se $K \rightarrow \mathbb{C}$ è funzione continua non costante su un compatto connesso K di \mathbb{C} ed è olomorfa nell'interno, allora il modulo assume valore massimo nella frontiera di K .

0.11. TEOREMA (WEIERSTRASS-VITALI). Sia f_n successione convergente uniformemente sui compatti ad f . Se f_n è olomorfa per ogni n allora f è olomorfa e le derivate $f_n^{(i)}$ della successione convergono uniformemente sui compatti alle derivate $f^{(i)}$ di f .

0.12. TEOREMA (M-TEST DI WEIERSTRASS). Se $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ con U aperto di \mathbb{C} sono funzioni olomorfe limitate in modulo da una successione con somma convergente ($\|f_n\|_U \leq M_n$ con $\sum_n M_n$ convergente), allora la serie $\sum_n f_n$ converge ad una funzione olomorfa f , e la serie $\sum_n f_n^{(i)}$ delle derivate converge alla derivata $f^{(i)}$ di f (tutto uniformemente sui compatti).

0.13. FUNZIONI MEROMORFE E ORDINI DI POLO. Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ si dice meromorfa in $z_0 \in U$ se è olomorfa fuori di z_0 e ammette uno sviluppo di Laurent finito (negativamente)

$$f(z) = \sum_{i \geq -m} a_i (z - z_0)^i \quad \text{con } m \geq 0.$$

Il punto z_0 si dice un polo (isolato) di f , e l'intero m si dice l'ordine di polo di f a z_0 .

0.13.1. RESIDUI. Se f è meromorfa in z_0 , si dice residuo di f in z_0 il numero complesso a_{-1} dello sviluppo di Laurent. Vale che

$$\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1} = \int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta$$

ove Δ è intorno di z_0 ove f converge.

0.13.2. INDICATORE LOGARITMICO. Se f è meromorfa e D è un disco chiuso senza poli di f nel bordo, allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} d \log f = (\text{numero di zeri}) - (\text{numero di poli}) \text{ di } f \text{ nel disco } D.$$

ove $d \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ è il differenziale logaritmico di f .

In particolare:

- (a) se f ha uno zero di ordine m in z_0 , allora $\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = m$;
 (b) se f ha un polo di ordine m in z_0 , allora $\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -m$.

1. Superficie di Riemann, Funzioni e Mappe.

1.1. DEFINIZIONE (SUPERFICIE DI RIEMANN). Una Superficie di Riemann è una varietà complessa di dimensione 1. Cioè è uno spazio topologico S hausdorff, a base numerabile e connesso con ricoprimento aperto $\{U_i\}$ e carte (omeomorfismi) $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, ove V_i sono aperti di \mathbb{C} tali che le mappe di transizione $\varphi_{i,j} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ siano mappe oloomorfe.

1.2. ESEMPI OVVI.

1.2.1. Gli aperti di \mathbb{C} sono superficie di Riemann (non compatte).

1.2.2. In particolare sono Superficie di Riemann: \mathbb{C} e $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (piano bucato), $D(0, 1^-)$ (disco unità) e $D^*(0, 1^-) = D(0, 1^-) \setminus \{0\}$ (disco unità bucato), $C(0, r, 1) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ per $r < 1$ (corone).

1.2.3. Aperti di Superficie di Riemann sono Superficie di Riemann.

1.2.4. Prodotti cartesiani di Superficie di Riemann *non* sono Superficie di Riemann (perché?).

1.3. ESEMPIO NON OVVIO. Ogni superficie triangolabile può essere resa, non in modo canonico, una SdR; come trasformare una triangolazione in un atlante oloomorfo?

1.4. ATTENZIONE. Come sempre, in queste definizioni, si sarebbe portati, partendo da un insieme S con le biiezioni φ_i , a definire la topologia di S imponendo che le “carte”, essendo biettive, siano omeomorfismi, cioè trasportando la topologia dagli aperti di \mathbb{C} tramite le carte. Questo si può fare, ma bisogna verificare che la topologia così introdotta su S (trattasi di una topologia quoziente sulle carte) abbia le proprietà richieste: non è automatico.

1.5. DEFINIZIONE (FUNZIONI OLOMORFE E MEROMORFE). Una funzione $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ da una Superficie di Riemann a valori complessi si dice oloomorfa (risp. meromorfa) nel punto $P \in S$ se esistono un aperto U di S contenente P e una carta $\varphi : U \rightarrow V$ (V aperto di \mathbb{C}) tale che $f \circ \varphi^{-1}$ sia oloomorfa (risp. meromorfa) nel punto $z = \varphi(P)$. La funzione si dice oloomorfa (risp. meromorfa) se lo è in ogni punto di S . L'insieme delle funzioni oloomorfe su S si indica con $\mathcal{O}(S)$ ed ha chiaramente struttura d'anello (somma e prodotto definiti puntualmente su S). L'insieme delle funzioni meromorfe su S si indica con $\mathcal{M}(S)$ ed ha chiaramente struttura di corpo (ma non è necessariamente il corpo delle frazioni di $\mathcal{O}(S)$...).

Vi sono alcune considerazioni che discendono subito dalle proprietà delle funzioni oloomorfe su aperti di \mathbb{C} .

1.5.1. PRINCIPIO DI IDENTITÀ. Una funzione oloomorfa (risp. meromorfa) è identicamente nulla se e solo se si annulla su un insieme con un punto di accumulazione. Due funzioni oloomorfe (risp. meromorfe) sono uguali se e solo se coincidono su un insieme con un punto di accumulazione.

1.5.2. DISCRETEZZA DI ZERI E POLI. Se una funzione oloomorfa su S è non nulla, allora l'insieme degli zeri è discreto. Se una funzione meromorfa su S è non nulla, allora l'insieme degli zeri e l'insieme dei poli sono entrambi discreti.

1.5.3. MASSIMO MODULO. Una funzione olomorfa il cui modulo ammetta massimo relativo è costante nella componente connessa del massimo.

1.5.4. CASO COMPATTO. Se S è compatta, allora ogni funzione olomorfa è costante, cioè $\mathcal{O}(S) = \mathbb{C}$. Infatti il modulo ammette massimo, ed S è connessa. Invece le funzioni meromorfe non sono necessariamente banali.

1.5.5. ORDINI. L'ordine di una funzione (olomorfa o meromorfa) in $P \in S$ si definisce nel modo ovvio usando una qualsiasi carta in un intorno di P . Si scrive $\text{ord}_P(f)$, se $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ è la funzione, ed è intero positivo, nullo o negativo a seconda che f abbia valore nullo, non nullo o polo in P .

Naturalmente valgono le solite regole di compatibilità della funzione ord_P :

$$\begin{aligned} \text{ord}_P(f) &= \infty \text{ sse } f = 0 \text{ (in un intorno di } P, \text{ e allora ovunque),} \\ \text{ord}_P(fg) &= \text{ord}_P(f) + \text{ord}_P(g), \\ \text{ord}_P(1/f) &= -\text{ord}_P(f), \\ \text{ord}_P(f \pm g) &\geq \min\{\text{ord}_P(f), \text{ord}_P(g)\} \text{ (e vale l'uguaglianza se sono diversi).} \end{aligned}$$

1.6. DEFINIZIONE (MAPPE OLOMORFE). Una funzione $f : S \rightarrow S'$ tra Superficie di Riemann si dice mappa olomorfa nel punto $P \in S$ se esistono un aperto U di S contenente P e una carta $\varphi : U \rightarrow V$ (V aperto di \mathbb{C}) un aperto U' di S' contenente $P' = f(P)$ e una carta $\varphi' : U' \rightarrow V'$ (V' aperto di \mathbb{C}) tale che $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ sia olomorfa nel punto $z = \varphi(P)$. La funzione si dice mappa olomorfa se lo è in ogni punto di S . Indicheremo con $\mathcal{O}(S, S')$ le mappe olomorfe da S in S' .

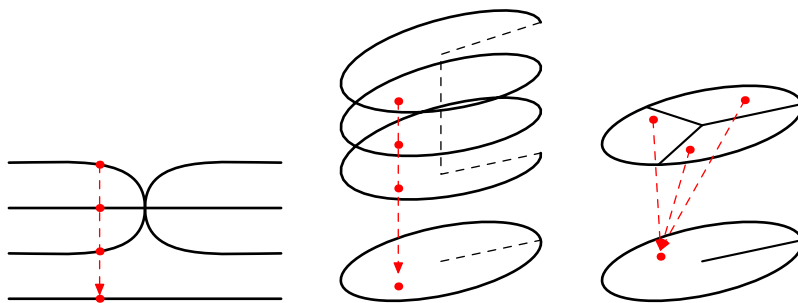
1.6.1. IDENTITÀ. L'applicazione identica di ogni SdR in sè è mappa olomorfa.

1.6.2. COMPOSIZIONE. È facile verificare che la composizione di due mappe olomorfe è ancora olomorfa.

1.6.3. Si osservi che le funzioni meromorfe da S in \mathbb{C} sono esattamente le mappe olomorfe da S in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (in quanto Superficie di Riemann), mandando ogni polo nel punto ∞ . Dunque $\mathcal{O}(S, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) = \mathcal{M}(S)$.

1.6.4. ISOMORFISMI. Diremo che due Superficie di Riemann sono isomorfe (o biolomorfe) se esiste una mappa olomorfa tra loro che sia invertibile e la cui inversa sia una mappa olomorfa.

1.7. FORMA LOCALE DI MAPPE OLOMORFE. Data una funzione $f : S \rightarrow S'$ olomorfa in $P \in S$, è sempre possibile trovare una carta $\varphi : V \rightarrow U$ con V aperto di \mathbb{C} , U aperto di S contenente P , e una carta $\varphi' : V' \rightarrow U'$ con V' aperto di \mathbb{C} , U' aperto di S' contenente $f(P)$, tale che $\varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi(z) = z^m$ con $m \in \mathbb{N}$. Infatti, per ipotesi possiamo trovare carte in modo da avere una espressione locale del tipo $z^m g(z)$ con $m \in \mathbb{N}$ e $g(z)$ olomorfa con $g(0) \neq 0$; si tratta quindi di cambiare φ' componendo con una determinazione della radice m -esima di $g(z)$.



1.7.1. MOLTEPLICITÀ E ORDINI. Si dice molteplicità di f in P il naturale m , e si indica con $\text{molt}_P(f)$. La molteplicità si può calcolare come l'ordine di annullamento nel punto della derivata di una forma locale, aumentato di 1.

1.7.2. RELAZIONE CON GLI ORDINI PER FUNZIONI MEROMORFE. Si osservi che per una funzione meromorfa su S , pensata come funzione olomorfa da S in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, $\text{molt}_P(f) = \text{ord}_P(f)$ se P non è polo, e $\text{molt}_P(f) = -\text{ord}_P(f)$ se P è un polo.

1.7.3. GRADO. Supponiamo S ed S' SdR compatte. Per ogni punto $P' \in S'$, la somma delle molteplicità

$$\sum_{P: f(P)=P'} \text{molt}_P(f)$$

è indipendente da P' , e si dice il grado di f . Infatti si tratta di una funzione localmente costante su S' , che è connessa. Si indica con $\text{deg}(f)$.

1.7.4. RIVESTIMENTI. Come conseguenza, si vede che ogni funzione olomorfa f tra SdR compatte è un rivestimento ramificato con $\deg(f)$ fogli, e sono punti di ramificazione solo i punti di $P \in S$ con $\text{molt}_P(f) > 1$, con $r_P(f) = \text{molt}_P(f) - 1$.

1.7.5. ZERI E POLI. In particolare, per ogni SdR compatta e per ogni funzione meromorfa vale che $\sum_P \text{ord}_P(f) = 0$, poiché si tratta della differenza tra il numero di zeri e il numero dei poli, cioè

$$\sum_{P:f(P)=0} \text{molt}_P(f) - \text{molt}_{P:f(P)=\infty} \text{molt}_P(f) = \deg(f) - \deg(f) = 0$$

(si tratta dei punti delle fibre di f in $0, \infty \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$).

1.7.6. È utile, anche se facile, osservare che mappe olomorfe tra SdR compatte sono isomorfismi se e solo se sono di grado 1 (cioè rivestimenti con un foglio, nel qual caso non hanno ramificazione).

2. Esempi: sfera di Riemann.

2.1. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ COME SUPERFICIE DI RIEMANN. La retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ diventa una Superficie di Riemann compatta usando come atlante quello definito dalle due carte affini usuali:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U_1 & \xleftarrow{\psi_1} & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\psi_2} & U_2 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & & z & & \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

con inverse date da

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} & \xleftarrow{\varphi_2} & U_2 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} & \longleftarrow & \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

L'unica mappa di transizione è data da

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus 0 = \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\psi_1} & U_1 \cap U_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathbb{C}^* = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus 0 \\ z & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} & \longrightarrow & \frac{1}{z} \end{array}$$

che è chiaramente olomorfa.

Si ricordi che la topologia di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ è definita dal fatto di rendere omeomorfismi le due carte affini, e quindi $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ risulta connessa (perché U_1 e U_2 lo sono e $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$), a base numerabile (lo sono sia U_1 che U_2), hausdorff (lo sono sia U_1 che U_2 e in questo caso basta verificare che i due punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si separino con aperti disgiunti, che è facile), compatta (perché è unione dei due compatti $K_1 = \{P \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} : |\varphi_1(P)| \leq 1\}$ e $K_2 = \{P \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} : |\varphi_2(P)| \leq 1\}$).

2.2. \mathbb{S} COME SUPERFICIE DI RIEMANN. Ricordiamo anche che la proiezione stereografica dal polo nord identifica la sfera unitaria \mathbb{S} di \mathbb{R}^3 con $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (identificato con il piano equatoriale reale) mandando il polo nord nel punto $\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si osservi che la proiezione della sfera dal polo nord sul piano equatoriale ha inversa data da $z \mapsto \frac{1}{1+|z|^2} \begin{pmatrix} |z|^2-1 \\ 2z \end{pmatrix}$ (con $z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$). La proiezione dal polo sud ha inversa data da $z \mapsto \frac{1}{1+|z|^2} \begin{pmatrix} 1-|z|^2 \\ 2z \end{pmatrix}$, e le due mappe inducono su \mathbb{C}^* la mappa di transizione che manda z in $1/\bar{z}$. Dunque si tratta di un atlante antiolomorfo (basta comporre una delle due carte col coniugio per ottenere un atlante in quanto SdR).

Si può allora verificare che le due carte sono omeomorfismi usando come topologia su \mathbb{S} quella indotta dalla topologia di \mathbb{R}^3 .

2.3. FUNZIONI OLMORFE SULLA SFERA DI RIEMANN. Essendo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ SdR compatta, $\mathcal{O}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$: le funzioni olomorfe sulla sfera sono solo le costanti.

2.4. TEOREMA (FUNZIONI MEROMORFE SULLA SFERA DI RIEMANN). Abbiamo i seguenti isomorfismi di corpi:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) & \cong & \mathcal{R}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) & \cong & \mathcal{M}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \\ \parallel & & \parallel & & \\ \mathcal{Q}_0(\mathbb{C}[Z_0, Z_1]_h) & \cong & \mathcal{Q}(\mathbb{C}[Z]) & & \end{array}$$

dove \mathcal{R} indica "funzioni razionali su" e \mathcal{Q} indica "corpo delle frazioni di". Quindi il corpo delle funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann si identifica con il corpo delle funzioni razionali sulla retta (affine o proiettiva) complessa.

Procediamo con vari passaggi:

2.4.1. Nel quadrato a destra abbiamo le funzioni razionali su $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$, che sono le funzioni $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ che si scrivono come frazioni di polinomi in z , e quindi si identificano con $\mathcal{Q}(\mathbb{C}[Z])$ essendo \mathbb{C} (algebricamente chiuso) di caratteristica nulla. A sinistra nel quadrato abbiamo le funzioni razionali su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, che per definizione sono le funzioni $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ che si scrivono come frazioni di polinomi *omogenei dello stesso grado* in z_0, z_1 , e quindi si identificano con $\mathcal{Q}_0(\mathbb{C}[Z_0, Z_1]_{\text{h}})$.

Inoltre i due corpi di frazioni sono identificato tra loro dalle usuali applicazioni di omogeneizzazione/disomogeneizzazione (che per gli anelli di polinomi non sono isomorfismi, ma lo diventano per i corpi di frazioni: verificare).

Dunque il quadrato è chiaramente composto da isomorfismi.

2.4.2. Ora vediamo che esiste una applicazione $\mathcal{R}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$, mostrando che ogni funzione razionale sulla retta affine si estende ad una funzione meromorfa sulla retta proiettiva. Sia $\varphi : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ funzione razionale, $\varphi = f/g$ con f, g funzioni polinomiali e consideriamo l'insieme $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_r, \infty\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ove $P_i = \binom{1}{z_i}$ e $g(z_i) = 0$ (punti corrispondenti agli zeri di g). Allora è chiaro che φ definisce una funzione olomorfa su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \mathcal{P}$, avente poli o singolarità eliminabili (quando?) nei punti P_1, \dots, P_r . Bisogna controllare il comportamento nel punto improprio ∞ . Poiché $\text{ord}_P(f/g) = \text{ord}_P(f) - \text{ord}_P(g)$, basta controllare il comportamento sui polinomi. Allora per f polinomio abbiamo la funzione definita da $\varphi(P) = f(\psi_1(P))$ e vogliamo studiare il comportamento per $P = \infty$; studiamo allora il comportamento a zero della funzione $\varphi(\varphi_1(z)) = f(\psi_1(\varphi_1(z))) = f(1/z)$. Se $f(z) = \sum_i a_i z^i$, di grado d , allora $f(1/z) = z^{-d} \sum_i a_i z^{d-i}$, e quindi presenta un polo di ordine d in zero. Quindi: *funzioni polinomiali sulla retta affine si estendono a funzioni meromorfe sulla retta proiettiva con un polo nel punto improprio di ordine pari al grado del polinomio; funzioni razionali sulla retta affine si estendono a funzioni meromorfe sulla retta proiettiva con ordine nel punto improprio pari alla differenza dei gradi di numeratore e denominatore.*

2.4.3. Ora è sufficiente mostrare che ogni funzione meromorfa sulla sfera di Riemann si ottiene nel modo descritto a partire da funzioni razionali (sulla retta affine); infatti l'applicazione $\mathcal{R}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$ trovata è chiaramente iniettiva e basta mostrarne la suriettività. Sia allora φ una funzione meromorfa non nulla di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, e sia $\{P_1, \dots, P_r\}$ l'insieme (finito per compattezza) di poli e zeri di φ . Sia $P_i = \binom{a_0^{(i)}}{a_1^{(i)}}$ e $e_i = \text{ord}_{P_i}(\varphi)$. Allora la funzione razionale

$$\gamma_i = Z_0^{-e_i} (a_1^{(i)} Z_0 - a_0^{(i)} Z_1)^{e_i}$$

ha ordine in P pari a:

$$\text{ord}_P \gamma_i = \begin{cases} 0 & \text{se } P \neq P_i, \infty \\ e_i & \text{se } P = P_i \\ -e_i & \text{se } P = \infty. \end{cases}$$

Dunque la funzione razionale $\gamma = \prod_i \gamma_i$ ha $\text{ord}_P(\gamma) = \text{ord}_P(\varphi)$ per ogni P , tranne al più $P = \infty$.

Ora, il quoziente φ/γ è olomorfo invertibile su $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$, e basta vedere come si comporta all'infinito: se $\text{ord}_{\infty}(\varphi/\gamma) \geq 0$ allora φ/γ è olomorfa su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, dunque costante e non nulla, $\varphi = \alpha \gamma$ (con $\alpha \in \mathbb{C}^*$), e di conseguenza anche $\text{ord}_{\infty}(\varphi/\gamma) = 0$. Altrimenti è $\text{ord}_{\infty}(\varphi/\gamma) \geq 0$ e si arriva alle stesse conclusioni. \square

2.4.4. ATTENZIONE. Si osservi che abbiamo identificato funzioni razionali su retta affine e retta proiettiva complesse; ma non è assolutamente vero che le funzioni meromorfe sulla retta affine si identifichino con le funzioni meromorfe sulla retta proiettiva (come pure per le funzioni olomorfe): esistono funzioni olomorfe (dunque anche meromorfe) su $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ con singolarità essenziali (non polari) all'infinito, che quindi non sono funzioni meromorfe su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Ad esempio esponenziali e funzioni trigonometriche. Quindi abbiamo $\mathcal{O}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \subsetneq \mathcal{O}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1)$ e $\mathcal{M}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1)$.

2.4.5. SOMME DI FRAZIONI ELEMENTARI?

2.5. CARATTERIZZAZIONE DELLA SFERA DI RIEMANN. Dalla dimostrazione del teorema possiamo ritrovare il risultato per cui ogni funzione meromorfa ha “tanti poli quanti zeri”, cioè somma degli ordini nulla (ciò è infatti verificato per i polinomi, e quindi per le funzioni razionali), cosa già vista in generale per le SdR compatte. La dimostrazione permette però di affermare una reciproca: *per ogni insieme $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ e ogni scelta $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$ tali che $\sum_i a_i = 0$, esiste, unica a meno di costanti non nulle, una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$ tale che $\text{ord}_P(f) = \delta_{P, P_i} a_i$ per ogni $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (cioè ha esattamente quell'insieme come insieme di zeri e poli, ed esattamente con le molteplicità assegnate).*

Aggiungendo la funzione nulla, si può dire che l'insieme delle funzioni dette è uno spazio vettoriale su \mathbb{C} di dimensione uno.

2.5.1. In particolare, assegnati due punti distinti $P, Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, esiste una funzione meromorfa che ha zero semplice in P , polo semplice in Q e nessun altro zero o polo.

2.5.2. Dunque: se S è SdR compatta, ed esiste una funzione meromorfa con un unico polo semplice $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, ovvero una funzione olomorfa $f : S \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ con un unico zero semplice, allora f è un isomorfismo tra S e $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Infatti, S è un rivestimento con un foglio.

2.5.3. Conclusione: abbiamo caratterizzato la sfera di Riemann come l'unica SdR compatta che ammetta funzioni meromorfe con un unico zero semplice (e dunque un unico polo semplice). Cioè, a meno di isomorfismi esiste una unica SdR compatta di genere zero, ed è caratterizzata dal fatto di ammettere funzioni meromorfe con un unico polo (e dunque un unico zero).

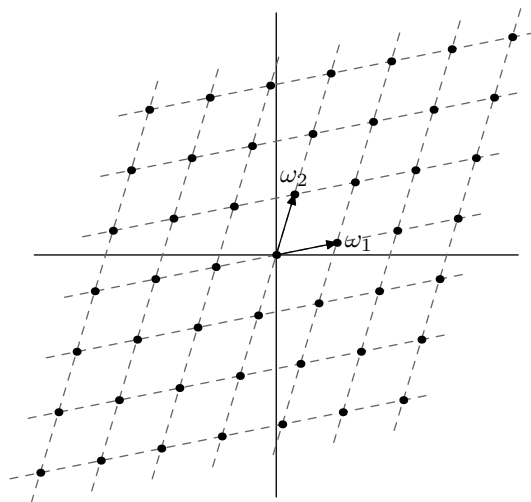
3. Esempi: tori complessi.

3.1. TORI COMPLESSI: QUOZIENTI DI \mathbb{C} PER UN RETICOLO. Abbiamo già introdotto il toro come superficie reale compatta ottenuta per identificazione (concorde) di coppie di lati opposti di un quadrato. Vogliamo ora evidenziare una struttura di SdR, e per questo daremo una definizione più precisa che ci permetta di definire la struttura di atlante olomorfo, e in seguito di discutere quando due tori siano da considerarsi "isomorfi" (come superficie reali compatte lo sono sempre, ma le strutture complesse possono differire).

3.1.1. DEFINIZIONI. Siano ω_1 e ω_2 elementi di \mathbb{C} linearmente indipendenti su \mathbb{R} . Il reticolo generato da ω_1 e ω_2 è per definizione il sottogruppo abeliano di \mathbb{C} generato da ω_1 e ω_2 ; si indica con $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ oppure con $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$, ed è formato da tutte le combinazioni a coefficienti interi dei due generatori. Si osservi che un reticolo è sempre un sottoinsieme discreto di \mathbb{C} (per l'usuale topologia).

Sia $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ un reticolo di \mathbb{C} ; il toro \mathbb{T}_{Λ} relativo a quel reticolo è lo spazio quoziente \mathbb{C}/Λ dotato delle seguenti due strutture:

- (1) la struttura di gruppo abeliano in quanto quoziente del gruppo addittivo di \mathbb{C} ;
- (2) dotato della topologia quoziente, la struttura di superficie di Riemann (compatta) definita dalle seguenti carte: per ogni $\bar{x} \in \mathbb{T}_{\Lambda}$, con $x \in \mathbb{C}$, sia U_x un intorno di x in \mathbb{C} che contenga al più un punto del reticolo Λ ; la collezione degli insiemi \bar{U}_x forma un atlante olomorfo per il toro (si osservi che le mappe di transizione sono l'identità o una traslazione in \mathbb{C}).



3.1.2. Si verifichi che in quanto superficie reale, la definizione appena data coincide con quella del precedente capitolo.

3.1.3. Si verifichi che ogni toro ammette un atlante olomorfo con tre carte.

3.1.4. Si verifichi che ogni toro complesso è isomorfo (in quanto SdR) ad un toro definito da un reticolo generato da 1 e τ con la condizione che $\Im(\tau) > 0$ (quindi in particolare 1 e τ sono linearmente indipendenti su \mathbb{R}). Indicheremo con Λ_{τ} il reticolo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$, e con \mathbb{T}_{τ} il toro corrispondente.

È più difficile chiedersi quando due tori del tipo \mathbb{T}_τ e $\mathbb{T}_{\tau'}$ sono tra loro isomorfi (in quanto SdR), ed affronteremo il problema in futuro.

3.2. FUNZIONI OLOMORFE E MEROMORFE. Essendo \mathbb{T}_Λ SdR compatta, $\mathcal{O}(\mathbb{T}_\Lambda) = \mathbb{C}$: le funzioni oloomorfe sui tori sono solo le costanti. D'altra parte, è chiaro che ogni funzione oloomorfa sul toro si identifica con una funzione oloomorfa su \mathbb{C} periodica sul reticolo Λ : ma allora si tratta di funzione intera e limitata (perché periodica su un compatto), dunque costante.

Per quanto riguarda le funzioni meromorfe, è chiaro che possiamo identificare ogni funzione meromorfa sul toro con una funzione meromorfa su \mathbb{C} periodica sul reticolo Λ ; però una descrizione esplicita in questi termini non è così ovvia. Studieremo prima una particolare funzione meromorfa sul toro, la funzione di Weierstrass, in vista delle sue applicazioni allo studio della struttura di gruppo del toro e alla sua identificazione con curve ellittiche piane; poi usando le funzioni Theta di Riemann daremo una descrizione generale delle funzioni meromorfe sul toro, similmente a quanto fatto per la sfera.

3.3. FUNZIONE DI WEIERSTRASS E CURVE ELLITTICHE. Consideriamo il toro \mathbb{T}_Λ (ricordiamo che è definito dal reticolo Λ generato da ω_1 e ω_2 elementi di \mathbb{C} linearmente indipendenti su \mathbb{R}); la funzione $\wp(z)$ di Weierstrass è definita dalla somma

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.

3.3.1. TEOREMA. Valgono le seguenti proprietà:

- (0) (MEROMORFIA) la funzione di Weierstrass è meromorfa su \mathbb{C} , oloomorfa fuori di Λ .
 (1) (DERIVATA) la derivata della funzione di Weierstrass è anch'essa meromorfa su \mathbb{C} , oloomorfa fuori di Λ , e vale:

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z - \omega)^3} \right)$$

per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.

- (2) (PARITÀ) la funzione di Weierstrass è pari, e la sua derivata dispari; cioè

$$\wp(-z) = \wp(z) \quad \text{e} \quad \wp'(-z) = -\wp'(z).$$

- (3) (PERIODICITÀ) la funzione di Weierstrass è periodica sul reticolo Λ , quindi definisce una funzione meromorfa $\wp : \mathbb{T}_\Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ sul toro, ovvero una funzione oloomorfa $\mathbb{T}_\Lambda \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (in quanto SdR).
 (4) (POLI) la funzione di Weierstrass presenta poli d'ordine 2 in ogni $\lambda \in \Lambda$ (con residuo nullo).
 (5) (SURIETTIVITÀ E DIFETTO DI INIETTIVITÀ) la funzione di Weierstrass è suriettiva, inoltre vale che $\wp(z) = \wp(z')$ se e solo se $z' = \pm z + \Lambda$.
 (6) (ZERI DELLA DERIVATA) la derivata della funzione di Weierstrass si annulla nei tre punti (non nulli) di due torsione modulo il reticolo Λ , cioè in $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ e $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.
 (7) (UNICITÀ) la funzione di Weierstrass è l'unica funzione su \mathbb{C} periodica di periodo Λ che in un intorno di zero abbia sviluppo di Laurent $\frac{1}{z^2} + h(z)$ con $h(z)$ oloomorfa e $h(0) = 0$.
 (8) (RELAZIONE FUNZIONALE) risulta che

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2(\Lambda)\wp(z) - g_3(\Lambda)$$

ove $g_2(\Lambda) = 60 \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^4}$ e $g_3(\Lambda) = 140 \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^6}$.

- (9) (IMMERSIONE PROIETTIVA PIANA COME CURVA ELLITTICA) la funzione

$$u : \mathbb{T}_\Lambda \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ z \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \wp(z) \\ \wp'(z) \end{pmatrix}$$

ha immagine contenuta nella curva ellittica (cubica piana non singolare) \mathcal{C}_Λ di equazione $Y^2 = 4X^3 - g_2(\Lambda)X - g_3(\Lambda)$, e in quanto funzione tra SdR $u : \mathbb{T}_\Lambda \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$ è biiettiva, bicontinua e biolomorfa.

(10) (TEOREMA DI ABEL PER I TORI) la mappa $u : \mathbb{T}_\Lambda \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$ è un (iso)morfismo di gruppi abeliani, cioè per $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ risulta che

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod{\Lambda} \quad \text{se e solo se} \quad u(z_1), u(z_2), u(z_3) \text{ sono allineati}$$

$$\text{se e solo se} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(z_1) & \wp(z_2) & \wp(z_3) \\ \wp'(z_1) & \wp'(z_2) & \wp'(z_3) \end{vmatrix} = 0 .$$

3.3.2. DIMOSTRAZIONE. La parte più noiosa è il primo punto (si fanno stime in modulo per applicare l' M -test di Weierstrass), mentre il resto della dimostrazione è facile e/o interessante per i metodi e le idee presenti.

(0) per dimostrare l'olomorfia fuori di 0, consideriamo i dischi compatti $D(0, R^+) = \{z : |z| \leq R\}$, e sia $\Lambda_R = \{\omega \in \Lambda : |\omega| < 2R\}$. Abbiamo allora che Λ_R è contenuto nell'insieme

$$\{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, n_1^2 + n_2^2 \leq 4R^2\delta^{-2}\}$$

per δ tale che $|x_1\omega_1 + x_2\omega_2| \geq \delta\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, ovvero $|\omega| \geq \delta\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. In particolare Λ_R è finito. Stimiamo allora la somma di Weierstrass sul complementare: per $\omega \in \Lambda \setminus \Lambda_R$ risulta

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{\omega^2 - (z-\omega)^2}{\omega^2(z-\omega)^2} \right| = \frac{|z| |z-2\omega|}{|\omega|^2 |z-\omega|^2}$$

ed usando le stime seguenti

$$|z| \leq R,$$

$$|2\omega - z| \leq |2\omega| + |z| \leq 2|\omega| + |\omega|/2 = \frac{5}{2}|\omega|$$

$$|z - \omega|^2 \geq ||z| - |\omega||^2 \geq ||\omega| - R|^2 \geq ||\omega| - |\omega|/2|^2 \geq |\omega|^2/4,$$

otteniamo la minorazione

$$\leq \frac{R \cdot 5|\omega|/2}{|\omega|^2 |\omega|^2/4} = 10R/|\omega|^3 \leq \frac{10R}{\delta^3} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}^3} .$$

Possiamo allora stimare la somma di Weierstrass nel modo seguente

$$\begin{aligned} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \frac{10R}{\delta^3} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}^3} &= \frac{10R}{\delta^3} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}^3} \\ &= \frac{10R}{\delta^3} \sum_{k \geq 1} \sum_{\max(n_1, n_2) = k} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}^3} \\ &\leq \frac{10R}{\delta^3} \sum_{k \geq 1} \frac{2k}{\sqrt{2k^2}^3} \leq \frac{10R}{\delta^3 \sqrt{2}} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} < \infty \end{aligned}$$

per applicare l' M -test.

- (1) basta derivare sotto il segno di somma (si può fare in base al punto precedente).
- (2) la parità di \wp è ovvia, poiché scambiando z in $-z$ la somma rimane la stessa (reindicizzata usando $-\omega$ invece di ω); per la derivata, basta derivare.
- (3) la periodicità è ovvia, poiché cambiare l'argomento per un elemento del reticolo non fa che reindicizzare la sommatoria sul reticolo per traslazione.
- (4) il polo d'ordine due in 0 con residuo nullo è evidente dalla definizione (la parte della somma è olomorfa), e di conseguenza sugli altri elementi del reticolo per periodicità.
- (5) per controllare suriettività e difetto di iniettività, usiamo l'indicatore logaritmico per la funzione $f(z) = \wp(z) - c$ con $c \in \mathbb{C}$. Abbiamo che $\text{dlog} f(z) = f'(z)/f(z)$ ha polo a 0 di ordine 1 e residuo 2. Sia Γ un parallelogrammo di \mathbb{C} con vertici $z_0, z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_2, z_0 + \omega_1 + \omega_2$, ove z_0 è scelto in modo che sul bordo del parallelogrammo non vi siano poli o zeri di $f(z)$. Allora risulta che

$$0 = \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \#\text{zeri}(f) - \#\text{poli}(f) = \#\text{zeri}(f) - 2$$

(l'integrale è nullo perché i quattro lati di Γ si cancellano a due a due; d'altra parte nell'interno di Γ cade esattamente un punto del reticolo, che porta un polo doppio) e dunque concludiamo

che $f(z)$ ammette zeri (due, contati con molteplicità) all'interno di Γ , cioè esistono valori $w \in \mathbb{C}$ tali che $\wp(w) = c$.

Per controllare quali sono i $w \in \mathbb{C}$ tali che $\wp(w) = c$, basta considerare che certamente, per parità e periodicità, anche $\pm w + \Lambda$ sono zeri. Ora, se $w \not\equiv -w \pmod{\Lambda}$ si hanno due zeri distinti all'interno del parallelogramma; se invece si ha $w \equiv -w \pmod{\Lambda}$, allora tale valore annulla anche la derivata (per periodicità e disparità), e quindi è uno zero doppio all'interno del parallelogramma (e di conseguenza non vi sono altri zeri).

- (6) gli zeri di $\wp'(z)$ sono (per disparità) i w tali che $w \equiv -w \pmod{\Lambda}$, da cui segue subito il risultato.
 (7) la differenza tra due tali funzioni sarebbe intera (olomorfa sul piano) e limitata (perché periodica sul reticolo), dunque costante; ma allora è nulla poiché valutata in 0 vale 0.
 (8) per la relazione funzionale, usiamo nuovamente il principio di identità analitica, costruendo una combinazione lineare delle funzioni $\wp, \wp^3, (\wp')^2$ che risulti olomorfa (cioè priva di parte polare), quindi costante (perché periodica su un compatto, e quindi limitata). Gli sviluppi di Laurent in 0 cominciano con

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + az^2 + bz^4 + o(z^6) \\ \wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + 3a\frac{1}{z^2} + 3b + o(z^2) \\ \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 2az + 4bz^3 + o(z^5) \\ \wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - 8a\frac{1}{z^2} - 16b + o(z^2)\end{aligned}$$

e quindi la combinazione

$$\wp'(z)^2 - (4\wp(z)^3 - 20a\wp(z))$$

è intera limitata (priva di parte polare e periodica sul reticolo), quindi costante, e la costante vale $-16b - 12b = -28b$. Quindi risulta

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 20a\wp(z) - 28b$$

con le costanti

$$\begin{aligned}g_2(\Lambda) &= 20a = 20 \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \wp}{\partial z^2}(0) = 60 \sum \frac{1}{\omega^4} \\ g_3(\Lambda) &= 28b = 28 \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \wp}{\partial z^4}(0) = 140 \sum \frac{1}{\omega^6}\end{aligned}$$

- (9) dal punto precedente è chiaro che $u : \mathbb{T}_\Lambda \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$ è ben definita; per procedere conviene scrivere la funzione inversa, anticipando (e motivando) alcuni argomenti futuri circa i differenziali su SdR; il problema è: come ricostruire il reticolo Λ e quindi il toro \mathbb{T}_Λ a partire dalla curva ellittica \mathcal{C}_Λ (questo ci farà anche vedere che ogni curva ellittica è un toro)? Consideriamo le mappe π e u :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{T}_\Lambda & \longrightarrow & \mathcal{C}_\Lambda \\ & & z & \longmapsto & z + \Lambda & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ \wp(z) \\ \wp'(z) \end{pmatrix} \end{array}$$

e il differenziale $\alpha = \frac{dX}{Y}$ sulla curva \mathcal{C}_Λ ; allora abbiamo le immagini inverse $\eta = u^*(\alpha)$ su \mathbb{T}_Λ e $dz = \pi^*(\eta)$ (perché $(u \circ \pi)^*(\frac{dX}{Y}) = \frac{d\wp(z)}{\wp'(z)}$) su \mathbb{C} . Risulta allora che possiamo ricostruire il reticolo Λ tramite

$$\begin{aligned}\Lambda &= \left\{ \int_\gamma dz : \gamma \text{ cammino con estremi su } \Lambda \right\} \\ &= \left\{ \int_{\gamma'} \eta : \gamma' = \pi \circ \gamma \text{ cammino chiuso in } \mathbb{T}_\Lambda \right\} \\ &= \left\{ \int_{\gamma''} \eta : \gamma'' = u \circ \pi \circ \gamma \text{ cammino chiuso in } \mathcal{C}_\Lambda \right\}\end{aligned}$$

a partire da \mathcal{C}_Λ . Allora abbiamo che la funzione definita da

$$\begin{aligned}v : \mathcal{C}_\Lambda &\longrightarrow \mathbb{T}_\Lambda \\ P &\longmapsto v(P) = \int_\gamma \alpha \pmod{\Lambda}\end{aligned}$$

ove γ è un qualunque cammino da $\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a P , è l'inversa di u . Poiché la suriettività di u è chiara da prima, basta mostrare che $v(u(z)) = z$ per ogni $z \in \mathbb{T}_\Lambda$ (e allora risulta che u è anche iniettiva, e v ne è l'inversa). Ora, se $P = u(z)$, risulta

$$v(P) = \int_\infty^{P=u(z)} \alpha = \int_0^z \eta = \int_0^z dz = z + \lambda \equiv z \pmod{\Lambda}$$

e cioè $v(u(z)) = z$.

(10) conviene dimostrare, usando la funzione inversa v , che

$$P, Q, R \in \mathcal{C}_\Lambda \text{ sono allineati} \quad \text{se e solo se} \quad v(P) + v(Q) + v(R) \equiv 0 \pmod{\Lambda}.$$

Accettando il solo se, da $v(P) + v(Q) + v(R) \equiv 0 \pmod{\Lambda}$ e chiamando R' il terzo punto di \mathcal{C}_Λ su $P \vee Q$, abbiamo anche $v(P) + v(Q) + v(R') \equiv 0 \pmod{\Lambda}$, da cui $v(R) \equiv v(R') \pmod{\Lambda}$, e infine $R = uvR = uvR' = R'$, per cui $P, Q, R(=R')$ sono allineati.

Per il viceversa, si ragiona così: per ogni retta $r(a, b, c) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$ (piano duale) consideriamo i tre punti $p(a, b, c), q(a, b, c), r(a, b, c)$ della intersezione con \mathcal{C}_Λ , e sia

$$\mu(a, b, c) = \int_\infty^{p(a,b,c)} \alpha + \int_\infty^{q(a,b,c)} \alpha + \int_\infty^{r(a,b,c)} \alpha$$

funzione sul piano duale a valori complessi. Se dimostriamo che ristretta ad ogni stella del piano ($\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^* \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$ è funzione olomorfa, limitata e quindi costante, risulta identicamente nulla, poiché per $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ vale $0 + \Lambda$.

Per vedere che è olomorfa, consideriamo intorno ad ogni punto (in cui l'equazione della curva abbia derivata non nulla rispetto alla X) delle carte $x_i : D(0, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$ tali che $\begin{pmatrix} x_i \\ y \end{pmatrix}$ descrivano i tre tratti di curva intorno a $p_0 = p(a_0, b_0, c_0), q_0 = q(a_0, b_0, c_0), r_0 = r(a_0, b_0, c_0)$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \mu(a, b, c) &= \int_\infty^{p(a,b,c)} \alpha + \int_\infty^{q(a,b,c)} \alpha + \int_\infty^{r(a,b,c)} \alpha \\ &= \int_\infty^{p_0} \alpha + \int_\infty^{q_0} \alpha + \int_\infty^{r_0} \alpha + \int_{p_0}^{p(a,b,c)} \alpha + \int_{q_0}^{q(a,b,c)} \alpha + \int_{r_0}^{r(a,b,c)} \alpha \\ &= \int_\infty^{p_0} \alpha + \int_\infty^{q_0} \alpha + \int_\infty^{r_0} \alpha + \int_0^{z_1} \frac{x'_1(y)}{y} dy + \int_0^{z_2} \frac{x'_2(y)}{y} dy + \int_0^{z_3} \frac{x'_3(y)}{y} dy \end{aligned}$$

che sono integrali di funzioni olomorfe in y per il teorema del Dini (si osservi che y divide $x'_i(y)$ per ogni i : perché?). □

3.3.3. PROBLEMA. Analogamente al punto (8), o usandolo, si studino le relazioni funzionali che coinvolgono $\wp''(z)$.

3.3.4. Perché nella definizione di \wp la sommatoria è indicata su $\Lambda \setminus \{0\}$?

3.3.5. STRUTTURA DI GRUPPO. Si osservi che l'ultimo punto può essere interpretato anche dicendo che le "formule di addizione" per \wp e \wp' (cioè espressioni per $\wp(z_1 + z_2)$ e $\wp'(z_1 + z_2)$ in termini di $\wp(z_1), \wp(z_2), \wp'(z_1), \wp'(z_2)$) corrispondono a quelle per le coordinate X e Y della legge di gruppo delle curve ellittiche; anche se estremamente contaccioso, una verifica diretta di questo è possibile, e dà un'altra dimostrazione del risultato.

3.3.6. PUNTI DI TORSIONE SU TORO E CURVA ELLITTICA. L'identificazione toro-curve ellittica permette di capire meglio la struttura di gruppo delle curve ellittiche, visto che sul toro l'operazione è semplicemente il quoziente della addizione di \mathbb{C} . Per esempio:

- (1) vi sono esattamente 4 punti di 2-torsione;
- (2) vi sono esattamente 9 punti di 3-torsione (e corrispondono ai 9 flessi della curva ellittica; se ne ricordi la configurazione, e la si confronti con la posizione nel toro...);
- (3) per ogni n , vi sono esattamente n^2 punti di n -torsione.

3.4. THETA DI RIEMANN E FUNZIONI MEROMORFE. Per studiare le funzioni meromorfe sul toro, conviene studiare il toro \mathbb{T}_τ (ricordiamo che è definito per $\Im(\tau) > 0$, e il reticolo è $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$); abbiamo

già detto che a meno di isomorfismo tutti i tori sono di questa forma. Ricordiamo anche che le funzioni sul toro si identificano con funzioni sul piano complesso che siano periodiche sul reticolo.

3.4.1. FUNZIONE THETA DI RIEMANN. *La serie di Fourier*

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)$$

converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ (\mathbb{H} è il semipiano di \mathbb{C} con parte immaginaria positiva: di dice semipiano di Poincaré), e dunque definisce una funzione olomorfa $\vartheta : \mathbb{C} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$.

Infatti, ogni compatto K di $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ è contenuto in un insieme del tipo

$$U_{\varepsilon, c} = \{(z, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H} : \Im(\tau) > \varepsilon, \operatorname{im} z < c\}$$

con $\varepsilon, c \in \mathbb{R}_{>0}$. Ora, per ogni $(z, \tau) \in U_{\varepsilon, c}$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$ risulta

$$\begin{aligned} |\exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)| &= |\exp(\pi i n^2 \tau)| |\exp(2\pi i n z)| \\ &= \exp(-\pi \Im(\tau))^{n^2} \exp(-2\pi \Im(z))^{2|n|} \\ &< \exp(-\pi \varepsilon)^{n^2} \exp(2\pi |\Im(z)|)^{|n|} \\ &< \exp(-\pi \varepsilon)^{n^2} \exp(2\pi c)^{|n|} \end{aligned}$$

e considerando che $\exp(-\pi \varepsilon)^{-n}$ tende a ∞ per $n \rightarrow \infty$, abbiamo che esiste n_0 tale che $\exp(-\pi \varepsilon)^{-n_0} > \exp(2\pi c)$, e possiamo concludere la stima con

$$< \exp(-\pi \varepsilon)^{n^2 - |n|n_0}.$$

Considerando allora la serie di Fourier abbiamo che

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=-N}^N \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z) \right| &\leq \sum_{n=-N}^N |\exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)| \\ &\leq 1 + 2 \sum_{n=1}^N \exp(-\pi \varepsilon)^{n^2 - nn_0} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^N (\exp(-\pi \varepsilon)^{n - n_0})^n \end{aligned}$$

e basta considerare che $\exp(-\pi \varepsilon)^{n - n_0} < \exp(-\pi \varepsilon) < 1$ per $n > n_0$. \square

3.4.2. Si osservi che la theta di Riemann non è periodica sul reticolo Λ_τ , e quindi non definisce una funzione sul toro \mathbb{T}_τ ; altrimenti sarebbe intera e limitata su \mathbb{C} , quindi costante.

3.4.3. COMPORTAMENTO SUL RETICOLO. La variazione di theta sul reticolo Λ_τ generato da 1 e τ è descritta da:

- (i) $\vartheta(z + 1, \tau) = \vartheta(z, \tau)$ (periodica rispetto ad 1);
- (ii) $\vartheta(z + \tau, \tau) = \exp(-\pi i \tau - 2\pi i z) \vartheta(z, \tau)$;
- (iii) $\vartheta(z + m\tau + n, \tau) = \exp(-\pi i m^2 \tau - 2\pi i m z) \vartheta(z, \tau)$.

Le verifiche si fanno tramite calcoli diretti sui termini, passando poi alla somma: per la prima

$$\exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n(z + 1)) = \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z) \exp(2\pi i n) = \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z),$$

per la seconda

$$\begin{aligned} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n(z + \tau)) &= \exp(\pi i (n + 1)^2 \tau - 2\pi i n \tau - \pi i \tau + 2\pi i (n + 1)z - 2\pi i z + 2\pi i n \tau) \\ &= \exp(\pi i (n + 1)^2 \tau + 2\pi i (n + 1)z) \exp(-\pi i \tau - 2\pi i z), \end{aligned}$$

e per la terza basta usare induzione su m :

$$\begin{aligned} \vartheta(z + m\tau + n, \tau) &= \vartheta(z + m\tau + n, \tau) \\ &= \exp(-\pi i \tau - 2\pi i (z + (m - 1)\tau)) \vartheta(z + (m - 1)\tau, \tau) \\ &= \exp(-\pi i \tau - 2\pi i (z + (m - 1)\tau)) \exp(-\pi i (m - 1)^2 \tau - 2\pi i (m - 1)z) \vartheta(z, \tau) \\ &= \exp(-\pi i m^2 \tau - 2\pi i m z) \vartheta(z, \tau) \end{aligned}$$

□

3.4.4. ZERI DELLA THETA. Osserviamo prima di tutto che la funzione (di z) data da

$$\exp(-\pi im^2\tau - 2\pi imz)$$

è olomorfa invertibile (mai nulla) du \mathbb{C} , e di conseguenza dalle formule precedenti risulta che per ogni $P \in \mathbb{C}$ si ha

$$\text{ord}_P \vartheta(z + m\tau + n, \tau) = \text{ord}_P \vartheta(z, \tau)$$

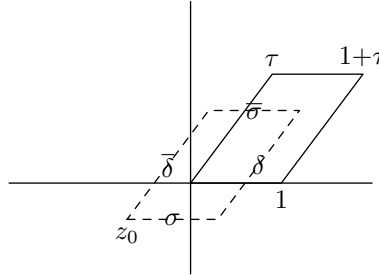
ovvero per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ si ha

$$\text{ord}_{z_0+m\tau+n} \vartheta(z, \tau) = \text{ord}_{z_0} \vartheta(z, \tau)$$

cosicché, se z_0 è zero di ordine e , allora ogni elemento di $z_0 + \Lambda_\tau$ è zero di ordine e .

Gli zeri di $\vartheta(z, \tau)$ sono tutti e soli i punti dell'insieme $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + \Lambda_\tau$, e sono tutti di ordine 1.

Per la verifica, poiché la theta non ha poli, basta usare l'indicatore logaritmico: se γ è contorno di un parallelogrammo fondamentale di vertici $z_0, z_0 + 1, z_0 + 1 + \tau, z_0 + \tau$ che eviti gli zeri di $\vartheta(z, \tau)$, possiamo scrivere nell'ordine $\gamma = \sigma + \delta + \bar{\sigma} + \bar{\delta}$ (quattro lati su cui integrare).



Poiché

$$\frac{\vartheta'(z + 1, \tau)}{\vartheta(z + 1, \tau)} = \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)} \quad \text{e} \quad \frac{\vartheta'(z + \tau, \tau)}{\vartheta(z + \tau, \tau)} = -2\pi i + \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)}$$

abbiamo che

$$\int_{\delta} \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)} dz = - \int_{\delta} \frac{\vartheta'(z + 1, \tau)}{\vartheta(z + 1, \tau)} dz = - \int_{\delta} \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)} dz$$

e

$$\int_{\bar{\sigma}} \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)} dz = - \int_{\sigma} \frac{\vartheta'(z + \tau, \tau)}{\vartheta(z + \tau, \tau)} dz = \int_{\sigma} 2\pi i dz - \int_{\sigma} \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)} dz$$

da cui risulta infine che l'indicatore logaritmico vale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} 2\pi i dz = [z]_{z_0}^{z_0+1} = 1$$

e dunque c'è un solo zero all'interno di γ .

Per localizzare lo zero, osserviamo prima di tutto che theta è pari in z , cioè $\vartheta(-z, \tau) = \vartheta(z, \tau)$, e quindi l'unico zero a deve essere tale che $a \equiv -a \pmod{\Lambda_\tau}$ (altrimenti ci sarebbero due zeri in un dominio fondamentale), e dunque lo zero va cercato tra i punti di 2-torsione di \mathbb{T}_τ , e vi sono quattro possibilità: $0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}$. Poniamo

$$\begin{aligned} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) &= \exp\left(\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) \vartheta\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, \tau\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

e mostriamo che si tratta di una funzione dispari, cioè $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-z, \tau) = -\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau)$, cosicché l'unico suo zero è in 0, e l'unico zero di $\vartheta(z, \tau)$ nel dominio fondamentale risulta esattamente $\frac{1+\tau}{2}$. Infatti:

$$\exp\left(\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n \left(z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)\right) = \exp\left(\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{2}\right)\right)$$

da cui, scambiando z con $-z$, e poi $n + \frac{1}{2}$ con $-m - \frac{1}{2}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \exp\left(\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(-z + \frac{1}{2}\right)\right) &= \exp\left(\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(-m - \frac{1}{2}\right) \left(-z + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(-2\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= - \exp\left(\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

e infine sommando si ha la disparità voluta. \square

3.4.5. FATTORI AUTOMORFI. Dalla dimostrazione precedente sappiamo allora come costruire una funzione olomorfa su \mathbb{C} avente zeri semplici su tutti i punti dell'insieme $z_0 + \Lambda_\tau$; infatti basta usare la funzione traslata

$$\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(z_0)}(z, \tau) = \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z - z_0, \tau).$$

Controlliamo per questa funzione gli effetti delle traslazioni sul reticolo:

$$\begin{aligned} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(z_0)}(z + m\tau + n, \tau) &= \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z - z_0 + m\tau + n, \tau) \\ &= \exp\left(\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i \left(z - z_0 + m\tau + n + \frac{1}{2}\right)\right) \vartheta\left(z - z_0 + m\tau + n + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, \tau\right) \\ &= \exp\left(\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i \left(z - z_0 + m\tau + n + \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(-\pi i m^2 \tau - 2\pi i m \left(z - z_0 + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)\right) \vartheta\left(z - z_0 + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, \tau\right) \\ &= \exp(\pi i n - \pi i m - \pi i m^2 \tau - 2\pi i m z) \exp(2\pi i m z_0) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(z_0)}(z, \tau) \end{aligned}$$

ove si sono distinti i fattori indipendenti da z_0 .

3.4.6. TEOREMA DI STRUTTURA DI $\mathcal{M}(\mathbb{T}_\tau)$. Se x_1, \dots, x_r e y_1, \dots, y_r sono elementi di \mathbb{C} tali che $\sum_i x_i - \sum_i y_i \in \mathbb{Z}$, allora la funzione definita da

$$\varphi(z) = \frac{\prod_i \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(x_i)}(z, \tau)}{\prod_i \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(y_i)}(z, \tau)}$$

è meromorfa su \mathbb{C} , periodica su Λ_τ , e quindi definisce una funzione meromorfa su \mathbb{T}_τ avente zeri nell'insieme $\{x_1, \dots, x_r\}$ e poli nell'insieme $\{y_1, \dots, y_r\}$.

Viceversa, ogni funzione $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T}_\tau)$ è del tipo precedente.

La prima parte dell'enunciato discende dal calcolo fatto dei fattori di olomorfia per le funzioni theta traslate (la condizione sulle traslazioni permette di semplificare i fattori che vi dipendono). Per la seconda parte dimostriamo che:

dati P_1, \dots, P_r e Q_1, \dots, Q_r in \mathbb{T}_τ (non necessariamente distinti), esiste una funzione $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T}_\tau)$ avente zeri nei P_i e poli nei Q_i se e solo se $\sum_i P_i - \sum_i Q_i = 0$ (somma sul toro \mathcal{T}_τ), ovvero se e solo se esistono rialzamenti x_1, \dots, x_r e y_1, \dots, y_r in \mathbb{C} tali che $\sum_i x_i - \sum_i y_i = 0$.

La sufficienza è già stata dimostrata; per la necessità ragioniamo così: se $\sum_i P_i - \sum_i Q_i \neq 0$, scegliamo P_0 e Q_0 tali che $(P_0 + \sum_i P_i) - (Q_0 + \sum_i Q_i) = 0$. Se g è meromorfa con zeri in P_1, \dots, P_r e poli in Q_1, \dots, Q_r (ipotesi assurda), e f è meromorfa con zeri in P_0, P_1, \dots, P_r e poli in Q_0, Q_1, \dots, Q_r (sappiamo costruirla usando le theta traslate), allora f/g sarebbe funzione meromorfa sul toro con un solo zero, ed un solo polo, ma allora darebbe un isomorfismo del toro con la sfera di Riemann, che è assurdo. \square

3.4.7. Si osservi che sul toro non esistono funzioni meromorfe con un solo polo: perché? E perché non è possibile ottenerne con rapporti di funzioni theta?

3.4.8. ALTRA COSTRUZIONE PER $\mathcal{M}(\mathbb{T}_\tau)$. Il teorema per $\mathcal{M}(\mathbb{T}_\tau)$ appena esposto può essere visto come analogo del teorema di struttura per funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann, come rapporto di polinomi (dello stesso grado, se omogenei). Analogamente alla espressione delle funzioni razionali come somme di frazioni parziali (??), anche nel caso del toro possiamo esprimere ogni funzione meromorfa come somma di derivate prime logaritmiche delle theta traslate. Precisamente, se $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ con $\sum_i \lambda_i = 0$, allora

$$\sum_i \lambda_i \frac{d}{dz} \log \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(a_i)}(z, \tau)$$

è periodica sul reticolo Λ_τ , dunque definisce una funzione meromorfa sul toro \mathbb{T}_τ , con poli semplici in a_i e residui λ_i . Di nuovo in questo modo si ottiene tutto $\mathcal{M}(\mathbb{T}_\tau)$.

3.4.9. WEIERSTRASS IN FUNZIONE DI RIEMANN. Il modo più semplice per ottenere la funzione di Weierstrass in termini delle theta di Riemann, è di notare che $\log \vartheta(z, \tau)$ è periodica sul reticolo a meno di una funzione lineare nella z ; quindi la derivata seconda

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \vartheta(z, \tau)$$

definisce una funzione meromorfa sul toro; in effetti la funzione

$$-\frac{d^2}{dz^2} \log \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau)$$

differisce per una costante da $\wp(z)$.

3.4.10. IMMERSIONI PROIETTIVE VIA THETA. Analogamente a quanto fatto per $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau)$, definiamo per $a, b \in \mathbb{C}$ le funzioni

$$\begin{aligned} \vartheta_{a,b}(z, \tau) &= \exp(\pi i a^2 \tau + 2\pi i a(z+b)) \vartheta(z+a\tau+b, \tau) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\pi i (n+a)^2 \tau + 2\pi i (n+a)(z+b) \right). \end{aligned}$$

Allora l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{T}_\tau \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \quad z \longmapsto \begin{pmatrix} \vartheta_{0,0}(z, \tau) \\ \vartheta_{0, \frac{1}{2}}(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{2}, 0}(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \end{pmatrix}$$

è una immersione di \mathbb{T}_τ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ che identifica il toro con la curva data dalla intersezione delle due quadriche di equazioni

$$\vartheta_{0,0}(0)^2 X_0^2 = \vartheta_{0, \frac{1}{2}}(0)^2 X_1^2 + \vartheta_{\frac{1}{2}, 0}(0)^2 X_2^2 \quad \text{e} \quad \vartheta_{0,0}(0)^2 X_3^2 = \vartheta_{\frac{1}{2}, 0}(0)^2 X_1^2 - \vartheta_{0, \frac{1}{2}}(0)^2 X_2^2$$

(di che quadriche si tratta?).

La dimostrazione di questo fatto non è semplice, e si basa sulle relazioni di Riemann per le theta. Si può vedere nel primo volume dei "Tata on Theta" di Mumford.

3.5. SPAZIO DI MODULI DEI TORI COMPLESSI. Vogliamo ora studiare l'insieme di tutti i tori, e rispondere all'ovvio problema di classificazione: dire quando due tori sono isomorfi (biomorfi) e trovare uno spazio che dia rappresentanti per ogni classe di isomorfismo.

3.5.1. Abbiamo già osservato (e anche usato) che per ogni reticolo $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, il toro \mathbb{T}_Λ è isomorfo ad un toro \mathbb{T}_τ il cui reticolo è dato da $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ con $\tau \in \mathbb{H}$. Questo risultato è facile, poiché la moltiplicazione per $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ è un isomorfismo di \mathbb{C} , e se manda un reticolo Λ in un reticolo Λ' , allora dà un isomorfismo $\mathbb{T}_\Lambda \rightarrow \mathbb{T}_{\Lambda'}$ (con inverso indotto dalla moltiplicazione per $1/\alpha$). Nel caso in questione possiamo usare $\alpha = 1/\omega_1$ se im $(\omega_2/\omega_1) > 0$ (altrimenti si scambiano preventivamente ω_1 e ω_2).

Resta quindi da vedere quando due tori del tipo \mathbb{T}_τ con $\tau \in \mathbb{H}$ risultano tra loro biomorfi.

3.5.2. TEOREMA. Siano $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$; allora \mathbb{T}_τ e $\mathbb{T}_{\tau'}$ sono biomorfi se e solo se $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Il se è facile, poiché le uguaglianze

$$k\tau' = a\tau + b \quad \text{e} \quad k = c\tau + d$$

danno che la mappa di moltiplicazione per k in \mathbb{C} invia Λ' in Λ , dando quindi una mappa olomorfa $\mathbb{T}_{\tau'} \rightarrow \mathbb{T}_\tau$. Per simmetria si ottiene la mappa inversa.

Per verificare il solo se, si procede così: dato $f : \mathbb{T}_\tau \rightarrow \mathbb{T}_{\tau'}$ biomorfismo, si cerca un rialzamento $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (cioè tale che $\pi' \circ F = f \circ \pi$: commuti con le proiezioni sui tori). L'esistenza locale di tali rialzamenti è chiara (per esempio sulle carte dei tori), ed è anche chiaro che due rialzamenti locali differiscono per una costante appartenente al reticolo Λ' ; quindi le derivate dei rialzamenti locali danno luogo ad una ben definita funzione F' su \mathbb{C} , e consideriamo F una primitiva di F' . Ora abbiamo $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\pi' \circ F = f \circ \pi$, e quindi

$$\begin{cases} F(z+\tau') = F(z) + a\tau + b \\ F(z+1) = F(z) + c\tau + d \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} F'(z+\tau') = F'(z) \\ F'(z+1) = F'(z) \end{cases}$$

e quindi F' è costante (intera e limitata perché periodica), per cui $F(z) = \gamma z + \delta$ con $\gamma \neq 0$ e $\delta \in \Lambda'$, e possiamo usare $F(z) = \gamma z$. Allora le espressioni di prima diventano

$$\begin{cases} \gamma(z+\tau') = \gamma z + a\tau + b \\ \gamma(z+1) = \gamma z + c\tau + d \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \gamma\tau' = a\tau + b \\ \gamma = c\tau + d \end{cases}$$

e risulta che $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Per simmetria sulla funzione inversa abbiamo che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ (i.e. con determinante ± 1), ma considerando che $\Im(\tau') = \frac{ad-bc}{|a+b\tau^2|} \Im(\tau)$ otteniamo che il determinante è positivo, quindi 1. \square

3.5.3. TEOREMA DI STRUTTURA DELLO SPAZIO DI MODULI DEI TORI. *Consideriamo il semipiano di Poincaré \mathbb{H} , e l'azione sinistra di $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ su \mathbb{H} identificata nel teorema precedente:*

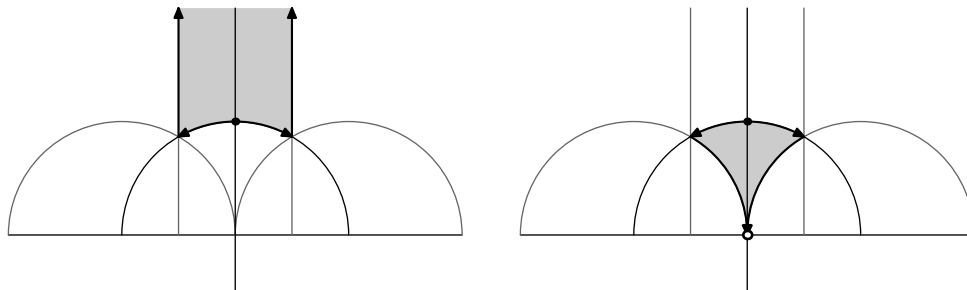
$$\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau \right) \longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Allora le classi di biolomorfia di tori complessi si identificano con i punti dello spazio quoziente $\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$.

Il risultato è solo una riscrittura del teorema precedente. Si noti che l'azione è sinistra, e quindi è classico scrivere il quoziente "a sinistra".

Vediamo invece meglio la forma dell'insieme quoziente.

3.5.4. Il gruppo $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ è moltiplicativamente generato dalle matrici $\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (traslazione reale: $\tau \mapsto \tau + 1$) e $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (controinversione: $\tau \mapsto -1/\tau$). Dunque l'insieme quoziente del teorema (lo spazio di moduli dei tori) può essere rappresentato da uno dei seguenti sottinsiemi di \mathbb{C} (che si scambiano tra loro tramite σ):



soggetti ad opportune identificazioni dei bordi. Quali esattamente?

Da queste osservazioni si può concludere che lo spazio di moduli dei tori complessi è una SdR non compatta, la cui compattificazione con un punto dà una sfera di Riemann (cioè una SdR di genere zero).

4. Esempi: curve algebriche complesse.

4.1. CURVE NON SINGOLARI. Ogni curva algebrica proiettiva piana non singolare è una SdR compatta: un atlante oloomorfo si può ottenere applicando intorno ad ogni suo punto il teorema del Dini della funzione implicita. Le funzioni di transizione sono chiaramente oloomorfe, poiché si riducono all'identità o alla stessa funzione implicita.

4.1.1. FUNZIONI OLOMORFE E MEROMORFE. Trattandosi di SdR compatte, le funzioni oloomorfe sono solo le costanti, mentre le funzioni meromorfe sono in corrispondenza con il corpo delle frazioni di $\mathbb{C}[X, Y]/(f)$ ove $f = f(X, Y)$ è una equazione per la curva data.

4.2. CURVE IRRIDUCIBILI SINGOLARI. Allo stesso modo, data una curva proiettiva piana irriducibile, fuori dei punti singolari è possibile costruire un atlante oloomorfo, e quindi ottenere per la curva escluse le singolarità una struttura di SdR non compatta. Per un miglior risultato, si consideri il capitolo successivo.

5. Esempi: superficie di germi oloomorfi?

6. Esempi: curve modulari?

Teorema di normalizzazione (desingularizzazione).

In questo capitolo esplicheremo uno degli esempi cui abbiamo solo accennato nel capitolo precedente: ogni curva proiettiva liscia è una superficie di Riemann compatta (questo discende essenzialmente dal teorema del Dini), e ad ogni curva proiettiva (non necessariamente liscia) è associata una SdR compatta che differisce dalla curva solo nei punti singolari, e al posto di ciascuno di essi presenta un numero finito di punti.

Se la curva proiettiva di partenza è razionale, chiaramente la sfera di Riemann ne è una desingularizzazione (corrispondenza biolomorfa fuori della singolarità, e ogni punto singolare è raggiunto da un numero finito di valori del parametro). Questo da un lato ci dice che una curva proiettiva è razionale se e solo se (la SdR associata) è di genere zero; dall'altro lato ci permette di vedere il procedimento di "desingularizzazione" come una tecnica di "parametrizzazione" di curve algebriche tramite i punti di una SdR compatta, generalizzando la parametrizzazione di una curva razionale tramite la sfera di Riemann.

1. Struttura locale delle singolarità.

1.1. TEOREMA DI STRUTTURA LOCALE DEI PUNTI SINGOLARI. *Sia \mathcal{C} una curva algebrica proiettiva piana complessa, P un punto m -uplo di \mathcal{C} , e si sia scelto un riferimento proiettivo tale che \mathcal{C} non abbia tangenti verticali in P . Allora esiste un intorno (analitico del piano) U di P , della forma $U = D_1 \times D_2$ con D_1 e D_2 dischi aperti, tale che la proiezione $\pi_1 : U \cap \mathcal{C} \rightarrow D_1$ sia rivestimento ramificato con esattamente m fogli, e P sia l'unico punto di ramificazione.*

Infatti, fuori di P si può usare direttamente il teorema del Dini. Per $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, applichiamo l'indicatore logaritmico su una equazione $f(x, y)$ di \mathcal{C} e sul bordo di D_2 : eventualmente restringendo D_2 e tenendo conto che in P c'è uno zero di molteplicità m risulta:

$$m - 1 < \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} d \log f(x_0, y) < m + 1$$

(si tratta di una funzione continua a valori interi che per $y = y_0$ vale m), quindi eventualmente restringendo D_2 il valore è costantemente m . □

1.1.1. PUNTI ISOLATI. Si osservi che dalla descrizione precedente si ottiene subito che una curva algebrica complessa non ha punti isolati (cosa che invece può succedere per il suo scheletro reale).

1.1.2. RAMI ANALITICI. Il teorema giustifica la definizione seguente: si dice ramo analitico di \mathcal{C} in P il dato di:

- un intorno connesso B di P in \mathcal{C} , avente P come (eventuale) unico punto singolare;
- una mappa olomorfa $s : A \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ con A aperto connesso di \mathbb{C} contenente 0 , $s(0) = P$, tale che: $s : A \rightarrow B$ sia omeomorfismo e $s : A \setminus \{0\} \rightarrow B \setminus \{P\}$ sia immersione di $A \setminus \{0\}$ in $U \setminus \{P\}$ ove U è un intorno di P in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

Tali funzioni s si dicono parametrizzazioni del ramo analitico.

1.1.3. RAMI LINEARI. Dalla definizione segue che $\frac{ds}{dz}(z) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per ogni $z \in A \setminus \{0\}$. Il ramo si dice lineare se $\frac{ds}{dz}(0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.1.4. PARAMETRIZZAZIONI NORMALIZZATE. È facile notare che due parametrizzazioni di uno stesso ramo analitico differiscono per la composizione con una funzione olomorfa tra i domini di definizione. In particolare parleremo di parametrizzazione normalizzata quando si abbia s del tipo

$$\begin{pmatrix} s_1(z) \\ s_2(z) \end{pmatrix} = s(0) + \begin{pmatrix} z^m \\ O(z^m) \end{pmatrix}$$

(che si può sempre ottenere a partire da una qualunque parametrizzazione).

1.2. TEOREMA DI STRUTTURA ANALITICA DELLE SINGOLARITÀ ALGEBRICHE. Sia \mathcal{C} una curva algebrica proiettiva piana complessa, P un punto m -uplo di \mathcal{C} . Allora esistono V intorno connesso di P in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, $V = B_1 \cup \dots \cup B_k$ con $k \leq m$ dove i B_i sono rami analitici di \mathcal{C} in P e ogni B_i è omeomorfo ad un disco di \mathbb{C} , con $B_i \cap B_j = \{P\}$ se $i \neq j$. Inoltre per ogni $V' \subseteq V$ si ha $V' = B'_1 \cup \dots \cup B'_k$ con $B'_i = V' \cap B_i$.

Usiamo $V = U \cap \mathcal{C}$ del teorema precedente, e decomponiamo $V^* = V \setminus \{P\}$ nell'unione disgiunta delle sue componenti connesse $V^* = B_1^* \sqcup \dots \sqcup B_k^*$ (dove certamente $k \leq n$). Per costruzione la proiezione $\pi_1 : B_i^* \rightarrow D_1^*$ è un rivestimento con k_i fogli, ove $\sum_i k_i = m$. Allora basta osservare che ogni $B_i = B_i^* \cup \{P\}$ è un ramo analitico di \mathcal{C} in P . \square

1.2.1. RELAZIONE CON I RAMI ALGEBRICI. È facile osservare che la fattorizzazione tramite serie formali del polinomio (centrato nel punto singolare) che definisce i posti algebrici della curva (e le loro parametrizzazioni) dà luogo a parametrizzazioni tramite serie formali convergenti, e quindi corrispondono ai rami analitici in quel punto. In particolare si ottiene una interpretazione topologica per i posti (algebrici) nel caso di curve complesse: corrispondono alle componenti connesse di un intorno (bucato, cioè privato del punto) del punto singolare nella curva. Si osservi che ciò non può essere riconosciuto sullo scheletro reale della curva.

1.3. ASPETTO TOPOLOGICO DELLE SINGOLARITÀ?

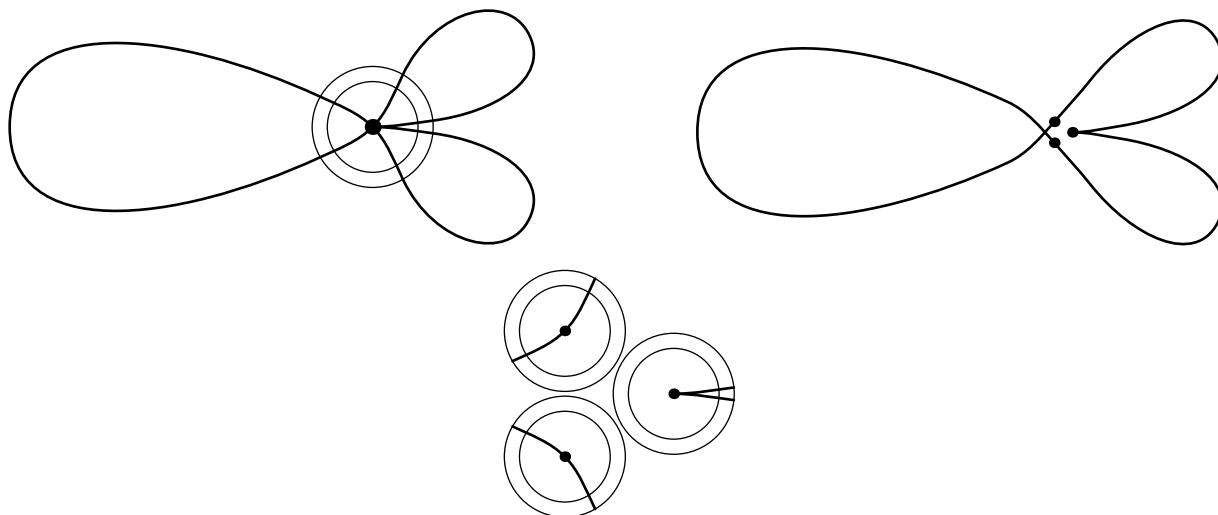
2. Teorema di desingularizzazione.

2.1. TEOREMA DI NORMALIZZAZIONE. Sia \mathcal{C} una curva algebrica proiettiva piana complessa irriducibile. Allora esistono una SdR compatta $\tilde{\mathcal{C}}$ e una applicazione suriettiva $\mu : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ tali che

- (1) μ è biomorfa fuori dei punti singolari di \mathcal{C} ;
- (2) μ induce per ogni punto singolare P di \mathcal{C} una biiezione tra i rami analitici di \mathcal{C} in P e i punti di $\tilde{\mathcal{C}}$ con immagine P .

Inoltre $\tilde{\mathcal{C}}$ gode della proprietà universale relativa a μ , cioè fattorizza unicamente ogni altra coppia $\tilde{\mathcal{C}}', \mu'$ con le stesse proprietà, e quindi è unica a meno di biolomorfismi.

Si tratta di scegliere per ogni punto singolare due intorni, uno contenuto nell'altro per cui valga la descrizione fatta della struttura della singolarità (decomposizione in rami analitici), sostituire ogni ramo con rivestimenti ramificati standard, e incollare i nuovi aperti al resto della superficie usando la corona tra i due intorni. L'immaginazione può tornare utile:



Dal procedimento è chiaro come ottenere un atlante per $\tilde{\mathcal{C}}$, e anche la funzione μ . L'unica proprietà che è difficile da provare è il fatto che $\tilde{\mathcal{C}}$ sia connessa (e dipende dal fatto che \mathcal{C} è irriducibile). \square

2.1.1. CONNESSIONE DELLA DESINGOLARIZZATA. Vi sono essenzialmente due strategie possibili per dimostrare che $\tilde{\mathcal{C}}$ è connessa. La prima è di mostrare che una sconnessione di $\tilde{\mathcal{C}}$ porta alla riducibilità di \mathcal{C} stessa: usando la fattorizzazione in serie formali della equazione di \mathcal{C} in un punto

singolare, la sconnessione permette di dividere i fattori in due gruppi, ciascuno dei quali deve dar luogo ad un polinomio. La seconda strategia è di usare il corpo delle funzioni meromorfe di $\tilde{\mathcal{C}}$.

2.1.2. DESCRIZIONE DELLE FUNZIONI MEROMORFE. Dette x e y le proiezioni di \mathcal{C} sui due assi affini usuali, risulta che

$$\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{C}}) \cong \mathcal{Q}(\mathbb{C}[x, y]) \cong \mathcal{Q}(\mathbb{C}[X, Y]/(f(X, Y))) \cong \mathcal{Q}_0(\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]/(F(X_0, X_1, X_2)))$$

se $f(X, Y)$ è una equazione affine per \mathcal{C} , e $F(X_0, X_1, X_2)$ ne è l'equazione proiettiva omogeneizzata.

Ora, su ogni componente connessa di $\tilde{\mathcal{C}}$, consideriamo la (restrizione della) funzione meromorfa x ; si tratta di un rivestimento ramificato di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ il cui numero di fogli è

$$\deg(x) = [\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{C}}) : \mathbb{C}(x)] \geq [\mathbb{C}(x, y) : \mathbb{C}(x)] = n$$

da cui segue subito che vi è una unica componente connessa.

2.2. STRATEGIE DI DESINGOLARIZZAZIONE. Il problema di associare ad ogni curva algebrica una "curva" non singolare che ne sia il più possibile vicina si può affrontare in almeno tre modi sostanzialmente diversi:

2.2.1. VIA SDR. Come abbiamo appena fatto, si desingularizza una curva algebrica tramite una SdR compatta, che è un oggetto analitico, a priori. Noi vedremo come conseguenza del teorema di Riemann-Roch che ogni SdR compatta si realizza come curva algebrica liscia in qualche spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (anche con $n = 3$, ma non necessariamente con $n = 2$, come già sappiamo). Quindi alla fine si dispone di una desingularizzazione di una curva algebrica tramite un'altra curva algebrica.

2.2.2. VIA TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE. Un altro metodo per desingularizzare curve algebriche consiste nell'utilizzare alcune trasformazioni (essenzialmente algebriche, come blow-up e trasformazioni quadratiche) per ottenere una curva algebrica non singolare modificando il minimo possibile la curva di partenza. Si tratta di metodi che hanno il vantaggio di rimanere in un ambito di curve algebriche, ma sono più difficili.

2.2.3. VIA CURVE ASTRATTE. Un ulteriore metodo è del tutto astratto, e consiste nel definire le curve astratte come la collezione di tutti i sottoanelli di valutazione discreta (e il cui corpo quoziente sia l'intero corpo) di un corpo di trascendenza 1 sul corpo di base. Allora ad ogni curva proiettiva \mathcal{C} resta associato il suo "anello delle coordinate" $K[\mathcal{C}] = K[X, Y]/f(X, Y)$ e il suo corpo quoziente $K(\mathcal{C})$ ("corpo delle funzioni razionali"), e dunque la curva astratta formata dagli anelli di valutazione discreta di $K(\mathcal{C})$ contenenti $K[\mathcal{C}]$. A tale insieme, dotato della topologia di Zariski (aperti sono i cofiniti), si può poi dare una realizzazione come curva proiettiva liscia in qualche spazio proiettivo.

3. Applicazioni ed Esempi.

3.1. DEFINIZIONE DEL GENERE PER CURVE SINGOLARI. Il teorema di desingularizzazione giustifica la definizione, già data, del genere per una curva proiettiva singolare, e anche i metodi di calcolo che avevamo già adottato nel primo capitolo: sia tramite Riemann-Hurwitz, sia tramite Plücker.

3.2. TEOREMA DI BÉZOUT PER VIA ANALITICA. Le espressioni analitiche dei rami di una curva nei punti singolari permette una definizione di origine analitica (ma chiaramente coincidente con quella algebrica tramite i posti della curva) della molteplicità di intersezione di due curve in un punto. Siccome si tratta di sommare gli ordini nella variabile locale della sostituzione dei rami analitici di una curva nell'equazione dell'altra, questa definizione porta quasi subito ad una dimostrazione del teorema di Bézout.

3.3. ESEMPLI.

3.3.1. NODO. Per la cubica nodale di equazione $Y^2 = X^2(1 + X)$ sappiamo che l'unico punto singolare è l'origine con due rami lineari. Essendo razionale (genere zero) è normalizzata dalla sfera di Riemann tramite $\mu(t) = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ t(t^2-1) \end{pmatrix}$ che presenta due punti distinti ($t = \pm 1$) sopra il punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Considerando la proiezione della curva sull'asse delle ascisse, si tratta di un rivestimento con due fogli, e vi sono due punti di ramificazione: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e il punto improprio delle ordinate.

Considerando la proiezione sull'asse delle ordinate?

3.3.2. CUSPIDE. Per la cubica cuspidale di equazione $Y^2 = X^3$ sappiamo che l'unico punto singolare è l'origine con un unico ramo. Essendo razionale (genere zero) è normalizzata dalla sfera di Riemann tramite $\mu(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ 1 \end{pmatrix}$ che presenta un solo punto ($t = \pm 0$) sopra il punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Considerando la proiezione della curva sull'asse delle ascisse, si tratta di un rivestimento con due fogli, e vi sono due punti di ramificazione: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il punto improprio delle ordinate.

Considerando la proiezione sull'asse delle ordinate?

3.3.3. IPERGEOMETRICHE. Distinguiamo i due casi:

- (1) grado pari: usiamo $Y^2 = X^{2m} - 1$, e per mettere nell'origine l'unico punto singolare consideriamo l'equazione $X^{2m} = Z^{2m-2}(1 - Z^2)$. Nel punto singolare vi sono due rami, ciascuno dei quali di ordine m .

Considerando la proiezione della curva sull'asse delle Z , si tratta di un rivestimento con $2m$ fogli, e vi sono due punti di ramificazione $2m - 1$, oltre ai due posti del punto singolare, ciascuno con ramificazione $m - 1$; quindi la ramificazione totale è $2(3m - 2)$ e il teorema di Riemann-Hurwitz dà genere $m - 1$.

Considerando la proiezione sull'asse delle X (attenzione: non è l'usuale rivestimento con 2 fogli, poiché non stiamo usando il piano affine X, Y)?

- (2) grado dispari: usiamo $Y^2 = X^{2m+1} - 1$, e per mettere nell'origine l'unico punto singolare consideriamo l'equazione $X^{2m+1} = Z^{2m-1}(1 - Z^2)$. Nel punto singolare vi è un solo ramo, di ordine $2m + 1$.

Considerando la proiezione della curva sull'asse delle Z , si tratta di un rivestimento con $2m + 1$ fogli, e vi sono due punti di ramificazione $2m$, oltre al posto del punto singolare, con ramificazione $2m$; quindi la ramificazione totale è $2(3m)$ e il teorema di Riemann-Hurwitz dà genere m .

Considerando la proiezione sull'asse delle X (attenzione: non è l'usuale rivestimento con 2 fogli, poiché non stiamo usando il piano affine X, Y)?

3.4. RIVESTIMENTI D'ORDINE d DI $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Per esercizio, studiare i casi di equazioni $Y^d = p(X)$ con $p(X)$ polinomio di grado maggiore di d , privo di zeri multipli.

3.5. ALTRI ESEMPLI. Si possono studiare le curve del primo capitolo.

Capitolo IV

Teorema di Riemann-Roch.

In questo capitolo introdurremo preliminari, enunciato, alcune applicazioni e un tentativo di dimostrazione del principale teorema riguardo le SdR compatte, che è il teorema di Riemann-Roch; si tratta di determinare la dimensione dello spazio vettoriale su \mathbb{C} delle funzioni meromorfe sulla superficie soggette a fissate condizioni (controllate da un divisore). Queste conoscenze permettono di iniziare la classificazione delle SdR compatte, di determinarne le immersioni negli spazi proiettivi e molto altro ancora.

0. Differenziali.

Per dare la definizione di differenziale sulle superficie di Riemann S , conviene osservare che una funzione meromorfa f su S può essere vista come una collezione di aperti U_i di un ricoprimento e di una funzione f_i su ciascuno di essi, con le condizioni che $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ per ogni i, j (condizioni di incollamento per le funzioni). Usando gli aperti di un atlante, con carte $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ (e mappe di transizione φ_{ij}), allora il dato di una funzione f equivale alla collezione di funzioni f_i sulla carta V_i soggette alla condizione che $f_j = f_i \circ \varphi_{ij}$ per ogni i, j .

0.1. DEFINIZIONE (DIFFERENZIALI OLMORFI E MEROMORFI SULLE SDR). *Un differenziale su una SdR è una collezione $\{(U_i, \omega_i)\}_i$ dove gli U_i sono aperti di un ricoprimento di S dotato di carte $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ (aperti di \mathbb{C}), $\omega_i = f_i(z)dz$ sono differenziali sulle carte, soggetti alle condizioni di compatibilità seguenti: se φ_{ij} sono le mappe di transizione, allora per ogni i, j dev'essere $\omega_j = (\omega_i \circ \varphi_{ij})\varphi'_{ij}$. I differenziali si dicono olomorfi o meromorfi a seconda che lo siano tutte le espressioni locali. Il \mathbb{C} -spazio vettoriale dei differenziali olomorfi si indica con $\Omega^1(S)$, quello dei differenziali meromorfi con $\mathcal{M}^1(S)$.*

0.2. OSSERVAZIONI. Conviene fare subito una serie di osservazioni sulla definizione.

0.2.1. ESPRESSIONI GLOBALI. Non è detto che per un differenziale su S si possa trovare una descrizione globale, cioè usando S come unico aperto. Però, ogni differenziale è definito (se esiste) dalla sua espressione in qualunque carta (per il principio di identità analitico: due differenziali coincidono se coincidono su un insieme con un punto di accumulazione).

Per esempio $\exp(z)dz$ è differenziale su \mathbb{C} , ma non definisce alcun differenziale su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Altro esempio: $\sqrt{z}dz$ è differenziale su \mathbb{C} privato di una semiretta per l'origine, ma non definisce alcun differenziale su \mathbb{C} privato dell'origine.

0.2.2. REGOLARITÀ. Eventualmente parleremo di differenziali con regolarità \mathcal{C}^m e \mathcal{C}^∞ usando espressioni locali con dx, dy , oppure con $dz, d\bar{z}$.

0.2.3. FUNZIONI. Ovviamente, se ω è un differenziale meromorfo su S , e f una funzione meromorfa, allora $f\omega$, ovviamente definito, è un differenziale meromorfo (basta controllarne il comportamento sulle mappe di transizione). Vi è una specie di inversa di questa osservazione.

Se ω_1 e ω_2 sono differenziali meromorfi (o olomorfi) su S , allora esiste una unica funzione meromorfa f su S tale che $\omega_1 = f\omega_2$. Di solito si dice che il rapporto tra due differenziali meromorfi (o olomorfi) dà una funzione meromorfa.

Infatti possiamo supporre che entrambi i differenziali siano definiti sugli aperti di uno stesso atlante, siano $\omega_1 = \{f_1^{(i)}dz_i\}_i$ e $\omega_2 = \{f_2^{(i)}dz_i\}_i$; allora si verifica subito che la collezione $\{f_1^{(i)}/f_2^{(i)}\}_i$ definisce una funzione meromorfa su S (basta controllare il comportamento sulle mappe di transizione).

Quindi, noto un differenziale meromorfo su una SdR, tutti gli altri si ottengono moltiplicando quello noto per funzioni meromorfe. Cioè abbiamo una biiezione $\mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}^1(X)$ mandando f in $f\omega_0$, ove ω_0 è qualunque elemento di $\mathcal{M}^1(X)$. Si faccia attenzione: analoghe affermazioni sono false per i differenziali olomorfi.

0.2.4. DIFFERENZIALI DI FUNZIONI MEROMORFE. Naturalmente, ad ogni funzione meromorfa, e più in generale ad ogni mappa tra SdR, rimane associato il suo differenziale, che è definito sugli aperti di un ricoprimento differenziando la funzione stessa. Si tratta di una mappa lineare $d : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}_1(X)$. Come si comporta rispetto al prodotto di funzioni?

0.3. GRADO DI DIFFERENZIALI. L'ordine di un differenziale meromorfo ω in un punto $P \in S$ è definito come l'ordine in P di una sua espressione locale su un aperto coordinato contenente P . Cioè $\text{ord}_P(\omega) = \text{ord}_P(f)$ se $\omega = f dz$ è espressione di ω in $U \ni P$.

Si dice grado di un differenziale la somma estesa a tutti i punti di S dei suoi ordini (è ben definito, essendo gli ordini nulli in quasi tutti i punti).

Chiaramente abbiamo $\text{ord}_P(f\omega) = \text{ord}_P(f) + \text{ord}_P(\omega)$, e poiché la somma degli ordini di ogni funzione meromorfa è zero, ne risulta che tutti i differenziali su una SdR compatta hanno lo stesso grado.

0.4. ESEMPI. Piccoli esempi per fare esperienza.

0.4.1. SFERA DI RIEMANN. Su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ consideriamo il differenziale dz definito sulla carta $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \infty$. Naturalmente si ha $\text{ord}_P(dz) = 0$ per ogni $P \neq \infty$. Per controllare il comportamento su ∞ , usiamo la mappa di transizione $z \mapsto 1/z$, e otteniamo che

$$\text{ord}_\infty(dz) = \text{ord}_0 d\left(\frac{1}{z}\right) = \text{ord}_0\left(\frac{1}{z^2} dz\right) = -2$$

e quindi concludiamo che esso ha grado -2 . Si tratta di un differenziale meromorfo, ma non olomorfo.

Per esercizio, si consideri il differenziale definito da $d \log z = \frac{dz}{z}$ nella carta priva di ∞ (ha ordine -1 sia nell'origine che nell'infinito).

0.4.2. TORI. Per i tori è chiaro che il differenziale dz ha ordine nullo in ogni punto, e quindi è olomorfo e di grado 0.

0.4.3. CURVE ELLITTICHE. Consideriamo le curve ellittiche definite da equazioni del tipo $Y^2 = X^3 - \alpha X - \beta$. Differenziando l'equazione otteniamo che $2Y dY = (3X^2 - \alpha) dX$, da cui

$$\frac{dX}{Y} = 2 \frac{dY}{3X^2 - \alpha}$$

e si vede che il differenziale $\frac{dX}{Y}$ ha ordine nullo in ogni punto del piano affine. Un facile cambiamento di carte permette di mostrare che ha ordine zero anche nell'unico punto improprio della curva, e quindi trattarsi di un differenziale olomorfo.

0.4.4. CURVE PIANE LISCE. Data una curva piana liscia di equazione $F(X_0, X_1, X_2)$, polinomio omogeneo di grado d maggiore di 2, consideriamo la sua equazione affine usuale $f(X, Y) = F(1, X, Y)$. Differenziando tale equazione troviamo $\frac{\partial f}{\partial X} dX = -\frac{\partial f}{\partial Y} dY$, da cui possiamo dedurre che il differenziale definito da

$$\frac{dX}{\partial f / \partial Y} = -\frac{dY}{\partial f / \partial X}$$

è olomorfo in tutti i punti del piano affine. Verifichiamo in effetti che per ogni polinomio $p(X, Y)$ di grado minore o uguale a $d - 3$ il differenziale

$$p(X, Y) \frac{dX}{\partial f / \partial Y}$$

è olomorfo. Questo è chiaro in tutti i punti affini, e bisogna controllare il comportamento nei punti impropri. Per questo consideriamo il cambiamento di carta da $(X = X_1/X_0, Y = X_2/X_0)$ a $(\zeta = X_0/X_1, \eta = X_2/X_1)$, per cui risulta che

$$X = \frac{1}{\zeta}, \quad Y = \frac{\eta}{\zeta}, \quad dX = d\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

e otteniamo per il nostro differenziale l'espressione

$$p(X, Y) \frac{dX}{\partial f / \partial Y} = -\frac{p(\zeta, \eta)}{\zeta^r} \frac{\zeta^{d-1} d\zeta}{q(\zeta, \eta) \zeta^2} = -\frac{p(\zeta, \eta)}{q(\zeta, \eta)} \zeta^{d-r-3} d\zeta$$

ove si è posto $(\partial f / \partial Y)(\frac{1}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}) = \frac{q(\zeta, \eta)}{\zeta^{d-1}}$. Da questo si deduce appunto che l'espressione rimane olomorfa anche nei punti impropri solo per $d - r - 3 \geq 0$, ovvero per $r \leq d - 3$.

0.4.5. IPERELLITTICHE. Per esercizio, si consideri il caso delle curve iperellittiche di equazioni $Y^2 = h(X)$ ove $h(X)$ è polinomio privo di zeri multipli, e di grado $2g + 1$ oppure $2g + 2$ con $g \leq 1$ (nel qual caso sappiamo già che si tratta di curve di genere g). In particolare si dimostri che differenziali del tipo $p(X) \frac{dX}{Y}$ sono olomorfi se $p(X)$ è polinomio di grado minore o uguale a $g - 1$.

0.4.6. RIVESTIMENTI D'ORDINE d DELLA RETTA. Per esercizio, si esplori il caso dei rivestimenti d'ordine d della retta proiettiva nella forma $Y^d = h(X)$ con $h(X)$ polinomio di grado maggiore di d .

0.4.7. PROBLEMA. Per altri esercizi si considerino le curve del primo capitolo. In ogni caso si descrivano i differenziali olomorfi.

0.5. IMMAGINE INVERSA DI DIFFERENZIALI. Se $F : X \rightarrow Y$ è una mappa olomorfa tra SdR, e ω è un differenziale su Y , diciamo $\omega = \{(U_i, \omega_i = f_i dz_i)\}_i$, allora definiamo il differenziale immagine inversa su X tramite la posizione $F^*(\omega) = \{(F^{-1}U_i, F^*\omega_i = (f_i \circ F) dF)\}_i$.

Si controlla subito che la posizione è ben posta, e che $F^*\omega$ è meromorfo (risp. olomorfo) se ω lo è.

0.5.1. COMPOSIZIONE. È facile verificare che $\text{id}^*(\omega) = \omega$ e $(G \circ F)^*\omega = F^*(G^*\omega)$.

0.5.2. Se f è funzione meromorfa su Y , allora $F^*(f) = f \circ F$ lo è su X , e abbiamo che $F^*(df) = d(F^*(f))$. Cioè immagine inversa (per funzioni e differenziali) e differenziazione commutano tra loro.

0.5.3. ORDINI E RAMIFICAZIONE. Mostriamo che

$$\text{ord}_P(F^*\omega) = \text{ord}_{F(P)}(\omega) \text{molt}_P(F) + \text{ram}_P(F) .$$

Infatti, da $F(z) = z^{\text{molt}_P(F)}$ e da $\omega = \zeta^{\text{ord}_{F(P)}(\omega)} d\zeta$ (sviluppi al primo termine), si trova subito che

$$\begin{aligned} F^*(\omega) &= (z^{\text{molt}_P(F)})^{\text{ord}_{F(P)}(\omega)} z^{\text{molt}_P(F)-1} dz \\ &= z^{\text{molt}_P(F)\text{ord}_{F(P)}(\omega) + \text{molt}_P(F)-1} dz \end{aligned}$$

(al primo termine), e dunque il risultato voluto.

0.6. TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE DIFFERENZIALE DEL GENERE). Per ogni $\omega \in \mathcal{M}^1(S)$, risulta $\text{deg} \omega = 2g - 2$, se g è il genere di S .

Poiché due differenziali meromorfi differiscono per il prodotto con una funzione meromorfa, è chiaro che tutti i differenziali hanno lo stesso grado (poiché le funzioni hanno tutte ordine nullo). Sia $f \in \mathcal{M}(S)$, $f \neq 0$ (ne supponiamo l'esistenza). Allora f è mappa olomorfa da S in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, e possiamo considerare $\omega = f^*dz$. Risulta

$$\text{ord}_P(\omega) = \text{ord}_{f(P)}(dz) \text{molt}_P(f) + \text{ram}_P(f) = \begin{cases} \text{ram}_P(f) & \text{se } f(P) \neq \infty \\ \text{ram}_P(f) - 2\text{molt}_\infty(f) & \text{se } f(P) = \infty \end{cases}$$

da cui si ottiene subito che

$$\text{deg}(\omega) = \sum_P \text{ord}_P(\omega) = \text{ram}(f) - 2 \text{deg}(f) = 2g - 2$$

ove si è tenuto conto del teorema di Riemann-Hurwitz per f , ovvero che $2(g - 1) = 2(0 - 1) \text{deg}(f) + \text{ram}(f)$, e cioè $\text{ram}(f) = 2 \text{deg}(f) + 2(g - 1)$. \square

0.7. RESIDUI DI DIFFERENZIALI. Per ogni differenziale ω su una SdR, e per ogni punto $P \in X$ definiamo il residuo $\text{Res}_P \omega$ come il residuo della funzione f_P in P ove $\omega = f_P(z_P) dz_P$ è una espressione locale di ω in una carta intorno a P .

0.7.1. TERMINOLOGIA CLASSICA. Di solito si chiamano differenziali di prima specie i differenziali olomorfi, di seconda specie i differenziali meromorfi con residuo nullo in ogni punto, di terza specie i differenziali meromorfi con al più poli semplici. Si osserva subito che un differenziale è di prima specie se e solo se è contemporaneamente di seconda e di terza specie.

0.7.2. TEOREMA DEI RESIDUI. Per ogni differenziale meromorfo su una SdR compatta X si ha che la somma dei residui è zero: $\sum_{P \in X} \text{Res}_P \omega = 0$.

Infatti per ogni polo P_i possiamo considerare un disco D_i non contenente altri poli; chiamiamo D il complementare in X di $\bigcup_i D_i$; allora abbiamo

$$\sum_{P \in X} \text{Res}_P \omega = \sum_i \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_i} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sum_i \partial D_i} \omega = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega = \frac{-1}{2\pi i} \iint_D d\omega = 0$$

1. Divisori sulle Superficie di Riemann Compatte.

D'ora in poi studieremo solo SdR compatte, a meno che non sia detto esplicitamente altro.

1.1. DEFINIZIONE (DIVISORI). Sia X una SdR; il gruppo dei divisori di X è il gruppo abeliano libero generato dai punti di X :

$$\text{Div}(X) = \mathbb{Z}^{(X)} = \{D : X \rightarrow \mathbb{Z} : \text{quasi ovunque nulle}\}.$$

Se $D \in \text{Div}(X)$, scriviamo $D = \sum_{P \in X} D_P P$ e anche $D_P = \text{ord}_P D$ (ordine in P di D), che è un intero, nullo per quasi tutti i punti $P \in X$. Si dice supporto del divisore D l'insieme $\{P \in X : \text{ord}_P(D) \neq 0\}$.

1.1.1. ORDINE TRA DIVISORI. Se $D, D' \in \text{Div}(X)$ diciamo che $D \leq D'$ se e solo se per ogni $P \in X$ si ha $\text{ord}_P D \leq \text{ord}_P D'$. Si chiamano divisori positivi i divisori D tali che $D \geq 0$, cioè con $\text{ord}_P D \geq 0$ per ogni $P \in X$.

1.1.2. GRADO DI DIVISORI. Il grado dei divisori è la funzione

$$\text{deg} : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

definita da $\text{deg}(D) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P D$ (ben definita per la finitezza di D). Si tratta chiaramente di un morfismo suriettivo di gruppi, e il nucleo si indica con

$$\text{Div}_0(X) = \ker(\text{deg}) = \{D \in \text{Div}(X) : \text{deg}(D) = 0\}$$

e si chiama il sottogruppo dei divisori di grado zero.

1.2. DIVISORI PRINCIPALI. Abbiamo un morfismo di gruppi abeliani

$$\text{div} : \mathcal{M}(X) \setminus \{0\} \rightarrow \text{Div}(X)$$

che manda ogni funzione meromorfa f nel suo divisore $\text{div}(f) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P(f) P$ (spesso si estende alla funzione nulla dando come valore il "divisore" ∞).

Chiaramente, poiché X è compatta, risulta che $\ker(\text{div}) = \mathbb{C}^\times$ (funzioni costanti non nulle), e definiamo divisori principali quelli dell'immagine, cioè poniamo

$$\text{PDiv}(X) = \text{im}(\text{div}) = \{\text{div}(f) \in \text{Div}(X) : f \in \mathcal{M}(X)^\times\}.$$

Si tratta chiaramente di un sottogruppo di $\text{Div}_0(X)$ (poiché per ogni funzione meromorfa non nulla abbiamo $\text{deg} \text{div}(f) = 0$, in quanto $\sum_P \text{ord}_P(f) = 0$); di solito si tratta di un sottogruppo proprio.

1.2.1. Talvolta si usa la notazione $\text{div}(f) = \text{div}_0(f) - \text{div}_\infty(f)$, dove $\text{div}_0(f)$ e $\text{div}_\infty(f)$ sono detti rispettivamente divisori di zero e di infinito (o dei poli) di f , e sono definiti dal fatto di essere entrambi positivi a supporti disgiunti e di dare come differenza il divisore della funzione.

1.2.2. ESEMPLI. Nel caso della sfera di Riemann, sappiamo già che $\text{PDiv}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \text{Div}_0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ (ogni divisore di grado zero è il divisore di una funzione).

Nel caso del toro, sappiamo che un divisore è principale se e solo se è di grado zero e la sua somma per la legge di gruppo del toro è zero. Quindi sul toro vi sono divisori di grado zero non principali (per esempio?).

1.3. DIVISORI CANONICI. Abbiamo un morfismo di insiemi

$$\text{div} : \mathcal{M}^1(X) \setminus \{0\} \rightarrow \text{Div}(X)$$

che manda ogni differenziale meromorfo ω nel suo divisore $\text{div}(\omega) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P(\omega) P$ (spesso si estende al differenziale nullo dando come valore il "divisore" ∞).

Non si tratta di una applicazione di gruppi (perché il dominio non è un gruppo!) e definiamo divisori canonici quelli dell'immagine, cioè poniamo

$$\text{KDiv}(X) = \text{im}(\text{div}) = \{\text{div}(\omega) \in \text{Div}(X) : \omega \in \mathcal{M}^1(X)^\times\}.$$

Siccome si ha che $\text{div}(f\omega) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega)$, e ogni differenziale meromorfo si scrive $\omega = f\omega_0$ per un (qualsiasi) fissato non nullo $\omega_0 \in \mathcal{M}^1(X)$, ne segue che $\text{KDiv}(X) = \text{div}(\omega_0) + \text{PDiv}(X)$, cioè $\text{KDiv}(X)$ è una classe laterale di $\text{PDiv}(X)$ in $\text{Div}(X)$, e di solito è diversa da $\text{PDiv}(X)$.

1.4. IMMAGINE INVERSA DI DIVISORI. Se $F : X \rightarrow Y$ è una mappa olomorfa tra SdR, definiamo l'immagine inversa tramite F come l'applicazione

$$F^* : \text{Div}(Y) \rightarrow \text{Div}(X)$$

definita sui punti da $F^*(Q) = \sum_{P \in X, f(P)=Q} \text{mult}_P(F)P$, e poi estesa per linearità ai divisori: se $D = \sum_{Q \in Y} \text{ord}_Q(D)Q$, allora $F^*D = \sum_{Q \in Y} \text{ord}_Q(D)F^*Q$.

1.4.1. COMPOSIZIONE. Si tratta chiaramente di un morfismo di gruppi abeliani, e risulta $\text{id}^* = \text{id}$, e $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.

1.4.2. Risulta che $\deg(F^*D) = \deg(F) \deg(D)$. Dunque F^* dà una mappa di gruppi $F^* : \text{Div}_0(Y) \rightarrow \text{Div}_0(X)$.

1.4.3. DIVISORI DI FUNZIONI. Se f è funzione meromorfa su Y , allora $F^*(f) = f \circ F$ lo è su X , e abbiamo che $F^*(\text{div} f) = \text{div}(F^*(f))$. Cioè immagine inversa (per funzioni e divisori) commutano tra loro, e abbiamo una ben definita mappa di gruppi $F^* : \text{PDiv}(Y) \rightarrow \text{PDiv}(X)$.

1.4.4. DIVISORI DI DIFFERENZIALI E RIEMANN-HURWITZ. Si osservi invece che in generale F^* non manda divisori canonici in divisori canonici; quello che vale è un raffinamento del teorema di Riemann-Hurwitz che si può enunciare in questo modo. Sia $\text{Ram}(F) = \sum_{P \in X} \text{ram}_P(F)P$ il divisore di ramificazione di F . Allora per ogni differenziale $\omega \in \mathcal{M}^1(Y)$ abbiamo

$$\text{div}(F^*\omega) = F^*(\text{div}(\omega)) + \text{Ram}(F)$$

e $\text{Ram}(F) = \text{div}(dF)$.

L'ultima asserzione è essenzialmente ovvia (si veda una espressione canonica per F in ogni punto); per l'asserzione principale: se $\omega = f dz$ abbiamo

$$\begin{aligned} \text{div}(F^*\omega) &= \text{div}((f \circ F)dF) \\ &= \text{div}(f \circ F) + \text{div}(dF) \\ &= \text{div}(F^*f) + \text{Ram}(F) \\ &= F^*\text{div}(f) + \text{Ram}(F) \\ &= F^*\text{div}(\omega) + \text{Ram}(F) \end{aligned}$$

come si voleva. Si osservi che il teorema di Riemann-Hurwitz per i generi si ottiene da questa espressione passando al grado e ricordando la caratterizzazione differenziale del genere.

1.5. EQUIVALENZA LINEARE DI DIVISORI: GRUPPO DI PICARD. Diciamo che due divisori sono linearmente equivalenti, e scriviamo $D \sim D'$ se $D - D' \in \text{PDiv}(X)$, ovvero se e solo se la differenza è il divisore di una funzione meromorfa.

Chiamiamo gruppo di Picard di X (o gruppo delle classi di divisori) il gruppo quoziente

$$\text{Pic}(X) = \frac{\text{Div}(X)}{\text{PDiv}(X)}$$

dei divisori modulo divisori principali.

1.5.1. Si osserva subito che divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado, ma di solito il viceversa è falso (divisori dello stesso grado non sono necessariamente linearmente equivalenti: esempi?). Spesso si usa anche il quoziente $\text{Pic}_0(X) = \frac{\text{Div}_0(X)}{\text{PDiv}(X)}$, che è un sottogruppo di $\text{Pic}(X)$.

1.5.2. PROPRIETÀ DELL'EQUIVALENZA LINEARE.

- (1) $\text{div}_0(f) \sim \text{div}_\infty(f)$ per ogni $f \in \mathcal{M}(X)$;
- (2) $D \sim \text{div}(\omega)$ con $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ se e solo se $D \in \text{KDiv}(X)$, cioè i divisori canonici formano una classe di equivalenza lineare;
- (3) nel caso della sfera di Riemann si ha che $P \sim Q$ per ogni $P, Q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$; dunque $\text{Pic}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$;
- (4) se $F : X \rightarrow Y$ è mappa olomorfa, allora da $D \sim D'$ segue che $F^*D \sim F^*D'$ (perché $D - D' = \text{div}(f)$ implica che $F^*D - F^*D' = \text{div}(F^*f)$, oppure perché abbiamo già detto che F^* rispetta PDiv), e quindi F^* induce una mappa di gruppi $\text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X)$;
- (5) se $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è mappa olomorfa, allora tutte le fibre $f^*\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sono tra loro linearmente equivalenti. Quest'ultima proprietà giustifica il nome di equivalenza lineare usato: si tratta di "sezioni lineari" di mappe olomorfe verso la retta proiettiva.

1.5.3. Nel caso di curve algebriche immerse in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, tra le famiglie di divisori linearmente equivalenti tra loro troviamo le "sezioni iperpiane" della curva, cioè i divisori tagliati sulla curva dagli iperiani dello spazio proiettivo.

1.5.4. ESEMPI. Abbiamo già visto che nel caso della sfera di Riemann abbiamo $D \sim D'$ sse $\deg D = \deg D'$, e dunque $\text{Pic}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$ via la funzione $\deg : \text{Div}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{Z}$ (suriettiva con nucleo dato da $\text{PDiv}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$), e $\text{Pic}_0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \cong 0$.

Nel caso del toro abbiamo che la mappa $(\deg, s) : \text{Div}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ è suriettiva con nucleo dato da $\text{PDiv}(\mathbb{T})$, e quindi identifica $\text{Pic}(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ e $\text{Pic}_0(\mathbb{T}) \cong \mathbb{T}$.

2. Spazi di Funzioni e Differenziali associati a Divisori (enunciato di Riemann-Roch).

2.1. DEFINIZIONE (SPAZI $\mathcal{L}(D)$ E $\mathcal{K}(D)$). Sia X una SdR compatta, e sia $D \in \text{Div}(X)$ un suo divisore. Definiamo il \mathbb{C} -spazio vettoriale delle funzioni meromorfe controllate da D

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \text{div}(f) + D \geq 0\}$$

(si tratta delle funzioni meromorfe che possono avere poli in P d'ordine $\leq \text{ord}_P(D)$ se $\text{ord}_P(D) > 0$, devono avere zeri d'ordine $\geq \text{ord}_P(D)$ se $\text{ord}_P(D) < 0$, ed essere olomorfe altrove).

Definiamo il \mathbb{C} -spazio vettoriale dei differenziali meromorfi controllati da D

$$\mathcal{K}(D) = \{\omega \in \mathcal{M}^1(X) : \text{div}(f) \geq D\}$$

(si faccia attenzione al segno; si tratta dei differenziali meromorfi che possono avere poli in P d'ordine $\leq \text{ord}_P(D)$ se $\text{ord}_P(D) < 0$, devono avere zeri d'ordine $\geq \text{ord}_P(D)$ se $\text{ord}_P(D) > 0$, ed essere olomorfi altrove).

2.2. OSSERVAZIONI.

- (0) Usando il divisore nullo, troviamo che $\mathcal{L}(0) = \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$ (funzioni olomorfe), e $\mathcal{K}(0) = \Omega^1(X)$ (differenziali olomorfi).
- (1) Se $D \sim D'$ (linearmente equivalenti), allora abbiamo un isomorfismo di \mathbb{C} -spazi vettoriali $\mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(D')$ definito da $f \mapsto fg$ se $D - D' = \text{div}(g)$.
- (2) Sia $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ non nullo. Allora per ogni $D \in \text{Div}(X)$ abbiamo un isomorfismo di \mathbb{C} -spazi vettoriali $\mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{K}(\text{div}(\omega) - D)$ che manda f in $f\omega$. In particolare abbiamo $\mathcal{K}(\text{div}(\omega)) \cong \mathcal{L}(0) \cong \mathbb{C}$ e $\mathcal{K}(0) \cong \mathcal{L}(\text{div}(\omega))$.
- (3) (PRINCIPIO DI RECIPROCIÀ) Siano $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ e $D, E \in \text{Div}(X)$ tali che $D + E = \text{div}(\omega)$. Allora abbiamo isomorfismi canonici $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{K}(E)$ e $\mathcal{L}(E) \cong \mathcal{K}(D)$.
- (4) Se $D \leq D'$ allora risulta $\mathcal{L}(D) \leq \mathcal{L}(D')$ e $\mathcal{K}(D) \geq \mathcal{K}(D')$.
- (5) Se $\deg(D) < 0$ allora $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ (abbiamo imposto che le funzioni abbiano più zeri di quanti poli siano permessi).

2.3. PROBLEMA FONDAMENTALE. Ora, per ogni divisore abbiamo definito degli spazi di funzioni (e differenziali) meromorfi controllati dal divisore, e si tratta di \mathbb{C} -spazi vettoriali. Quindi la domanda fondamentale diventa decidere se si tratta di spazi di dimensione finita su \mathbb{C} , ed eventualmente trovarne la dimensione. Che siano di dimensione finita è facile, e lo dimostreremo subito; trovarne la dimensione è invece il teorema di Riemann-Roch, molto profondo e ricco di conseguenze.

2.4. TEOREMA (FINITEZZA). Sia $D \in \text{Div}(X)$, e poniamo $D = D_+ - D_-$ con $D_+, D_- \geq 0$ divisori positivi (o nulli). Allora $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) \leq \deg(D_+) + 1$; in particolare tutti gli spazi $\mathcal{L}(D)$ sono di dimensione finita su \mathbb{C} .

Vi sono due possibili ragionamenti per stabilire il risultato, ed entrambi saranno utili in futuro.

Il primo procede così: se $P \in X$ è tale che $n = \text{ord}_P(D) > 0$, consideriamo la mappa $\mathcal{L}(D) \rightarrow \mathbb{C}$ che manda f nel coefficiente a_{-n} del suo sviluppo di Laurent in P . Questa mappa è (lineare, quindi) suriettiva o nulla, e il suo nucleo è dato da $\mathcal{L}(D - P)$. Quindi $\mathcal{L}(D - P)$ o coincide con $\mathcal{L}(D)$, oppure è di codimensione 1 in $\mathcal{L}(D)$, e il risultato segue per induzione.

Il secondo procede così: se P_1, \dots, P_r sono i punti di X per cui $n_i = \text{ord}_{P_i}(D) > 0$, consideriamo la mappa $\mathcal{L}(D) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}^{n_i}$ che manda ogni funzione f nei coefficienti negativi dei suoi sviluppi di Laurent in ciascun P_i . Si tratta di una applicazione lineare il cui nucleo è formato da funzioni olomorfe, quindi costanti per compattezza di X . Il risultato segue allora dalla formula delle dimensioni. \square

2.5. TEOREMA (RIEMANN-ROCH). Sia $D \in \text{Div}(X)$. Abbiamo che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1 - g + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D)$$

ove: g è il genere della SdR X , e $K = \text{div}(\omega)$ con $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ non nullo è un qualunque divisore canonico (si ricordi che il grado di K è $2g - 2$).

Dedicheremo una sezione per illustrare la dimostrazione di questo teorema, anticipandone invece le applicazioni che sono del tutto indipendenti dalla sua dimostrazione.

2.6. PRIME APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI RIEMANN-ROCH.

2.6.1. INTERPRETAZIONE ANALITICA DEL GENERE. Usiamo $D = 0$. Allora risulta che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) = g$ (perché $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(0) = 1$, come abbiamo già osservato). D'altra parte $\mathcal{L}(K) \cong \mathcal{K}(0) = \Omega^1(X)$. Quindi otteniamo che il genere di una SdR compatta è la dimensione come \mathbb{C} -spazio vettoriale dello spazio dei differenziali olomorfi (interpretazione analitica del genere: $g = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(X)$).

2.6.2. DISUGUAGLIANZA DI RIEMANN. Siccome $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D) \geq 0$, dalla formula di Riemann-Roch segue subito che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) \geq \deg(D) + 1 - g$$

che è un teorema di esistenza di funzioni meromorfe su X ; in effetti per dimostrare il teorema di Riemann-Roch (o anche solo la disuguaglianza di Riemann) bisogna aver dimostrato che esistono funzioni meromorfe su ogni SdR compatta; noi non l'abbiamo fatto finora (se non per sfera e toro, nei quali casi abbiamo descritto completamente lo spazio delle funzioni meromorfe, e per le normalizzazioni di curve proiettive piane essenzialmente).

2.6.3. CASO DI DIVISORI "ABBASTANZA POSITIVI". Se $\deg(D) \geq 2g - 1$, allora $\deg(K - D) = \deg(K) - \deg(D) \leq 2g - 2 - (2g - 1) = -1 < 0$, e dunque il termine difficile della formula di Riemann-Roch scompare ($\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D) = 0$) e otteniamo la formula semplificata

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1 - g \quad \text{se} \quad \deg(D) \geq 2g - 1.$$

2.6.4. Se usiamo divisori D con $\deg(D) \geq g$ (risp. $> g$) allora otteniamo $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) \geq 1$ (risp. > 1). Si tratta di stime di esistenza di funzioni con limiti fissati sui poli permessi. Per esempio:

- (1) se $D = (g + 1)P$ con $P \in X$, otteniamo che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}((g + 1)P) \geq \deg((g + 1)P) + 1 - g = 2$, e dunque esistono funzioni non costanti aventi poli solo nel fissato punto P e in nessun altro punto di X . Di solito si dice che $\mathcal{M}(X)$ separa i punti di X , nel senso che per ogni coppia di punti $P, Q \in X$ esistono funzioni meromorfe f con $f(P) \neq f(Q)$.
- (2) consideriamo $P \in X$, e i divisori $D_n = nP$ con n sufficientemente grande (per esempio maggiore di $2g - 2$) per poter usare la formula semplificata; abbiamo allora $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_n) = n + 1 - g$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_{n+1}) = n + 2 - g$, da cui segue che $\mathcal{L}(D_n) \subsetneq \mathcal{L}(D_{n+1})$, e dunque esistono funzioni $f_{n+1} \in \mathcal{L}(D_{n+1}) \setminus \mathcal{L}(D_n)$ per ogni $n \gg 0$.

In particolare esistono funzioni meromorfe (per esempio f_{n+1}/f_n) aventi polo semplice in P . Di solito si dice che $\mathcal{M}(X)$ separa le tangenti di X , nel senso che per ogni punto $P \in X$ esistono funzioni meromorfe f con polo semplice in P .

2.7. ESEMPI. Controlliamo la situazione nei nostri due esempi standard:

2.7.1. SFERA DI RIEMANN. Dalla descrizione fatta delle funzioni meromorfe come quozienti di polinomi omogenei di ugual grado, otteniamo che

$$\mathcal{L}(D) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } \deg(D) < 0 \\ \{f(X) \prod_i (X - P_i)^{-\text{ord}_{P_i}(D)} : \deg f(X) \leq \deg(D)\} & \text{se } \deg(D) \geq 0 \end{cases}$$

ove $f(X)$ è polinomio (di grado $\leq \deg(D)$), e dunque che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \begin{cases} 0 & \text{se } \deg(D) < 0 \\ \deg(D) + 1 & \text{se } \deg(D) \geq 0 \end{cases}$$

che è la formula di Riemann-Roch per la sfera, poiché $g = 0$.

2.7.2. TORI COMPLESSI. Dalla descrizione fatta delle funzioni meromorfe come quozienti di theta traslate soggette alla condizione che le traslazioni abbiano somma intera, otteniamo che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \begin{cases} 0 & \text{se } \deg(D) < 0 \\ 0 & \text{se } \deg(D) = 0 \text{ e } D \not\sim 0 \\ 1 & \text{se } \deg(D) = 0 \text{ e } D \sim 0 \\ \deg(D) & \text{se } \deg(D) > 0 \end{cases}$$

(in realtà, i primi tre casi sono validi per ogni SdR compatta; il terzo caso è la formula di Riemann-Roch per i tori, poiché $g = 1$).

3. Sistemi lineari e mappe proiettive associate a Divisori.

3.1. DEFINIZIONE-TEOREMA (SISTEMI LINEARI DI DIVISORI). Sia $D \in \text{Div}(X)$ un divisore su una SdR compatta X . L'insieme

$$|D| = \{E \in \text{Div}(X) : E \geq 0, E \sim D\}$$

dei divisori non negativi linearmente equivalenti a D si dice sistema lineare completo di D e ha struttura di spazio proiettivo con spazio vettoriale sovrastante $\mathcal{L}(D)$ (dunque $\dim |D| = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 1$). Ogni sottovarietà lineare proiettiva di $|D|$ si dice un sistema lineare.

L'unica asserzione da verificare riguarda la struttura di spazio proiettivo, e si dimostra osservando che l'applicazione

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \longrightarrow |D| \quad \text{definita da} \quad f \longmapsto \text{div}(f) + D$$

è ben definita e chiaramente una biiezione. \square

3.1.1. GRADO E DIMENSIONE DI SISTEMI LINEARI. Dato un sistema lineare $G \leq |D|$, diciamo dimensione di G la sua dimensione come sottospazio proiettivo, e grado di G il grado di un qualunque suo elemento (hanno tutti lo stesso grado, trattandosi di divisori linearmente equivalenti tra loro).

3.1.2. PUNTI BASE DI SISTEMI LINEARI. Sia $D \in \text{Div}(X)$. Definiamo il divisore di base di D , o l'insieme dei punti base di D , come $B(D) = \inf\{E : E \in |D|\} = \bigcap_{E \in |D|} E$. Si tratta del divisore formato dai punti che appartengono ad ogni divisore del sistema lineare $|D|$ (stiamo confondendo il divisore $B(D)$ con il suo supporto).

È facile vedere che $P \in B(D)$ se e solo se $\mathcal{L}(D-P) = \mathcal{L}(D)$, e anche se e solo se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D-P) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D)$.

Di conseguenza, D non ha punti base (cioè $B(D) = 0$, ovvero vuoto) se e solo se per ogni $P \in X$ si ha che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D-P) + 1$.

Per un sistema lineare generico $G \leq |D|$, definiamo il divisore di base di G , o l'insieme dei punti base di G , come $B(G) = \inf\{E : E \in G\} = \bigcap_{E \in G} E$. Si verifica allora che $P \in B(G)$ se e solo se G ha come sovrastante uno spazio vettoriale $V \leq \mathcal{L}(D)$ tale che $V \leq \mathcal{L}(D-P)$.

3.1.3. RIMOZIONE DEI PUNTI BASE. Se $D \in \text{Div}(X)$ e $F = B(D)$, allora $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D-F)$ e il divisore $D-F$ non ha punti base.

3.2. DEFINIZIONE (MAPPE PROIETTIVE OLOMORFE). Sia X una SdR compatta. Una funzione $X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si dice ologomorfa se intorno ad ogni punto si scrive come $P \mapsto \begin{pmatrix} g_0(P) \\ \vdots \\ g_n(P) \end{pmatrix}$ con le funzioni g_i ologomorfe (in un intorno del punto). Si tratta in effetti delle mappe ologomorfe da X in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ in quanto varietà complesse (la seconda di dimensione n), e potremmo indicarle con $\mathcal{O}(X, \mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$.

3.2.1. Naturalmente, per costruire mappe proiettive ologomorfe, è inutile usare funzioni ologomorfe globali su X , poiché si otterrebbero solo mappe costanti. Il teorema seguente caratterizza le mappe proiettive ologomorfe in termini di funzioni meromorfe su X .

3.2.2. TEOREMA (COSTRUZIONE MEROMORFA DI MAPPE PROIETTIVE). Esiste una applicazione canonica

$$\mathbb{P}^n(\mathcal{M}(X)) \longrightarrow \mathcal{O}(X, \mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$$

che è una biiezione, e identifica le mappe ologomorfe $X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ con le $(n+1)$ -uple non nulle di funzioni meromorfe su X , a meno di fattori moltiplicativi non nulli in $\mathcal{M}(X)$.

L'unico punto delicato è in effetti la definizione dell'applicazione, che si ottiene in questo modo: se $\begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^n(\mathcal{M}(X))$ per ogni punto $P \in X$ poniamo $o_P = \min_i \text{ord}_P(g_i)$; allora $\min_i \text{ord}_P(z^{-o_P} g_i) = 0$

e ha senso porre $g(P) = (z^{-o_P} \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix})(P)$ (in quanto punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$). Questa corrispondenza dà chiaramente una biiezione. \square

Si osservi che la sottigliezza della costruzione consiste nel fatto che si vuol definire l'immagine in P anche quando tutte le g_i si annullano in P , oppure quando qualcuna delle g_i ha polo in P ; la soluzione è moltiplicare per una funzione meromorfa in modo tale che nessuna funzione abbia polo nel punto in cui calcolare, e almeno una abbia valore non nullo (cioè ordine nullo).

3.2.3. NON DEGENERAZIONE. Una mappa proiettiva oморфа $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è detta non degenerare se e solo se l'immagine $\varphi(X)$ non è contenuta in alcun iperpiano di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Questo equivale evidentemente a dire che la $(n+1)$ -upla di $\mathbb{P}^n(\mathcal{M}(X))$ corrispondente a φ è formata da funzioni meromorfe linearmente indipendenti su \mathbb{C} .

3.2.4. GRADO. Il grado di una mappa proiettiva oморфа $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è il numero di punti (contati con molteplicità) di intersezione dell'immagine $\varphi(X)$ con un generico iperpiano di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Non si confonda con il grado della funzione $X \rightarrow \varphi(X)$ tra SdRc.

La nozione di grado si può definire per qualunque curva algebrica in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ma si faccia attenzione che non si legge direttamente dal sistema di equazioni polinomiali che definisce la curva (se non nel piano proiettivo).

3.2.5. MAPPE DOMINANTI. Una mappa proiettiva oморфа $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si dice dominante se non si può ottenere per proiezione da mappe $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ con $m \geq n$. Ricordiamo che, dati $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \leq \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ e un complementare \mathbb{L} , la proiezione su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ di centro \mathbb{L} è la mappa π definita da $\pi(P) = (P \vee \mathbb{L}) \wedge \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ che va da $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{L}$ a $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

3.3. TEOREMA (CORRISPONDENZA FONDAMENTALE). *Esistono delle biiezioni canoniche*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistemi lineari senza p.b.} \\ \bullet \text{ di dimensione } n \\ \bullet \text{ di grado } r \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{Mappe oморfe non degeneri} \\ \bullet X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ \bullet \text{ (immagine) di grado } r \end{array} \right\} / \text{proiettività}$$

che si restringono a biiezioni canoniche tra i sottinsiemi

$$\{\text{Sistemi lineari completi}\} \cong \{\text{Mappe oморfe dominanti}\} / \text{proiettività}$$

Tutte le asserzioni seguono facilmente dalla costruzione delle due mappe, una inversa dell'altra, che ora diamo esplicitamente.

(\rightarrow) Dato un sistema lineare $G \leq |D|$, consideriamo il corrispondente sottospazio vettoriale V di $\mathcal{L}(D)$, e una sua base g_0, \dots, g_n su \mathbb{C} . L'elemento $\begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$ di $\mathbb{P}^n(\mathcal{M}(X))$ determina allora la

mappa proiettiva oморфа voluta.

Si osservi che la scelta di un'altra base di V determina un cambiamento della mappa per una proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

(\leftarrow) Data una mappa oморфа $g : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ abbiamo due costruzioni equivalenti per il sistema lineare associato.

- (1) La prima consiste nel considerare il divisore $D = -\min_i \text{div}(g_i)$, e definire il sistema lineare usando $V_g = \langle g_0, \dots, g_n \rangle_{\mathbb{C}}$ (sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(D)$) come $|g| = \{\text{div}(f) + D : f \in V_g\}$ (sottospazio proiettivo di $|D|$).

Si osservi che D dipende dalla scelta delle g_i , ma i sistemi lineari $|D|$ e $|g|$ dipendono solo da g .

- (2) La seconda costruzione è più geometrica e considera le sezioni iperplane di $g(X)$: se H è un iperpiano di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ di equazione η , scelto un iperpiano di equazione η_0 che non intersechi $H \cap g(X)$, definiamo $\text{div}(g^*H) \in \text{Div}(X)$ come il divisore di $\frac{\eta}{\eta_0} \circ g : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Allora $|g| = \{\text{div}(g^*H) : H \text{ iperpiano di } \mathbb{P}^n(\mathbb{C})\}$.

L'equivalenza dei due metodi si può vedere considerando un iperpiano H di equazione $\sum_i a_i X_i = 0$ e supponendo che g_0 abbia ordine minimo (possiamo supporre nullo) tra le g_i (nel punto P considerato). Allora nella costruzione (1) abbiamo il divisore $\text{div}(\sum_i a_i g_i) - \text{div}(g_0)$, mentre nella costruzione (2) otteniamo il divisore $\text{div}\left(\frac{\sum_i a_i X_i}{X_0} \circ g\right) = \text{div}\left(\frac{\sum_i a_i g_i}{g_0}\right) = \text{div}(\sum_i a_i g_i) - \text{div}(g_0)$.

Che le costruzioni siano una l'inversa dell'altra si vede facilmente considerando la costruzione (1) verso sinistra.

Che le mappe proiettive oloedre siano non degeneri dipende dal fatto che sono generate usando funzioni oloedre linearmente indipendenti su \mathbb{C} .

Che i sistemi lineari che si ottengono siano senza punti base si vede facilmente in base alla costruzione (2): per ogni punto c'è qualche iperpiano H che non lo contiene.

Infine che i sistemi completi corrispondano a mappe dominanti discende subito dalle definizioni corrispondenti. \square

3.3.1. A scanso di equivoci, si faccia attenzione al fatto che anche sistemi lineari con punti base danno luogo a mappe proiettive oloedre, usando esattamente la stessa costruzione; il punto è che danno luogo esattamente alla stessa mappa di un sistema lineare senza punti base. Pertanto questa richiesta nell'enunciato serve solo per ottenere una biiezione tra sistemi lineari senza p.b. e mappe oloedre a meno di proiettività; altrimenti si avrebbe una applicazione suriettiva tra sistemi lineari e mappe oloedre a meno di proiettività...

4. Sistemi molto ampi.

4.1. DEFINIZIONE-TEOREMA (DIVISORI MOLTO AMPI). La mappa proiettiva $g : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ definita dal (sistema lineare completo del) divisore D è:

- (1) iniettiva se e solo se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D - P - Q) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 2$ per ogni $P \neq Q$ punti di X ;
- (2) immersione (cioè iniettiva con differenziale mai nullo) se e solo se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D - P - Q) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 2$ per ogni $P, Q \in X$ (cioè anche per $P = Q$).

Un divisore si dice molto ampio se la mappa proiettiva corrispondente è una immersione, cioè se vale la seconda condizione.

Per la dimostrazione del teorema, basta osservare che $g(P) = g(Q)$ se e solo se $\mathcal{L}(D - P - Q) = \mathcal{L}(D - P) = \mathcal{L}(D - Q)$, e l'analoga asserzione per " $P = Q$ " (cioè quando in P si annulla il differenziale di g). \square

4.1.1. Si osservi che le mappe iniettive che non siano immersioni sono meno interessanti, perché danno luogo a curve singolari. Per esempio $z \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix}$ è iniettiva, ma non immersione e l'immagine nel piano contiene una cuspidale.

4.1.2. CONDIZIONI NUMERICHE. Come applicazione del teorema di Riemann-Roch vediamo ora criteri "numerici" sul grado dei divisori per essere senza p.b. e molto ampi.

- (1) Un divisore D con $\deg(D) \geq 2g$ non ha punti base. Infatti abbiamo che $K - D$ ha grado -2 e risulta

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) &= \deg(D) + 1 - g \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D - P) &= \deg(D - P) + 1 - g = \deg(D) - g \end{aligned}$$

da cui segue $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D - P) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 1$ come chiede il criterio.

- (2) Un divisore D con $\deg(D) \geq 2g + 1$ (non ha punti base ed) è molto ampio. Infatti abbiamo che $K - D$ ha grado -3 e risulta

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) &= \deg(D) + 1 - g \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D - P - Q) &= \deg(D - P - Q) + 1 - g = \deg(D) - g - 1 \end{aligned}$$

da cui segue $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D - P - Q) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 2$ come chiede il criterio.

4.1.3. Dalle osservazioni precedenti segue che ogni divisore $D \in \text{Div}(X)$ di grado d almeno $2g + 1$ immerge X come curva liscia (di grado d) in uno spazio proiettivo di dimensione $\dim |D| = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 1 = d + 1 - g \geq g + 2$.

Più precisamente, usando $D = (2g + 1)P$ per un fissato $P \in X$, possiamo avere una immersione $g : X \rightarrow \mathbb{P}^{\dim |D|}(\mathbb{C})$ come curva di grado d in modo tale che $X \setminus \{P\}$ si immerga in uno spazio affine $\mathbb{A}^{\dim |D|}(\mathbb{C})$. Infatti esiste un iperpiano H di $\mathbb{P}^{\dim |D|}(\mathbb{C})$ tale che $g^*H = (2g + 1)P$, e possiamo usare come spazio affine il complementare di H .

4.2. CURVE RAZIONALI NORMALI. Consideriamo la sfera di Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, che è di genere 0, per cui ogni divisore del tipo $D_n = n\infty$ è molto ampio se $n \geq 1$. Si vede subito che $\mathcal{L}(n\infty) =$

$\langle 1, z, z^2, \dots, z^n \rangle_{\mathbb{C}}$ e otteniamo le immersioni proiettive date da

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

$$z \equiv \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} z_0^n \\ z_0^{n-1} z_1 \\ \vdots \\ z_1^n \end{pmatrix}$$

dette immersioni di Veronese, le cui immagini si dicono le curve razionali normali. Esploriamo i primi casi:

- (1) per $n = 1$ troviamo la funzione identica di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in sè.
- (2) per $n = 2$ troviamo l'immersione di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ come conica non degenera di equazione $Z_0 Z_2 - Z_1^2$.
- (3) per $n = 3$ troviamo l'immersione di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ come curva di grado 3 definita parametricamente da

$$\begin{cases} Z_0 = \mu^3 \\ Z_1 = \lambda \mu^2 \\ Z_2 = \lambda^2 \mu \\ Z_3 = \lambda^3 \end{cases}$$

(detta cubica sghemba) ovvero per esempio dalle tre equazioni cartesiane

$$Z_0 Z_2 - Z_1^2, \quad Z_0 Z_3 - Z_1 Z_2, \quad Z_0^2 Z_3 - Z_1^3.$$

Si osservi l'interessante fenomeno per cui una curva nello spazio proiettivo tridimensionale può aver bisogno di tre equazioni per essere definita globalmente (rinunciando ad una equazione si hanno altre componenti). Però nell'intorno di ogni punto (in effetti in opportuni spazi affini) sono sufficienti due equazioni (come ci si aspetta) per definire la curva: si dice allora che si tratta di una curva "localmente ad intersezione completa", ma non "ad intersezione completa".

4.3. CURVE ELLITTICHE NORMALI. Consideriamo il toro \mathbb{T} , che è di genere 1, per cui ogni divisore del tipo $D_n = nP$ è molto ampio se $n \geq 3$. In questo caso $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP) = n$ e dunque tali divisori determinano immersioni $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ come curva di grado n :

- (1) per $n = 3$ abbiamo $\mathbb{T} \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ come cubica liscia;
- (2) per $n = 4$ abbiamo $\mathbb{T} \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ come curva liscia di grado 4;
- (3) per $n = 5$ abbiamo $\mathbb{T} \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ come curva liscia di grado 5.

Le immagini di tali immersioni si dicono curve ellittiche normali.

5. Sistemi canonici (e SdR ipergeometriche).

Un sistema lineare particolarmente importante è quello canonico, associato al divisore di un qualsiasi differenziale. Chiaramente nel caso della sfera di Riemann tale sistema lineare è nullo, quindi non interessante. Ricordiamo che se $K = \text{div}(\omega)$ con $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$, allora $\deg K = 2g - 2$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) = g$ (quindi il sistema canonico ha grado $2g - 2$ e dimensione $g - 1$).

5.1. TEOREMA (PUNTI BASE CANONICI). Se $g \geq 1$ il sistema canonico è privo di punti base.

Infatti basta verificare che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - P) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) - 1 = g - 1$ per ogni $P \in X$, e questo segue dalle uguaglianze

$$1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = \deg(P) + 1 - g + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - P)$$

(la prima perché $g \geq 1$, la seconda per Riemann-Roch). □

5.1.1. Da questo segue che la mappa proiettiva $k : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})$ definita da K ha come sezioni iperpiani esattamente il sistema lineare completo di K .

5.2. Cerchiamo di capire quando la mappa canonica è una immersione. Dal criterio generale sappiamo che k è immersione se e solo se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - P - Q) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) - 2$ per ogni $P, Q \in X$.

Viceversa, k non è immersione se e solo se esistono $P, Q \in X$ tali che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - P - Q) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) - 1 = g - 1.$$

Usando il teorema di Riemann-Roch possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - P - Q) &= \deg(K - P - Q) + 1 - g + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P + Q) \\ &= \deg(K) - 2 + 1 - g + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P + Q) \\ &= g - 3 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P + Q) \end{aligned}$$

e quindi la condizione di non immersione equivale alla esistenza di $P, Q \in X$ tali che

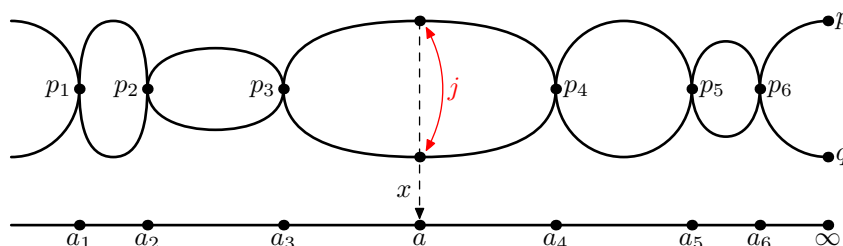
$$g - 3 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P + Q) = g - 1,$$

e insomma $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P + Q) = 2$. Questo significa che esiste una funzione non costante in $\mathcal{L}(P + Q)$, dunque una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ che sia rivestimento ramificato con 2 fogli.

Questo motiva la seguente definizione.

5.3. DEFINIZIONE (SDR IPERELLITTICHE). Una SdR compatta si dice iperellittica se ammette una funzione meromorfa che dia un rivestimento di grado 2 della sfera di Riemann.

5.3.1. REALIZZAZIONI PIANE PER LE SDR IPERELLITTICHE. Sia X SdR iperellittica di genere g ; dunque per ipotesi esiste una mappa ologomorfa $x : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ di grado 2 (rivestimento ramificato con 2 fogli). Dal teorema di Riemann-Hurwitz possiamo dedurre che $\text{ram}(x) = 2g + 2$ (inoltre ogni punto di ramificazione ha ramificazione 1: di più non può!), e allora abbiamo $\text{Ram}(x) = p_1 + \dots + p_{2g+2}$. Sia $\text{div}_{\infty}(x) = p + q$ (possiamo supporre che non sia di ramificazione, modulo comporre con una proiettività della retta). Diciamo $a_i = x(p_i)$ per ogni $i = 1, \dots, 2g + 2$. Il seguente disegno può illustrare la situazione:



Definiamo la mappa $j : X \rightarrow X$ che per ogni $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ scambia tra loro le (due) antimmagini di a tramite x . Ovviamente abbiamo che $j^2 = \text{id}_X$.

Consideriamo ora il divisore $D = (g + 1)p + (g + 1)q$. Poiché $\deg(D) = 2g + 2$ possiamo usare la formula di Riemann-Roch semplificata

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1 - g = g + 3.$$

Ora è chiaro che $j(D) = D$, e quindi viene indotto un endomorfismo lineare $j^* : \mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(D)$ con $(j^*)^2 = \text{id}$, quindi diagonalizzabile con autovalori ± 1 (si tratta di una simmetria). Quindi abbiamo la decomposizione in autospazi $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D)^+ \oplus \mathcal{L}(D)^-$ e possiamo già dire che $\mathcal{L}(D)^+ = \langle 1, x, \dots, x^{g+1} \rangle$, avente dimensione $g + 2$ (si tratta di composizioni di x con funzioni meromorfe sulla sfera con ordini di polo a p e q non eccedenti $g + 1$...), e quindi $\mathcal{L}(D)^- = \langle y \rangle$ risulta di dimensione 1 e $j^*y = -y$.

Vogliamo vedere che $y^2 = cg(x)$ con $c \in \mathbb{C}$ non nulla e $g(x) = \prod_i (x - a_i)$ polinomio nella x di grado $2g + 2$. Per questo basta controllare che y^2 e $g(x)$ abbiano lo stesso divisore, in modo che il loro quoziente sia ologomorfo e dunque costante. Calcoliamo quindi i divisori: risulta

$$\text{div}(y) = \text{div}_0(y) - \text{div}_{\infty}(y) = \sum_i p_i - D$$

(perché $y(p_i) = -y(p_i)$ e quindi tutti i p_i entrano nel $\text{div}_0(y)$, sono $2g + 2$, d'altra parte gli unici poli possibili sono p e q , al massimo d'ordine $g + 1$ ciascuno...), e

$$\text{div}(g(x)) = \sum_i \text{div}(x - a_i) = \sum_i \text{div}_0(x - a_i) - \sum_i \text{div}_{\infty}(x - a_i) = 2 \sum_i p_i - 2D$$

come si voleva.

5.3.2. Per esercizio, si osservi che j induce un endomorfismo j^* di $\Omega^1(X)$ di quadrato identico, e che in effetti è $j^* = -\text{id}$ (un differenziale fissato da j^* proviene da uno della retta proiettiva...).

5.3.3. Conclusione del discorso precedente è che una SdR è iperellittica se e solo se è normalizzazione di una curva algebrica piana iperellittica, cioè di una equazione che in opportuno riferimento ammette equazione del tipo $Y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (X - a_i)$ (con $a_i \neq a_j$ per $i \neq j$).

In particolare, SdR iperellittiche ne esistono di ogni genere.

5.3.4. DIFFERENZIALI PER LE SDR IPERELLITTICHE E MAPPA CANONICA. Dalla descrizione precedente segue che

$$\Omega^1(X) = \left\langle \frac{dx}{y}, x \frac{dx}{y}, \dots, x^{g-1} \frac{dx}{y} \right\rangle$$

$$\mathcal{L}(K) = \langle 1, x, \dots, x^{g-1} \rangle$$

e la mappa canonica

$$k : X \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C}) \quad P \mapsto \begin{pmatrix} x^1(P) \\ \vdots \\ x^{g-1}(P) \end{pmatrix}$$

si fattorizza attraverso x seguita dalla mappa di Veronese

$$X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C}) \quad P \mapsto x(P), \quad z \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{g-1} \end{pmatrix}$$

e quindi mostra che il rivestimento ramificato di ordine 2 della sfera di Riemann per una SdR iperellittica è canonico (sia nel senso che è intrinseco, sia nel senso che è definito dal divisore canonico).

5.4. TEOREMA (SISTEMI CANONICI). Sia X SdR compatta di genere $g \geq 1$. Allora la mappa canonica $k : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})$ è una immersione se e solo se X non è iperellittica. Precisamente:

- (1) se X non è iperellittica allora k immerge X in $\mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})$ come curva di grado $2g - 2$;
- (2) se X è iperellittica allora k si fattorizza tramite un rivestimento con due fogli della sfera di Riemann, seguito dalla immersione di Veronese in $\mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})$.

È già stato dimostrato tutto. □

6. Classificazione di SdRc per generi piccoli.

Siamo ormai in grado di usare il teorema di Riemann-Roch per classificare le SdR per generi piccoli, e anche di dimostrare in generale che ogni SdR compatta si può immergere come curva algebrica (cioè definita da equazioni polinomiali) in qualche spazio proiettivo (e anzi, come già sappiamo, in uno spazio affine se rinunciamo ad un solo punto). Il punto centrale è che la conoscenza delle funzioni meromorfe sulla SdR permette di avere informazioni sulla superficie stessa.

6.1. SdR DI GENERE 0. Se X è SdR compatta, esiste $P \in X$ tale che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) > 1$ se e solo se X è di genere 0, e in tal caso X è isomorfo alla sfera di Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Infatti, questo equivale all'esistenza di una funzione olomorfa non costante $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con unico polo in P , quindi rivestimento con un foglio, e dunque isomorfismo.

Di conseguenza possiamo dire che il genere di X è maggiore di 0 se e solo se per ogni $P \in X$ si ha $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = 1$. E viceversa, il genere di X è 0 (e dunque $X \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) se e solo se per un (e allora per ogni) $P \in X$ si ha $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = 2$.

6.2. SdR DI GENERE 1. Una SdR compatta X è di genere 1, se e solo se si immerge come cubica liscia nel piano proiettivo complesso (dunque se e solo se è un toro).

Infatti, usando $D = 3P$ con $P \in X$, che sappiamo essere un divisore molto ampio, e usando ripetutamente Riemann-Roch, possiamo studiare gli spazi $\mathcal{L}(nP)$:

$$\begin{array}{ll} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = 1 & \mathcal{L}(P) = \langle 1 \rangle_{\mathbb{C}} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(2P) = 2 & \mathcal{L}(2P) = \langle 1, x \rangle_{\mathbb{C}} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(3P) = 3 & \mathcal{L}(3P) = \langle 1, x, y = x' \rangle_{\mathbb{C}} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(4P) = 4 & \mathcal{L}(4P) = \langle 1, x, y, x^2 \rangle_{\mathbb{C}} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(5P) = 5 & \mathcal{L}(5P) = \langle 1, x, y, x^2, xy \rangle_{\mathbb{C}} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(6P) = 6 & \mathcal{L}(6P) = \langle 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3 \rangle_{\mathbb{C}} \end{array}$$

e vediamo che nell'ultimo scritto, che è di dimensione 6, si trovano 7 funzioni meromorfe: dunque ci deve essere tra loro una relazione di dipendenza lineare su \mathbb{C} , cioè una equazione algebrica, che necessariamente coinvolge le ultime due funzioni incontrate, cioè y^2, x^3 : si tratta quindi di una relazione cubica.

Noi abbiamo già realizzato questa situazione usando $x = \wp$ e $y = \wp'$.

6.3. SDR DI GENERE 2. Ogni SdR compatta X di genere 2, è iperellittica, e quindi è la normalizzazione di una curva proiettiva piana iperellittica di grado 6.

Qui potremmo tentare di usare divisori D di grado $2g - 1 = 3$, che darebbero chiaramente una mappa $X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (perché usando Riemann-Roch si ha $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = 2$), ma si tratterebbe di mappe di grado 3, e non 2.

Usando invece il sistema associato ad un divisore canonico $K = \text{div}(\omega)$, abbiamo $\text{deg}(K) = 2g - 2 = 2$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) = g = 2$, che dunque definisce una funzione $X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ non costante di grado 2; quindi si tratta di una SdR iperellittica, che sappiamo realizzare come (normalizzazione di una) curva proiettiva piana iperellittica (di grado 6).

6.4. EQUAZIONI ALGEBRICHE. Per salire ancora con il genere, bisogna disporre di qualche strumento generale che permetta di trovare equazioni algebriche soddisfatte dalle immagini di una SdRc tramite immersioni proiettive definite da divisori. Si tratta di generalizzare il procedimento che abbiamo usato per le SdR di genere 1.

6.4.1. Consideriamo una SdR compatta X , un suo divisore molto ampio D di grado d e dimensione n , e l'immersione $g : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ definita da D .

- (1) Osserviamo che $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]_k = \binom{n+k}{k}$ (dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado k in $n+1$ variabili), e quindi tale dimensione è $O(k^n/n!)$. È in questi spazi che bisogna cercare le possibili equazioni per $g(X)$.
- (2) Considerando $g : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, per ogni $F \in \mathbb{C}[\underline{X}]_k$ possiamo definire il divisore in X di F similmente a quanto fatto per gli iperpiani:

$$\text{div}_X(F) = \text{div} \left(\frac{F}{\Phi} \circ g \right)$$

usando $\Phi \in \mathbb{C}[\underline{X}]_k$ (per esempio k volte un iperpiano) che non si annulli nei punti di $g(X)$ in cui si annulla F . Ora è facile vedere che $\text{div}_X(F) \sim kD$ (equivalenza lineare), e quindi $\frac{\Phi}{F} \circ g$ è funzione meromorfa su X con poli limitati da kD .

Abbiamo quindi una applicazione lineare

$$R_k : \mathbb{C}[\underline{X}]_k \longrightarrow \mathcal{L}(kD) \quad \Phi \mapsto \frac{\Phi}{F} \circ g$$

il cui nucleo è descritto dai polinomi che si annullano identicamente su X , quindi equazioni per $g(X)$.

- (3) Applicando Riemann-Roch, abbiamo che

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(kD) &= \text{deg}(kD) + 1 - g + \dim_{\mathbb{C}}(K - kD) \\ &= \text{deg}(kD) + 1 - g \quad \text{per } k \gg 0 \\ &= O(k \text{deg}(D)) \ll O(k^n/n!) \quad \text{per } k \gg 0. \end{aligned}$$

Dunque, risulta che

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(R_k) \geq \binom{n+k}{k} - (\text{deg}(kD) + 1 - g) \gg 0 \quad \text{per } k \gg 0$$

(significa che vi sono molte equazioni polinomiali per $g(X)$).

6.4.2. OSSERVAZIONI.

- (1) Il nucleo di ogni applicazione R_k ha una parte ovvia che viene dal nucle dell'applicazione precedente: se $F_1, \dots, F_s \in \ker(R_k)$, allora ogni combinazione del tipo $\sum_i l_i F_i$ con $\text{deg } l_i = 1$ appartiene a $\ker(R_{k+1})$.
- (2) È chiaro a priori che per $k = 1$ si ha che R_1 è isomorfismo, e il suo nucleo è zero ($g(X)$ non è degenere, cioè non è contenuta in alcun iperpiano).

(3) È utile notare che se $\deg(D) \geq g$, allora si ha che

$$\deg(kD) = k \deg(D) \geq kg \geq \begin{cases} 2g - 1 & \text{se } k \geq 2 \\ 2g + 1 & \text{se } k \geq 3 \end{cases}$$

(permette di usare formule semplificate per Riemann-Roch).

(4) Infine, applichiamo i discorsi precedenti al caso del sistema canonico: usiamo X SdR compatta di genere $g \geq 3$, $\deg(K) = 2g - 2$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) = g$. Risulta allora che

$$\dim_{\mathbb{C}}(\ker(R_k)) \geq \binom{k+g-1}{k} - (k(2g-2) + 1 - g) = \binom{k+g-1}{k} - 2(g-1)k + (g-1)$$

(per k sufficientemente grande).

6.5. SDR DI GENERE 3. Nel caso di SdRc X di genere $g = 3$, supponiamo non iperellittiche e quindi $k : X \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ immersione, abbiamo che $\dim_{\mathbb{C}}(\ker(R_k)) \geq \binom{k+2}{k} - 4k + 2$; esplicitamente:

k	$\dim_{\mathbb{C}}(\ker(R_k))$
2	$6 - 8 + 2 = 0$
3	$10 - 12 + 2 = 0$
4	$15 - 16 + 2 = 1$

e si trova (almeno) una equazione di quarto grado (trattandosi di curve piane non si può avere più di una equazione). Quindi *le SdR compatte di genere 3 sono di due tipi: o iperellittiche (e allora sono normalizzazioni di curve proiettive piane iperellittiche di grado 8), oppure quartiche piane lisce.*

6.6. SDR DI GENERE 4. Nel caso di SdRc X di genere $g = 4$, supponiamo non iperellittiche e quindi $k : X \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ immersione, abbiamo che $\dim_{\mathbb{C}}(\ker(R_k)) \geq \binom{k+3}{k} - 6k + 3$; esplicitamente:

k	$\dim_{\mathbb{C}}(\ker(R_k))$
2	$10 - 12 + 3 = 1$
3	$20 - 18 + 3 = 5$

e si trova (almeno) una equazione di secondo grado e una indipendente di terzo grado. Quindi *le SdR compatte di genere 4 sono di due tipi: o iperellittiche (e allora sono normalizzazioni di curve proiettive piane iperellittiche di grado 10), oppure curve lisce intersezione di una quadrica e di una cubica in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.*

6.7. SDR DI GENERE 5. Le SdRc di genere 5 si dividono in iperellittiche (normalizzazioni di curve piane iperellittiche di grado 12), e non iperellittiche che sono di due tipi: rivestimenti ramificati tripli della sfera di Riemann (curve trigonali) e intersezioni (complete) lisce di quadriche in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$.

6.8. SDR DI GENERE 6. Le SdRc di genere 6 si dividono in iperellittiche (normalizzazioni di curve piane iperellittiche di grado 14), e non iperellittiche che sono di tre tipi: rivestimenti ramificati tripli della sfera di Riemann (curve trigonali), intersezioni (complete) lisce di quadriche in $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$, e quintiche piane lisce.

6.9. SDR DI GENERE $g \geq 7$. Le SdRc di genere g almeno t si dividono in iperellittiche (normalizzazioni di curve piane iperellittiche di grado $2g + 2$), e non iperellittiche che sono di due tipi: rivestimenti ramificati tripli della sfera di Riemann (curve trigonali) e curve di grado $2g - 2$ intersezioni lisce di quadriche (?) in $\mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})$.

7. Equivalenza tra SdRc e curve algebriche complesse?

8. Teorema di Riemann-Roch (dimostrazione).

8.1. STRATEGIA GENERALE. La dimostrazione che presentiamo del teorema di Riemann-Roch (ve ne sono molte possibili, in quasi ogni libro se ne trova una diversa: questa viene essenzialmente dal Miranda) cerca di mettere in luce gli aspetti algebrici del problema e procede secondo questo schema:

8.1.1. Introdurremo un problema più generale che è quello di determinare gli spazi di funzioni con preassegnate code (negative) di Laurent in un numero finito di punti (problema di Mittag-Leffler).

8.1.2. Per questo definiremo i divisori (di code) di Laurent: ad ogni divisore D si associa un \mathbb{C} -spazio vettoriale $\mathcal{T}(D)$, e vi sarà una applicazione lineare $\alpha_D : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{T}(D)$ che ad ogni funzione associa l'insieme delle sue code di Laurent (opportunamente troncate). Sarà $\ker \alpha_D = \mathcal{L}(D)$ e chiameremo $\mathcal{H}(D) = \text{coker } \alpha_D$. Confrontando questi spazi per divisori diversi, troveremo che l'espressione $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - \deg(D) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D)$ è costante al variare di D .

8.1.3. Usando $D = 0$ troveremo un precursore di Riemann-Roch nella forma

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \deg(D) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(0) - \deg(0) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D) = \deg(D) + 1 - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D)$$

in cui restano da interpretare i termini \mathcal{H} .

8.1.4. Infine, introdurremo la dualità di Serre, che dice che $\mathcal{H}(D)^* \cong \mathcal{H}(D) \cong \mathcal{L}(K - D)$, da cui segue che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D)$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) = g$ per arrivare all'enunciato classico di Riemann-Roch.

8.1.5. Resta da notare che tutta la dimostrazione è basata sulla esistenza di (abbastanza) funzioni meromorfe, che noi non abbiamo fatto, e che su alcuni aspetti della dimostrazione (finitzza di alcune dimensioni e dimostrazione del risultato di Serre) sorvoleremo.

8.2. DIVISORI DI LAURENT. Definiamo l'insieme dei divisori (di code) di Laurent nel modo seguente:

$$\mathcal{T}(X) = \left\{ \sum_{P \in X} T_P(z_P)P : \begin{array}{l} z_P \text{ coordinata locale a } P \\ T_P(z_P) \text{ polinomio di Laurent in } P \end{array} \right\}$$

(si tratta di assegnare in ogni punto un polinomio di Laurent, indipendente da punto a punto).

Per ogni divisore $D \in \text{Div}(X)$ definiamo i divisori di Laurent controllati da D :

$$\mathcal{T}(D) = \{T \in \mathcal{T}(X) : \deg_{z_P} T_P(z_P) < -\text{ord}_P(D)\}$$

(dove $\deg_{z_P} T_P(z_P)$ indica l'esponente massimo con cui compare z_P nel polinomio di Laurent $T_P(z_P)$). Per esempio:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(0) &= \{T \in \mathcal{T}(X) : T_P(z_P) \text{ ha solo termini di grado negativo per ogni } P\} \\ \mathcal{T}(P) &= \left\{ T \in \mathcal{T}(X) : \begin{array}{l} T_Q(z_Q) \text{ ha solo termini di grado negativo per } Q \neq P \\ T_P(z_P) \text{ ha solo termini di grado } < -1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

8.2.1. RELAZIONE CON LE FUNZIONI MEROMORFE. Abbiamo una applicazione canonica per ogni divisore $D \in \text{Div}(X)$

$$\alpha_D : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{T}(D)$$

che invia ogni funzione f nel divisore di Laurent formato dagli sviluppi di Laurent di f troncati dal divisore D . È facile osservare che $\ker \alpha_D = \mathcal{L}(D)$.

8.2.2. RELAZIONE CON L'ORDINE TRA I DIVISORI. Se $D_1 \leq D_2$ risulta immediatamente che $\mathcal{T}(D_1) \supseteq \mathcal{T}(D_2)$ e abbiamo un morfismo canonico di troncamento delle code di Laurent

$$t = t_{D_1, D_2} : \mathcal{T}(D_1) \longrightarrow \mathcal{T}(D_2)$$

che è suriettivo e ha nucleo formato dalle code di Laurent in P che presentano termini di grado $\geq -\text{ord}_P(D_2)$ e $< -\text{ord}_P(D_1)$. Lo indicheremo con $\mathcal{T}(D_1/D_2)$.

8.3. PROBLEMA DI MITTAG-LEFFLER. Il problema di Mittag-Leffler è quello di determinare dato $T \in \mathcal{T}(D)$ se esiste $f \in \mathcal{M}(X)$ con $\alpha_D(f) = T$, cioè di vedere se esistono funzioni meromorfe con assegnate code di Laurent in un numero finito di punti, e olomorfe altrove.

Il problema di trovare tali funzioni (l'ostruzione all'esistenza) è misurato dal conucleo della mappa α_D , quindi introduciamo

$$\mathcal{H}(D) = \text{coker } (\alpha_D) = \mathcal{T}(D)/\text{im } (\alpha_D) .$$

Ne risulta allora una sequenza esatta di \mathbb{C} -spazi vettoriali

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\alpha_D} \mathcal{T}(D) \longrightarrow \mathcal{H}(D) \longrightarrow 0$$

ovvero una sequenza esatta breve

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}(X)/\mathcal{L}(D) \xrightarrow{\alpha_D} \mathcal{T}(D) \longrightarrow \mathcal{H}(D) \longrightarrow 0 .$$

Il termine sequenza esatta significa che si tratta di una sequenza di mappe lineari tali che l'immagine di ogni mappa coincide con il nucleo della successiva (in particolare ogni composizione di due mappe successive è zero).

Noi vorremmo calcolare le dimensioni di questi spazi, ma si vede subito che \mathcal{M} e \mathcal{T} , e anche \mathcal{M}/\mathcal{L} sono in generale di dimensione infinita.

8.3.1. FINITEZZA DI $\mathcal{H}(D)$. Risulta invece che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D)$ è finita. Non ne facciamo la dimostrazione, che richiede qualche conoscenza sulla struttura di $\mathcal{M}(X)$ in generale.

8.3.2. Confrontando ora le due sequenze esatte brevi relative a due divisori $D_1 \leq D_2$ otteniamo un diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)/\mathcal{L}(D_1) & \longrightarrow & \mathcal{T}(D_1) & \longrightarrow & \mathcal{H}(D_1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)/\mathcal{L}(D_2) & \longrightarrow & \mathcal{T}(D_2) & \longrightarrow & \mathcal{H}(D_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono indotte dal troncamento e sono suriettive. Passando ai nuclei si ottiene una sequenza esatta breve

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(D_2)/\mathcal{L}(D_1) \longrightarrow \mathcal{T}(D_1/D_2) \longrightarrow \mathcal{H}(D_1/D_2) \longrightarrow 0 .$$

(è un caso facile del lemma del serpente che esplicitiamo più sotto). Siccome qui tutte le dimensioni sono finite possiamo scrivere che

$$(\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_2) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_1)) - (\deg(D_2) - \deg(D_1)) + (\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D_1) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D_2)) = 0$$

(si tratta della usuale formula delle dimensioni per applicazioni lineari) ovvero che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_2) - \deg(D_2) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D_2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_1) - \deg(D_1) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D_1)$$

e di conseguenza che l'espressione

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - \deg(D) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D)$$

è costante indipendentemente dal divisore D scelto (basta confrontare due divisori qualsiasi tramite il divisore somma che è maggiore di entrambi).

8.3.3. TEOREMA PRECURSORE DI RIEMANN-ROCH. Confrontando allora un generico D con il divisore nullo, ne risulta che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1 - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D)$$

e il problema diventa di dare una buona interpretazione per gli spazi $\mathcal{H}(D)$, in particolare per $D = 0$.

8.4. TEOREMA FACILE DEL SERPENTE. Prima abbiamo usato il seguente fatto: dato un diagramma commutativo di sequenze esatte brevi, se il primo morfismo è suriettivo anche la sequenza dei nuclei risulta esatta breve:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & \ker(g) & \longrightarrow & \ker(h) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(ipotesi, oltre alla esattezze, è che f sia suriettivo). Bisogna mostrare che la prima mappa tra i nuclei è iniettiva, che ha per immagine il nucleo della seconda, e che la seconda mappa è suriettiva. Tutte e tre le cose si fanno con una facile "caccia sul diagramma":

- (1) se $a \in \ker(f)$ ha immagine nulla in $\ker(g) \subseteq B$, si tratta di un elemento di A con immagine nulla in B , e quindi è nullo per l'injectività di $A \rightarrow B$;
- (2) se un elemento $b \in \ker(g)$ ha immagine nulla in $\ker(h)$, si tratta di un elemento di B con immagine nulla in C , e quindi è immagine di un (unico) $a \in A$ che necessariamente appartiene a $\ker(f)$ (perché?);
- (3) per ogni elemento $c \in \ker(h)$, essendo $c \in C$ esiste $b \in B$ la cui immagine in C sia c , tuttavia b non appartiene necessariamente a $\ker(g)$; siccome però la sua immagine $b' = g(b)$ in B' ha immagine nulla in C' (perché?) esiste $a' \in A'$ con immagine b' , e per suriettività di f , esiste $a \in A$ con

$f(a) = a'$; sia β l'immagine di a in B : allora $b - \beta$ è elemento di $\ker(g)$ con immagine c in C (perché?).

(si osservi che per la suriettività della seconda mappa è stato necessario usare la suriettività di f).

8.5. TEOREMA DI DUALITÀ DI SERRE. Il teorema di dualità di Serre afferma che per ogni divisore D si ha che

$$\mathcal{H}(D)^* \cong \mathcal{H}(D)$$

(e noi sappiamo già che quest'ultimo spazio è isomorfo a $\mathcal{L}(K - D)$).

Tenendo conto della finitezza della dimensione di $\mathcal{H}(D)$ otteniamo subito che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D)^* = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D)$$

da cui possiamo ricavare

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(K) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(K) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - K) = 1 \end{aligned}$$

e usando il precursore di Riemann-Roch prima stabilito, abbiamo

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) = \deg(K) + 1 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(K) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) = 2g - 2 + 1 + 1 - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K)$$

e concludiamo che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) = g$.

Sostituendo questi valori nel precursore di Riemann-Roch otteniamo l'enunciato classico dello stesso teorema.

8.5.1. COSTRUZIONE DELLA MAPPA DI SERRE. Per ottenere la dualità di Serre, consideriamo la mappa bilineare

$$\text{Res} : \mathcal{H}(D) \times \mathcal{T}(D) \longrightarrow \mathbb{C} \quad (\omega, T) \mapsto \text{Res}(\omega, T) = \sum_P \text{Res}_P(T_P \omega)$$

ove: se $f \in \mathcal{M}(X)$ e $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$, $\text{Res}_P(f\omega)$ è il coefficiente di $\frac{dz_P}{z_P}$ nello sviluppo di Laurent di $f\omega$ in una coordinata locale z_P a P .

In particolare: se $f = \sum_i a_i z_P^i$ e $\omega = \left(\sum_{i \geq n_P} c_i z_P^i \right) dz_P$ allora risulta $\text{Res}_P(f\omega) = \sum_{i \geq n_P} a_{-i-1} c_i$ (somma finita).

8.5.2. Si osserva subito che per $\omega \in \mathcal{H}(D)$ abbiamo $\text{div}(\omega) \geq D$ ($\text{ord}_P(\omega) \geq \text{ord}_P(D)$ per ogni $P \in X$) e per $T \in \mathcal{T}(D)$ abbiamo $\deg_{z_P} T_P < -\text{ord}_P(D)$ per ogni $P \in X$. Quindi per $f \in \mathcal{M}(X)$, usando $\alpha_D(f) \in \mathcal{T}(D)$ otteniamo che

$$\text{Res}(\omega, \alpha_D(f)) = \text{Res}(\omega f) = 0$$

per il teorema dei residui (la somma dei residui di un differenziale meromorfo su una DdR compatta è nulla).

Quindi abbiamo che $\text{Res}(\omega, \text{im}(\alpha_D)) = 0$ per ogni $\omega \in \mathcal{H}(D)$ e possiamo portare a quoziente $\mathcal{H}(D) = \mathcal{T}(D)/\text{im}(\alpha_D)$ l'applicazione bilineare:

$$\text{Res} : \mathcal{H}(D) \times \mathcal{H}(D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

e quindi avere un morfismo lineare

$$\mathcal{H}(D) \longrightarrow \mathcal{H}(D)^* \quad \omega \mapsto \text{Res}(\omega, \cdot) : \mathcal{H}(D) \rightarrow \mathbb{C}$$

(questo è il morfismo di Serre).

Il teorema di dualità di Serre afferma che questo morfismo è un isomorfismo di spazi vettoriali (ovvero che l'ultimo morfismo bilineare scritto è non degenere).

8.6. OSSERVAZIONI SUL GENERE. Va osservato che nel corso della dimostrazione sono emersi alcuni significati del genere che è opportuno evidenziare, e confrontare con la prima definizione che ne abbiamo dato:

- (1) il genere topologico, invariante della classificazione delle superficie reali compatte orientabili, legato alla caratteristica di Eulero-Poincaré, e al numero di "buchi" della superficie;
- (2) il genere aritmetico $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0)$ è un invariante coomologico legato alla ostruzione per trovare soluzioni al problema di Mittag-Leffler;

(3) il genere analitico $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(X)$ come dimensione dello spazio dei differenziali olomorfi; nel caso di SdR compatte (cioè di varietà complesse compatte di dimensione 1) questi tre invarianti coincidono; gli ultimi due si generalizzano ai casi di dimensioni maggiori, e per varietà su altri corpi, ma in generale non coincidono più.

9. Divisori Speciali e Teorema di Clifford?

10. Punti di inflessione e di Weierstrass, Automorfismi?

11. Cenni sugli spazi di moduli

11.1. Studiare la struttura geometrica dello spazio delle classi di isomorfismo di SdR compatte di un fissato genere g non è facile, e noi l'abbiamo fatto solo nei due casi facili ($g = 0$, e si tratta di un punto, e $g = 1$, e si tratta del quoziente del semipiano di Poincaré \mathbb{H} sotto l'azione del gruppo modulare $SL_2(\mathbb{Z})$).

Quello che si può invece fare più facilmente è, dando per scontato che tale spazio abbia struttura di varietà complessa, determinarne la dimensione, ovvero capire qual è il numero di parametri indipendenti che permette di determinare la classe di isomorfismo di una generica SdRc di fissato genere. Vedremo due risultati:

11.1.1. la dimensione dello spazio di moduli delle SdR iperellittiche di genere $g \geq 1$ è $2g - 1$; questo si può giustificare già pensando alla loro realizzazione come curve piane iperellittiche, di equazioni $Y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (X - a_i)$ che dipendono dai $2g + 2$ parametri a_i , di cui si può pensare di normalizzarne 3 tramite proiettività (della retta delle ascisse).

11.1.2. la dimensione dello spazio di moduli di tutte le SdR compatte di genere $g \geq 2$ è $3g - 3$ (Riemann).

11.1.3. È simpatico confrontare i due risultati:

g	iperell.	tutte
0	0	0
1	1	1
2	3	3
3	5	6
4	7	9
5	9	12

11.2. PRELIMINARI PER IL CONTEGGIO DI RIEMANN. Per calcolare le dimensioni di varietà complesse applicheremo sempre il principio per cui se $f : A \rightarrow B$ è mappa suriettiva di varietà le cui fibre hanno genericamente dimensione d (dimensione relativa), allora $\dim A = \dim B + d$ (come se si trattasse di applicazioni lineari tra spazi vettoriali; si giustifica essenzialmente passando agli spazi tangenti alle varietà).

11.2.1. GRASSMANNIANA DELLE RETTE DI \mathbb{P}^n . Consideriamo $\mathbb{G}(1, n)$ l'insieme delle rette di \mathbb{P}^n e definiamo lo spazio di incidenza

$$\mathcal{I} = \{(\ell, P, Q) : P, Q \in \ell, P \neq Q\} \subseteq \mathbb{G}(1, n) \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$$

(triplette formate da una retta e una coppia di punti distinti su di essa). Abbiamo allora due mappe canoniche di proiezione, entrambe suriettive

$$\mathbb{G}(1, n) \longleftarrow \mathcal{I} \longrightarrow (\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) \setminus \text{diagonale}$$

in cui la seconda ha dimensione relativa nulla, la prima ha dimensione relativa 2 (la fibra su una fissata retta ℓ è data essenzialmente da $\ell \times \ell \setminus \text{diagonale}$), da cui possiamo concludere che $\dim \mathbb{G}(1, n) = 2n - 2$ (perché $\dim(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) = 2n$).

11.2.2. k -UPLE DISORDINATE MODULO PROIETTIVITÀ. Sia P_k lo spazio delle k -uple non ordinate di punti di \mathbb{P}^1 modulo proiettività; siccome una proiettività della retta può determinare arbitrariamente l'immagine di tre punti distinti, abbiamo una applicazione suriettiva

$$(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^{k-3} \setminus C \longrightarrow P_k$$

(C è l'insieme di coincidenza di almeno due dei punti) che dimentica semplicemente l'ordine dei punti; quindi le fibre dell'applicazione sono discrete, e la dimensione relativa è zero. Ne segue che $\dim P_k = k - 3$.

11.3. CONTEGGIO DELLE SDR IPERELLITTICHE. Le SdR iperellittiche di genere g sono determinate dalla mappa canonica $k : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, che è a sua volta determinata dai $2g + 2$ punti di ramificazione, da considerarsi non ordinati e a meno di proiettività. Quindi la dimensione cercata è $\dim(P_{2g+2}) = (2g + 2) - 3 = 2g - 1$, come già ci aspettavamo.

11.4. CONTEGGIO DI RIEMANN DELLE SDRc. Vi sono varie mappe suriettive che indicheremo insieme alla loro dimensione relativa; a destra indichiamo il conteggio delle dimensioni, che parte dal basso:

$$\begin{array}{rcc} \{X : \text{SdRc, genere } g\} & & 3g - 3 \\ \uparrow 2g-1 & & \\ \{(X, D) : \deg(D) = 2g - 1\} & & 5g - 4 \\ \downarrow g-1 & & \\ \{(X, |D|) : \deg(D) = 2g - 1\} & & 4g - 3 \\ \uparrow 2g-4 & & \\ \{(X, G) : \deg(G) = 2g - 1, \dim G = 1\} & & 6g - 7 \\ \parallel & & \\ \{g : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : \deg(g) = 2g - 1, \text{ram}(g) = 6g - 4\} & & 6g - 7 \\ \downarrow 0 & & \\ P_{6g-4} & & 6g - 7 \end{array}$$

dove:

la prima mappa dimentica il divisore D ;

la seconda mappa sceglie un divisore nel sistema $|D|$ che ha dimensione $\dim |D| = g - 1$ (Riemann-Roch);

la terza mappa considera le rette in $|D|$, e quindi ha dimensione relativa $2(g - 1) - 2$;

la quarta mappa è la corrispondenza canonica;

la quinta mappa "determina" g in base ai suoi punti di ramificazione (che si contano con Riemann-Hurwitz).

Varietà Jacobiane di Superficie di Riemann compatte.

In questo capitolo vedremo come ad ogni SdR compatta di genere g si possa associare una “varietà abeliana complessa di dimensione g ” (cioè una varietà complessa di dimensione g dotata di una struttura di gruppo compatibile con l’atlante olomorfo) in cui la superficie stessa si immerge. Questa varietà, della Jacobiana della SdRc, è in effetti un toro g -dimensionale, e nel caso di superficie di genere 1 coincide con il toro stesso.

Utilizzando la Jacobiana, potremo dare un criterio affinché un dato divisore sia principale (cioè sia il divisore di una funzione meromorfa) detto teorema di Abel, e potremo anche caratterizzare la varietà Jacobiana in termini dei divisori della SdRc iniziale (teorema di Jacobi).

Come applicazione mostreremo che una SdR compatta, e dunque anche una curva algebrica complessa, ammette una struttura di varietà abeliana (cioè una operazione di gruppo compatibile con l’atlante olomorfo) se e solo se è di genere 1.

0. Omologia delle superficie.

Introduciamo come preliminare il “primo gruppo di omologia” per superficie reali; si tratta essenzialmente di avere un opportuno insieme (con struttura di gruppo abeliano) da utilizzare come “spazio di cammini per le integrazioni” sulle superficie.

0.1. COMPLESSO DELLE CATENE. Sia X una superficie reale; definiamo i seguenti gruppi:

$$\begin{aligned} C_0(X) &= \mathbb{Z}^{(X)} \text{ gruppo abeliano libero generato dai punti di } X \\ C_1(X) &= \mathbb{Z}^{\{\{[0,1] \rightarrow X\}\}} \text{ gruppo abeliano libero generato dai segmenti di } X \\ C_1(X) &= \mathbb{Z}^{\{\{\Delta \rightarrow X\}\}} \text{ gruppo abeliano libero generato dai triangoli di } X \end{aligned}$$

e le seguenti mappe tra i gruppi precedenti:

$$\begin{array}{ccccc} C_2(X) & \xrightarrow{b_2} & C_1(X) & \xrightarrow{b_1} & C_0(X) \\ \Delta & \longmapsto & l_0 - l_1 + l_2 & & \\ & & l & \longmapsto & P_1 - P_0 \end{array}$$

ove $l_0(x) = \Delta(x, 0)$, $l_1(x) = \Delta(0, x)$, $l_2(x) = \Delta(1 - x, x)$ sono i tre lati del triangolo Δ su X , mentre $P_1 = l(1)$ e $P_0 = l(0)$ sono i due estremi del segmento l su X (questo definisce le mappe sui generatori). Si osserva subito che la composizione delle due mappe è zero ($b_1 \circ b_2 = 0$), e quindi $\text{im } b_2 \subseteq \text{ker } b_1$.

0.2. PRIMO GRUPPO DI OMOLOGIA. Diciamo catene chiuse gli elementi di $\text{ker } b_1$, bordi gli elementi di $\text{im } b_2$, e definiamo

$$H_1(X) = \text{ker}(b_1) / \text{im}(b_2)$$

il primo gruppo di omologia X : si tratta del quoziente tra il gruppo abeliano generato dalle catene chiuse e il suo sottogruppo generato dai bordi di triangoli.

Si osservi che cammini chiusi che differiscono per bordi di triangoli sono tra loro identificati, e d’altra parte integrare su tali cammini delle forme differenziali olomorfe dà chiaramente lo stesso risultato.

0.2.1. RELAZIONE CON IL GRUPPO FONDAMENTALE. Per chi conosce la nozione di gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ di una superficie X (cammini chiusi basati in un punto, modulo omotopia tra cammini: costruzione che dà luogo ad un gruppo non necessariamente abeliano), la relazione tra le due nozioni è che $H_1(X) = \pi_1(X)^{\text{ab}}$, cioè il primo gruppo di omologia è l’abelianizzato del gruppo fondamentale.

0.2.2. RELAZIONE CON LA CARATTERISTICA DI EULERO-POINCARÉ. Introducendo anche i gruppi $H_0(X) = C_0(X)/\text{im } b_1$ e $H_2(X) = \ker b_2$ e detti r_i i ranghi di $H_i(X)$, la caratteristica di Eulero-Poincaré che noi abbiamo definito via triangolazioni si può caratterizzare come somma alternata dei ranghi dei tre gruppi di omologia:

$$\chi(X) = r_0 - r_1 + r_2$$

(questo è un buon modo per mostrare che la caratteristica di Eulero-Poincaré dipende dalla superficie e non dalla triangolazione scelta).

0.2.3. CASO DI SUPERFICIE COMPATTE ORIENTABILI. Per le superficie X ottenute da un $4g$ -agono via identificazione dei lati nel modo standard, $\#_{i=1}^g a_i b_i \bar{a}_i \bar{b}_i$, abbiamo che $H_1(X)$ è il gruppo abeliano libero generato dai lati a_i, b_i , dunque con $2g$ generatori.

1. Varietà Jacobiana di una Superficie di Riemann.

1.1. Ogni elemento $\gamma \in H_1(X)$ dà luogo ad una applicazione

$$\int_\gamma : \Omega^1(X) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \omega \longmapsto \int_\gamma \omega$$

che è chiaramente lineare (per la struttura di \mathbb{C} spazio vettoriale dei differenziali olomorfi su X), e quindi $\int_\gamma \in (\Omega^1(X))^*$.

Abbiamo quindi una applicazione

$$\int : H_1(X) \longrightarrow (\Omega^1(X))^* \quad \gamma \longmapsto \int_\gamma$$

che è chiaramente una mappa di gruppi abeliani.

Definiamo $P := \text{im } \int$, che è il sottogruppo abeliano di $(\Omega^1(X))^*$ generato dagli elementi del tipo \int_γ per $\gamma \in H_1(X)$; si dice il sottogruppo dei periodi di X .

1.2. VARIETÀ JACOBIANA DI UNA SDRc. La varietà Jacobiana associata ad X SdR compatta è il gruppo quoziente

$$\text{Jac}(X) = (\Omega^1(X))^*/I$$

(duale del gruppo dei differenziali olomorfi, modulo periodi).

1.2.1. Osserviamo prima di tutto che, se X ha genere g , allora $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(X) = g$, e anche $\dim_{\mathbb{C}} (\Omega^1(X))^* = g$; quindi una scelta di basi permette di ottenere degli isomorfismi con \mathbb{C}^g .

1.2.2. Il sottogruppo dei periodi è generato dagli elementi del tipo \int_{a_i} e \int_{b_i} (per una rappresentazione della SdRc come $4g$ -agono) che si dicono gli a -periodi e i b -periodi.

1.2.3. Scelta una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ di $\Omega^1(X)$ su \mathbb{C} , i $2g$ vettori di \mathbb{C}^g dati da

$$\begin{pmatrix} \int_{a_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{a_i} \omega_g \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, g \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \int_{b_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{b_i} \omega_g \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, g$$

risultano linearmente indipendenti su \mathbb{R} , e inoltre soddisfano alle relazioni bilineari di Riemann: dette $A = \left(\int_{a_i} \omega_j \right)$ e $B = \left(\int_{b_i} \omega_j \right)$ matrici quadrate d'ordine (e rango) g a coefficienti complessi si ha

$$A^t B = B^t A$$

$$i(A^t \bar{B} = B^t \bar{A}) > 0 \text{ (matrice hermitiana definita positiva).}$$

Cambiando generatori di $H_1(X)$ o di $\Omega^1(X)$ si può far sì che la matrice A diventi l'identità, e in questo caso la matrice dei b -periodi \tilde{B} si dice normalizzata e le relazioni bilineari di Riemann dicono semplicemente che essa è simmetrica con parte immaginaria definita positiva.

1.2.4. Dalle considerazioni precedenti risulta dunque che in quanto gruppi abeliani abbiamo

$$\text{Jac}(X) \cong \mathbb{C}^g / \langle \mathbb{I}_g, \tilde{B} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

il che generalizza la definizione del toro complesso

$$\mathbb{T}_\tau = \mathbb{C} / \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$$

(caso di dimensione 1).

1.2.5. Dalla descrizione esplicita si vede dunque facilmente che le Jacobiane di SdRc sono varietà complesse di dimensione g , detti tori g -dimensionali, e che si tratta di varietà compatte, poiché sono isomorfe a prodotti di $2g$ copie di \mathbb{S}^1 (circolo unitario sul piano).

2. Mappa di Abel-Jacobi.

2.1. MAPPE DI ABEL-JACOBI. Sia $P \in X$ punto di una SdRc. L'integrale $\int_P^Q \omega$ dipende (da P e) da Q e non dal cammino scelto per l'integrazione da P a Q , modulo il sottogruppo dei periodi di X . Abbiamo quindi una mappa ben definita

$$A : X \longrightarrow \text{Jac}(X) \quad Q \longmapsto \left(\omega \mapsto \int_P^Q \omega \right)$$

che si estende per linearità ai divisori di X :

$$A : \text{Div}(X) \longrightarrow \text{Jac}(X) \quad \sum_i a_i P_i \longmapsto \sum_i a_i A(P_i).$$

2.1.1. Le mappe A (dipendono da P) ristrette ai divisori di grado 0 non dipendono da P e definiscono una unica mappa di gruppi abeliani

$$A_0 : \text{Div}_0(X) \longrightarrow \text{Jac}(X)$$

che si dice la mappa di Abel-Jacobi per X .

Infatti, se $D = \sum_i a_i P_i$ è divisore di grado zero, e $P, P' \in X$, le due immagini $A_P(D)$ e $A_{P'}(D)$ differiscono per

$$\sum_i \int_P^{P'} a_i \omega = \left(\sum_i a_i \right) \int_P^{P'} \omega = 0$$

e cioè coincidono.

2.2.

3. Teoremi di Abel e di Jacobi.

3.1. TEOREMA DI ABEL-JACOBI. *La sequenza di gruppi*

$$0 \longrightarrow \text{PDiv}(X) \longrightarrow \text{Div}_0(X) \xrightarrow{A_0} \text{Jac}(X) \longrightarrow 0$$

è esatta. Più precisamente:

- (1) (TEOREMA DI ABEL) per ogni $D \in \text{Div}(X)$ si ha $D \in \text{PDiv}(X)$ se e solo se $\deg(D) = 0$ e $A_0(D) = 0$ (significa esattamente che $\ker A_0 = \text{PDiv}(X)$, e caratterizza i divisori principali come i divisori di grado zero e di somma nulla sulla Jacobiana);
- (2) (TEOREMA DI INVERSIONE DI JACOBI) la mappa A_0 è suriettiva.

In particolare si deduce che

$$\text{Jac}(X) \cong \frac{\text{Div}_0(X)}{\text{PDiv}(X)} \cong \text{Pic}_0(X)$$

(identificazione della varietà jacobiana associata a X con il gruppo dei divisori di grado 0 modulo divisori principali; questo porta ad un significato e ad una costruzione "algebrici" della jacobiana che abbiamo definito in modo "analitico" via integrali).

3.1.1. La parte facile del teorema di Abel è il "solo se". L'altra implicazione richiede l'uso delle relazioni bilineari di Riemann.

3.1.2. La dimostrazione del teorema di Jacobi invece è più difficile e richiede nuovi strumenti.

3.2. CASO DEL TORO COMPLESSO. Usando come SdRc il toro $\mathbb{T}_\tau = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ ove $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ (a il lato da 0 a 1, e b il lato da 0 a τ), abbiamo $g = 1$, $H_1(\mathbb{T}_\tau) = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$ e $\Omega^1(\mathbb{T}_\tau) = \mathbb{C}dz$.

I periodi in questo caso sono $\int_a dz = 1$ e $\int_b dz = \tau$. Quindi risulta

$$\text{Jac}(\mathbb{T}_\tau) \cong \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}_\tau$$

e cioè la varietà jacobiana del toro è isomorfa al toro stesso.

3.2.1. Questo fatto ci permette di ritrovare il teorema di Abel per i tori nella forma

$$D \in \text{PDiv}(X) \quad \text{se e solo se} \quad \deg(D) = 0 \quad \text{e} \quad s(D) = 0$$

(ove s è somma su $\text{Jac}(\mathbb{T}_\tau) \cong \mathbb{T}_\tau$, cioè $s = A_0$) e anche nella forma relativa alla curva ellittica corrispondente.

3.2.2. Infatti, usando come divisore $D = P_1 + P_2 + P_3 - 3O$ e la mappa $v : \mathcal{C}_\tau \rightarrow \mathbb{T}_\tau$ vediamo che

$$D = \text{div}(f) \quad \text{se e solo se} \quad (\deg(D) = 0 \quad \text{e}) \quad v(P_1 + P_2 + P_3 - 3O) = v(P_1) + v(P_2) + v(P_3) = 0$$

e osserviamo che necessariamente f risulta lineare, e dunque ha come divisore una retta che incontra la curva ellittica nei tre punti P_1, P_2, P_3 (e ha un polo d'ordine 3 nel punto improprio O della curva). Questo significa esattamente che v è mappa di gruppi abeliani tra la legge geometrica della curva ellittica e quella indotta da \mathbb{C} sul toro.

3.3. VARIETÀ ABELIANE DI DIMENSIONE 1. Concludiamo questa sezione facendo notare che, seppur disponiamo di una mappa $A : X \rightarrow \text{Jac}(X)$ che immerge una SdRc X in una varietà con struttura di gruppo, l'immagine di X non è un sottogruppo della jacobiana, a meno che non sia $g = 1$, nel qual caso si ha canonicamente $X = \text{Jac}(X)$.

In effetti possiamo dimostrare che le uniche SdRc che ammettono una struttura di gruppo che le renda varietà abeliane sono quelle di genere 1, cioè solo i tori complessi, ovvero solamente le curve ellittiche (in senso esteso: curve algebriche di genere 1). Lo faremo usando alcuni concetti nuovi.

3.3.1. TEOREMA DEL PUNTO FISSO DI LEFSCHETZ-HOPF. Siano X una varietà reale compatta e orientabile e $\alpha : X \rightarrow X$ una applicazione continua. Allora risulta che

$$(\Delta \cdot \Gamma_\alpha) = \sum_i (-1)^i \text{tr}(\alpha|H_i(X, \mathbb{Q}))$$

dove:

Δ è la diagonale di X in $X \times X$;

Γ_α è il grafico di α in $X \times X$;

$\Delta \cdot \Gamma_\alpha$ è il prodotto di intersezione di Δ con Γ_α , dunque $(\Delta \cdot \Gamma_\alpha)$ il numero di punti fissi di α contati con l'opportuna molteplicità;

$\alpha|H_i(X, \mathbb{Q})$ è l'endomorfismo (\mathbb{Q} -lineare) indotto da α sui gruppi di omologia $H_i(X, \mathbb{Q})$ a coefficienti in \mathbb{Q} (invece che \mathbb{Z} come fin'ora);

tr è la traccia in quanto endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita (somma dei termini diagonali di una qualunque sua matrice).

3.3.2. Non dimostreremo il risultato nemmeno per superficie (di solito è riportato nei libri di topologia algebrica, per es. Bredon), ma facciamo alcuni commenti:

- (1) invece di H_i si possono usare anche i gruppi di coomologia H^i (questioni di dualità);
- (2) è un teorema di Hopf il fatto che, se $f : C \rightarrow C$ è un morfismo di complessi di spazi vettoriali di dimensione finita su un corpo, allora risulta $\sum_i (-1)^i \text{tr}(f_i) = \sum_i (-1)^i \text{tr}(f_i|H_i(C))$ (si tratta di un elemento del corpo);
- (3) La quantità dell'enunciato è diversa da zero se e solo se α ammette punti fissi, dunque è nulla se e solo se α non ha punti fissi.

3.3.3. Vediamo ora come applicare il teorema di Lefschetz-Hopf per dimostrare il seguente enunciato: *se una curva proiettiva non singolare possiede una legge di gruppo algebrico, allora essa ha genere 1 (e quindi può essere immersa nel piano proiettivo come cubica non singolare).*

Sia X la curva, e consideriamola come superficie reale compatta e orientabile; dalla legge di gruppo per ogni $P \in X$ abbiamo un morfismo di traslazione $\alpha_P : X \rightarrow X$ con $\alpha_P(Q) = Q + P$ che è applicazione continua priva di punti fissi se $P \neq 0$ (elemento nullo della legge di gruppo). Dunque per $P \neq 0$ abbiamo $\Delta \cdot \Gamma_{\alpha_P} = 0$.

La funzione $X \rightarrow \mathbb{Z}$ che manda P in $(\Delta \cdot \Gamma_{\alpha_P})$ è localmente costante, dunque costante poiché X connessa, e di conseguenza abbiamo $\Delta \cdot \Gamma_{\alpha_0} = \Delta \cdot \Delta = 0$. Applicando il teorema di Lefschetz-Hopf per α_0 abbiamo allora (α_0 essendo l'identità) $\text{tr}(\alpha|H_i(X, \mathbb{Q})) = \dim_{\mathbb{Q}} H_i(X, \mathbb{Q})$, dunque

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} H_i(X, \mathbb{Q}) = 0$$

(caratteristica di Eulero-Poincaré tramite omologia razionale) da cui segue che $g(X) = 1$.

4. Divisori Theta e teorema di Riemann?

5. Teorema di Torelli?