G2A-245-06
lunedì 28 ottobre 2024 15:00

Proprietà e classificazioni di quadriche in geometria AFFINE.

Ricordo: uno spazio affine è uno spazio proiettivo con una fissata scelta di un iperpiano:

$\mathbb{A} = (\mathbb{P}, H_\infty)$ — $\mathbb{P}$ sp. proiettivo, H_∞ iperpiano di $\mathbb{P}$

i punti affini sono quelli di $\mathbb{P} \setminus H_\infty$
i punti di H_∞ si dicono "impropri" o "punti all'infinito".

Definizione una quadrica affine (di $\mathbb{A}$) è una quadrica proiettiva (di $\mathbb{P}$) che NON contiene H_∞

(nota se $\mathcal{Q}$ contiene H_∞, allora $\mathcal{Q} = H_\infty \cup H$ dove H è un iperpiano di $\mathbb{P}$, e nello spazio affine $\mathbb{A}$ "si vede" solo H)

Definizione se $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, H_\infty)$ è spazio affine, le Affinità di $\mathbb{A}$ sono le proiettività $\varphi: \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ tali che $\varphi(H_\infty) \subseteq H_\infty$, cioè $\varphi(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A}$.

Definizione $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ quadriche affini, $\mathcal{Q} \underset{a}{\sim} \mathcal{Q}'$ (affinemente equivalenti) se esiste una affinità $\varphi: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che $\varphi(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$.

Scopi: capire le proprietà affini, cioè le proprietà che sono stabili per affinità, e capire la classificazione quadriche affini $/\underset{a}{\sim}$

Proprietà affini:

(0) se $\mathcal{Q}$ è quadrica affine, diciamo QUADRICA IMPROPRIA o all'infinito la sua restrizione ad H_∞:

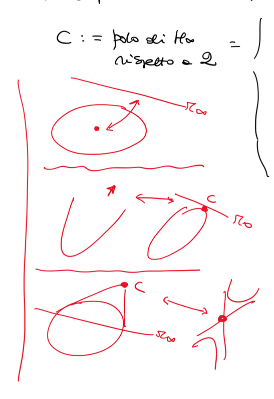
$\mathcal{Q}_\infty := \mathcal{Q} \cap H_\infty$

(nota: abuso di linguaggio: è $\mathcal{Q}|_{H_\infty}$ forma quadratica ristretta allo spazio vettoriale corrisp. ad H_∞, ovvero $\operatorname{supp}(\mathcal{Q}) \cap H_\infty$)

nota se φ affinità, $\varphi(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$ allora $\varphi(\mathcal{Q}_\infty) = \mathcal{Q}_\infty$.

(1) se $\mathcal{Q}$ quadrica affine non degenere, dato che abbiamo fissato un iperpiano H_∞, resta definito il suo polo rispetto a $\mathcal{Q}$:

$C :=$ polo di H_∞ rispetto a $\mathcal{Q}$ = CENTRO di $\mathcal{Q}$ se $C \notin \mathcal{Q}$ sse H_∞ NON è tg $\mathcal{Q}$;
H_∞ è tangente a $\mathcal{Q}$ sse $C \in H_\infty$ (sse $C \in \mathcal{Q}$) e allora lo chiamiamo: CENTROIDE di $\mathcal{Q}$



Nomenclatura:

dato $\mathcal{Q}$ quadrica affine:

se $\mathcal{Q}$ è cono ($rg(\mathcal{Q}) \in \{3, \dots, n\}$, ovvero $V(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$, $V(\mathcal{Q}) = \mathbb{P}(\ker \mathcal{Q})$) e il vertice è $\subseteq H_\infty$ si dice CILINDRO.

(altrimenti, se il vertice non è contenuto in H_∞, si dice un CONO PROPRIO).

$x^2+y^2=1$ in $\binom{x}{y}$; $X_1^2+X_2^2=X_0^2$; $\ker = \langle (0,0,1) \rangle \in H_\infty$

$\mathcal{Q}$ non degenere è

- quadrica a centro se $C = H_\infty^{\perp\mathcal{Q}}$ (polo rispetto a $\mathcal{Q}$ di H_∞) è punto affine: $C \in \mathbb{A}$, $C \notin H_\infty$; $C \notin \mathcal{Q}$ sse H_∞ non è tg $\mathcal{Q}$ sse $\mathcal{Q} \cap H_\infty$ è non degenere
- paraboloide se $C = H_\infty^{\perp\mathcal{Q}}$ è punto di H_∞ (sse $C \in H_\infty$ sse $C \in \mathcal{Q}$ sse H_∞ è tangente alla $\mathcal{Q}$ sse $\mathcal{Q} \cap H_\infty$ è quadrica DEGENERE in H_∞)

nota: un paraboloide non può avere equazione in coordinate affini "diagonale", cioè con soli quadrati. Possiamo diagonalizzare $\mathcal{Q}_\infty$ (come quadrica proiettiva di H_∞), ma (supponiamo $H_\infty: x_0 = 0$) $\mathcal{Q}_\infty$ ha matrice $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ dunque se $\mathcal{Q}$ fosse diagonalizzata risulterebbe degenere.

((se $\mathcal{Q}$ ha equazione $A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$ e $H_\infty: x_0 = 0$ allora $\mathcal{Q}_\infty$ ha matrice $(a_{ij})_{i,j=1\dots n}$, cioè A in cui cancelliamo 1ª riga, 1ª colonna, i termini che contengono x_0))

$\mathcal{Q}$ non degenere a centro,

diciamo CONO ASINTOTICO di $\mathcal{Q}$, il cono che si ottiene proiettando il centro da $\mathcal{Q}_\infty$ = cono tangente a $\mathcal{Q}$ dal centro

Se usiamo $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ con $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, $H_\infty: x_0 = 0$, A matrice di $\mathcal{Q}$, $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ non degenere simmetrica

C è il punto tale che $C^tA = (1\,0 \cdots 0)$ (polare di C per $\mathcal{Q}$ = iperpiano H_∞, $x_0 = 0$)

$C^t = (1\,0 \cdots 0)A^{-1}$ = prima riga/colonna della matrice A^{-1}, cioè di A^c (matrice cong. alg.) = minori aggiunti delle righe $1 \dots n$ di A.

allora se $C \in \mathbb{A}$ il cono asintotico si calcola

$(C^tAX)^2 - (C^tAC)(X^tAX) = 0$

$C^tA = (1 \cdots 0)$; $C^tAC = c_0$ = prima coord. di C $\neq 0$ ($C \in \mathbb{A}$, $\notin H_\infty$)

$X_0^2 - c_0 X^tAX = 0$

$$X^tAX - \frac{1}{c_0}X_0^2 = 0$$

Dunque dall'equazione di $\mathcal{Q}$ cambiamo solo il termine X_0^2 in modo tale che la matrice diventi degenere!

Definizione: $\mathcal{Q}$ non degenere, diciamo DIAMETRI di $\mathcal{Q}$ i sottospazi affini che contengono il centro(ide) di $\mathcal{Q}$

Osservazioni:

(1) se L è diametro di $\mathcal{Q}$, cioè L contiene C: $L \ni C \iff L^{\perp\mathcal{Q}} \subseteq C^{\perp\mathcal{Q}} = H_\infty$

(2) se L è diametro, cosa si può dire di $L^{\perp\mathcal{Q}}$ ($\subseteq H_\infty$) e di $L \cap L^{\perp\mathcal{Q}}$:

$L \cap L^{\perp\mathcal{Q}}$ è $\emptyset_{\mathbb{P}}$ sse L non è tangente a $\mathcal{Q}$ sse $L \cap \mathcal{Q}$ è quadrica non degenere di L

[geometria di $W \subseteq V$: $W^\perp \cap W \neq \{0\}$ sse $\mathcal{Q}|_W$ degenere; $W^\perp \cap W = \{0\}$ sse $\mathcal{Q}|_W$ non degenere]

$L \cap L^{\perp\mathcal{Q}}$ è $\neq \emptyset_{\mathbb{P}}$ sse $L \cap \mathcal{Q}$ è quadrica degenere di L

e allora $V(L \cap \mathcal{Q}) = V(L^{\perp\mathcal{Q}} \cap \mathcal{Q})$ punti di L che stanno su $L^{\perp\mathcal{Q}}$ (perché sono in $\ker(\mathcal{Q})$)

dunque L è tangente a $\mathcal{Q}$ sse $L^{\perp\mathcal{Q}}$ tangente a $\mathcal{Q}$ ($L \cap \mathcal{Q}$ degenere, $L^{\perp\mathcal{Q}} \cap \mathcal{Q}$ degenere) $V(L \cap \mathcal{Q}) \neq \emptyset_{\mathbb{P}} \Rightarrow (V(L^{\perp\mathcal{Q}} \cap \mathcal{Q}) \neq \emptyset_{\mathbb{P}})$

Morale: se un diametro (passa per centro) è tangente a $\mathcal{Q}$, allora è tangente in un punto di $L \cap L^{\perp\mathcal{Q}} \subseteq H_\infty$, quindi è "asintoto".

---

lunedì 28/10/2024

Riassunto: $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, H_\infty) = \mathbb{P} \setminus H_\infty$
Quadrica affine = quadrica che $\not\supseteq H_\infty$

$\mathcal{Q}$ degenere, cono: CILINDRI = coni con vertice $\subseteq H_\infty$

$\mathcal{Q}$ non degenere: $C = H_\infty^{\perp\mathcal{Q}}$ punto: centroide $\in H_\infty$, $\in \mathcal{Q}$: PARABOLOIDE (tg ad H_∞); centro $\notin H_\infty$, $\notin \mathcal{Q}$: Q. A CENTRO (H_∞ non è tg H_∞)

se $L \subseteq \mathbb{P}$, $L \ni C$ allora diciamo che L è DIAMETRO di $\mathcal{Q}$ capita sse il suo polare $L^{\perp\mathcal{Q}} \subseteq H_\infty$
($L \ni C = H_\infty^{\perp\mathcal{Q}} \iff L^{\perp\mathcal{Q}} \subseteq C^{\perp\mathcal{Q}} = H_\infty$)

$\emptyset_{\mathbb{P}} \neq L \cap L^{\perp\mathcal{Q}}$ sse $\mathcal{Q} \cap L$ è degenere sse L tg $\mathcal{Q}$
sse $\mathcal{Q} \cap L^{\perp\mathcal{Q}}$ è degenere sse $L^{\perp\mathcal{Q}}$ tg $\mathcal{Q}$
(e allora è tg in punti di $L \cap L^{\perp\mathcal{Q}} \subseteq H_\infty$)

L non tg $\mathcal{Q}$ sse $L \cap \mathcal{Q}$ non degenere sse $L \cap L^{\perp\mathcal{Q}} = \emptyset_{\mathbb{P}}$ sse $L, L^{\perp\mathcal{Q}}$ sono COMPLEMENTARI ($L \vee L^{\perp\mathcal{Q}} = \mathbb{P}$)

Usando la omologia proiettiva otteniamo che $\mathcal{Q}$ è stabile per l'omologia involutoria avente come sottospazi di punti uniti (relativi ad autovalori ± 1) L ed $L^{\perp\mathcal{Q}}$.

[$\forall$ retta per L, $L^{\perp\mathcal{Q}}$, le $\cap$ con $\mathcal{Q}$ formano una quaterna armonica: quindi l'involuzione che fissa L, $L^{\perp\mathcal{Q}}$ scambia i due punti $\cap \mathcal{Q}$]

Dunque la simmetria (riflessione) affine avente ASSE L ($\subseteq \mathbb{A}$) e DIREZIONE $L^{\perp\mathcal{Q}}$ ($\subseteq H_\infty$) lascia fissa $\mathcal{Q}$,

ovvero: su ogni retta per $P \in L$, $Q \in L^{\perp\mathcal{Q}}$ si ha che P è punto medio di $(P \vee Q) \cap \mathcal{Q}$

$L = \frac{A+B}{2}$; $(A\, B\, \infty, \frac{A+B}{2}) = -1$

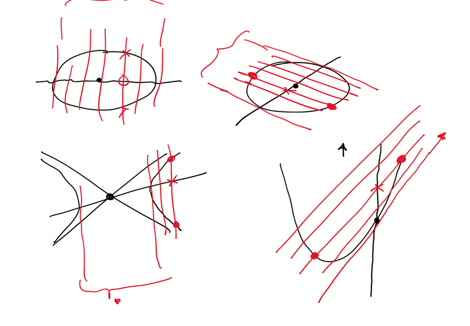
Definizione: se L è diametro di $\mathcal{Q}$, non tangente a $\mathcal{Q}$, allora $C \vee L^{\perp\mathcal{Q}}$ è diametro di $\mathcal{Q}$: si dice diametro coniugato di L.

nota $L \cap (C \vee L^{\perp\mathcal{Q}}) = \{C\}$

(se invece la quadrica fosse degenere? $L \cap (C \vee L^{\perp\mathcal{Q}}) \supsetneq \{C\}$)

Allora possiamo dire che: ogni quadrica non degenere è simmetrica rispetto a qualsiasi diametro nella direzione del diametro coniugato (supponendo il diametro non tangente a $\mathcal{Q}$, cioè non asintoto)

Esempi nel piano:



(rette di simmetria per le coniche!)

Vi sono dei casi in cui $L = L^{\perp\mathcal{Q}} \vee C$ (DIAMETRI AUTO CONIUGATI, cioè in cui il coniugato è il diametro stesso), ma vuol dire che $L^{\perp\mathcal{Q}} \subseteq L$, quindi si tratta di diametri tangenti alla quadrica in punti impropri (di H_∞, perché $L^{\perp\mathcal{Q}} \subseteq H_\infty$).

Nel caso delle iperboli nel piano è esattamente il caso degli asintoti (passano per il centro, e sono tangenti nei punti impropri).
Come si trovano i diametri autoconiugati delle coniche?

Classificazione affine: studiare Quadriche Affini $/\underset{a}{\sim}$

$\mathcal{Q} \underset{a}{\sim} \mathcal{Q}'$ sse $\exists \varphi$ affinità $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ t.c. $\varphi(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$

sse ($\Rightarrow$) $\begin{cases} \mathcal{Q} \underset{p}{\sim} \mathcal{Q}' & (\text{in } \mathbb{P}) \\ \mathcal{Q}_\infty \underset{p}{\sim} \mathcal{Q}'_\infty & (\text{in } H_\infty) \end{cases}$

ovvio perché $\varphi: \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ t.c. $\varphi: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $\varphi_\infty: H_\infty \to H_\infty$; $\varphi(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$, $\varphi_\infty(\mathcal{Q}_\infty) = \mathcal{Q}'_\infty$, $\varphi_\infty = \varphi|_{H_\infty}$

Tramite metodi di "riduzione a forma canonica" vedremo che è vera la inversa $\Leftarrow$.

(a) diagonalizzare $\mathcal{Q}_\infty$ su H_∞, poi usiamo traslazioni dello spazio affine per semplificare prima riga/colonna di $\mathcal{Q}$,

(b) completare i quadrati senza modificare x_0 (perché $H_\infty: x_0 = 0$ è iperpiano fissato) e poi semplificare la parte rimanente che contiene x_0,

(c) cercare un RIFERIMENTO AFFINE AUTOPOLARE

nota, quando diagonalizziamo una quadrica proiettivamente troviamo un rif $P_0 \dots P_n, U$ in cui la matrice è diagonale, quindi $P_i^{\perp\mathcal{Q}} = P_0 \vee \dots \hat{P_i} \dots P_n$

perché $(0 \dots 1 \dots 0)\begin{pmatrix} \delta_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n \end{pmatrix} = (0 \dots \delta_i \dots 0) \sim (0 \dots 1 \dots 0)$

ogni punto è polo dell'iperpiano sup. degli altri (riferimento AUTOPOLARE proiettivo)

nel caso affine ci saranno due tipi di riferimenti autopolari:
autopolari propri: $\forall i$ $P_i \perp$ altri P_j, $P_i^\perp$ = altri P_j
autopolari impropri: per dovi che $P_i^\perp \ni P_i$ (ma comunque è $\vee$ di alcuni dei P_i)

Metodi di normalizzazione:

(a) osservazione base: usiamo $\mathbb{P}$, $H_\infty: x_0 = 0$, affinità hanno matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ v & H_\infty \end{pmatrix} = H$

la quadrica ha matrice $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a^t \\ a & A_\infty \end{pmatrix}$

$$H^tAH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ v & H_\infty \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a_{00} & a^t \\ a & A_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ v & H_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v^t \\ 0 & H_\infty^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} + a^tv & a^tH_\infty \\ a + A_\infty v & A_\infty H_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} + a^tv + v^ta + v^tA_\infty v & a^tH_\infty + v^tA_\infty H_\infty \\ \dots & H_\infty^t A_\infty H_\infty \end{pmatrix}$$

Cioè usando una affinità la parte A_∞ di $\mathcal{Q}_\infty$ cambia per congruenza tramite H_∞.

dunque troviamo una Affinità tale che

$$A \underset{a}{\sim} \begin{pmatrix} b_{00} & b^t \\ b & \begin{matrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{matrix} \end{pmatrix}$$

e come posso semplificare la prima riga/colonna?

(b) completo i quadrati $Q(X) = X^tAX$, ma senza cambiare X_0:

$Q(Y) \underset{a}{\sim} b_{00}X_0^2 + 2b_{01}X_0Y_1 + \dots + 2b_{0n}X_0Y_n + \delta_1Y_1^2 + \dots \delta_nY_n^2$

$= (X_0\, Y_1 \cdots Y_n)\begin{pmatrix} b_{00} & b^t \\ b & \begin{matrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{matrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$

e trovo lo stesso problema che in (a)

osservazioni: se $\delta_i \neq 0$ allora possiamo fare $b_i = 0$ usando il completamento

$\delta_i\left(Y_i^2 + 2\frac{b_{0i}}{\delta_i}X_0Y_i\right) + \dots$

$\delta_i\left(Y_i + \frac{b_{0i}}{\delta_i}X_0\right)^2 - \delta_i\frac{b_{0i}^2}{\delta_i^2}X_0^2 + \dots$

$Z_i = Y_i + \frac{b_{0i}}{\delta_i}$ TRASLAZIONE che è Affinità

morale: $\begin{pmatrix} b_{00} & 0 \cdots 0 \; ? \\ 0 & \delta_1 & \\ \vdots & & \ddots \\ ? & & & 0 \end{pmatrix}$

e se tutti i $\delta_i \neq 0$ diagonalizziamo la matrice, altrimenti: può capitare $\delta_i = 0$ con $b_{0i} \neq 0$, ma supponiamo $\delta_n = 0$ con $b_{0n} \neq 0$:

$= b_{00}X_0^2 + b_{01}X_0X_1 + b_{02}X_0X_2 \cdots b_{0n-1}X_0X_{n-1} + b_{0n}X_0X_n + \delta_1X_1^2 + \delta_2X_2^2 + \dots + \delta_{n-1}X_{n-1}^2 + \dots =$

$= X_0(b_{00}X_0 + \dots + b_{0n}X_n) + \delta_1X_1^2 + \dots + \delta_{n-1}X_{n-1}^2 =$

$= 2X_0Y_n + \delta_1X_1^2 + \dots + \delta_{n-1}X_{n-1}^2 + 0X_n^2$

matrice: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & 1 \\ \vdots & \delta_1 & & \\ 0 & & \ddots \delta_{n-1} & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$

Conclusione: le forme canoniche sono di 2 tipi:

$\begin{pmatrix} a_0 & & 0 \\ & a_1 & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & 1 \\ 0 & a_1 & \\ \vdots & & a_{n-1} \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$

se non degeneri sono quadriche a centro — se non degeneri sono paraboloidi

$\sum a_iX_i^2 = 0$, $a_0X_0^2 + \dots + a_nX_n^2 = 0$ — $\sum_{i=1}^{n-1} a_iX_i^2 - 2X_0X_n = 0$, $X_0X_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_iX_i^2$

Da questo si capisce subito il "viceversa" del criterio $\mathcal{Q} \underset{a}{\sim} \mathcal{Q}'$ sse $\begin{cases} \mathcal{Q} \underset{p}{\sim} \mathcal{Q}' \\ \mathcal{Q}_\infty \underset{p}{\sim} \mathcal{Q}'_\infty \end{cases}$

e d'altra parte permette di esplicitare la classificazione nei casi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ usando:
($\mathbb{C}$) usiamo (rg, rg_∞)
($\mathbb{R}$) usiamo $(\operatorname{sgn}, \operatorname{sgn}_\infty)$

Classificazione su $\mathbb{C}$:

$\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$: matrici 2x2 $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{01} & a_{11} \end{pmatrix}$, $A_\infty = a_{11}$

$rg \backslash rg_\infty$	1	0
2	✓	✓
1	∄	✓

$(2,1)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $X_0^2+X_1^2$, $1+x^2=0$, $\binom{1}{\pm i}$
$(2,0)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $2X_0X_1 = 0$, $\binom{1}{0}\binom{0}{1}$
$(1,1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $X_1^2 = 0$
$(1,0)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $X_0^2 = 0$

$\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}\, a_{02} \\ a_{01} & A_\infty \\ a_{02} & \end{pmatrix}$

$rg \backslash rg_\infty$	2	1	0
3	⊙	∪	∄
2	×	//	✓
1	∄	//	✓

$(3,2)$: $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $-X_0^2+X_1^2+X_2^2=0$, $x^2+y^2=1$ conica a centro
$(3,1)$: $\begin{pmatrix} & & -1 \\ & 1 & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}$ $X_1^2 - 2X_0X_2 = 0$, $2y = x^2$ parabola
$(2,2)$: $X_1^2+X_2^2=0$, $x^2-y^2=0$
$(2,1)$: $X_0^2+X_1^2=0$, $x^2=1$, $x \pm 1 = 0$
$(2,0)$: $2X_0X_2 = 0$
$(1,1)$: $X_1^2 = 0$
$(1,0)$: $X_0^2 = 0$

$\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$:

$rg \backslash rg_\infty$	3	2	1	0
4	⊙ (QUADRICA A CENTRO)	(PARABOLOIDE)	∄	∄
3	cono	cil.	cil.	∄
2	∄	2 piani incid.	2 piani paral.	1 piano + π_∞
1	∄	∄	1 piano doppio	π_∞ doppio

coni?

$(3,3)$: $X_1^2+X_2^2+X_3^2=0$, vertice $(1,0,0,0)$
$(3,2)$: vertice $=(0,0,0,1)$, cilindro
$(3,1)$: vertice? CILINDRO PARABOLICO!

$\mathbb{A}^4(\mathbb{C})$:

$rg \backslash rg_\infty$	4	3	2	1	0
5	centro	parab.	∄	∄	∄
4 (coni)	cono (vert.)	cil.	cil. par.	∄	∄ ← vertice 1 punto
3 (coni)	∄	cono (vert.)	cil.	cil. par.	∄ ← vertice 1 retta
2 (riducibili)	∄	∄	2 iperp. incid.	2 iperp. parall.	1 iperp. + H_∞
1 (riducibili)	∄	∄	∄	iperp. doppio	H_∞ doppio

Problema: confrontare classificazioni proiettiva su $\mathbb{C}$ / affine su $\mathbb{C}$

---

martedì 29/10/2024

CLASSIFICAZIONE su $\mathbb{R}$: dipende da $\operatorname{sgn}(\mathcal{Q})$, $\operatorname{sgn}(\mathcal{Q}_\infty)$

$\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$:

$\operatorname{sgn} \backslash \operatorname{sgn}_\infty$	(1,0)	(0,0)
(2,0)	✓	∄
(1,1)	✓	✓
(1,0)	✓	✓

$(2,0)(1,0)$: $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ $X_0^2+X_1^2=0$ $\binom{1}{\pm i}$ punti non $\mathbb{R}$
$(1,1)(1,0)$: $\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ $-X_0^2+X_1^2=0$ $\binom{1}{\pm 1}$ punti $\mathbb{R}$

nota quando il rango cala di 2 (conica/parabola), la segnatura accanto di (1,1) perché otteniamo aggiungendo un termine non diagonale
$(1,1)(0,0)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $X_0X_1 = 0$
$(1,0)(1,0)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $X_1^2 = 0$
$(1,0)(0,0)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $X_0^2 = 0$

$\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:

$\operatorname{sgn} \backslash \operatorname{sgn}_\infty$	(2,0)	(1,1)	(1,0)	(0,0)
(3,0)	◌	∄	∄	∄
(2,1)	○	⊃	∪	∄
(2,0)	×	∄	✓	∄
(1,1)	∃	×	//	✓
(1,0)	∄	∄	//	✓

(coni non tg π_∞: (2,0), (1,1); tg π_∞: (1,0), (0,0))

$\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$\operatorname{sgn} \backslash \operatorname{sgn}_\infty$	(3,0)	(2,1)	(2,0)	(1,1)	(1,0)	(0,0)
(4,0)	◌	∄	∄	∄	∄	∄
(3,1)	○	✓	✓	∄	∄	∄
(2,2)	∄	✓	∄	✓	∄	∄
(3,0)						
(2,1)						
(2,0)						
(1,1)						
(1,0)						

non dg.: (4,0), (3,1), (2,2); coni (ESERCIZIO!): (3,0), (2,1)
non tg π_∞: centro; tg π_∞: paraboloidi

ellissoide con p. $\mathbb{R}$; ellissoide senza p. $\mathbb{R}$; iperboloide iperbolico; iperboloide ellittico; paraboloide iperbolico; paraboloide ellittico

ellissoide = $\cap \pi_\infty$ in punti non reali
iperboloide = $\cap \pi_\infty$ in quadrica non degenere con punti reali.
paraboloide = non degenere tangente π_∞

Problema: $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$

$\operatorname{sgn} \backslash \operatorname{sgn}_\infty$	(4,0)	(3,1)	(2,2)	(3,0)	(2,1)	(2,0)	(1,1)	(1,0)	(0,0)
(5,0)	◌	∄	∄	∄	∄				
(4,1)	○	·	∄	·	∄				
(3,2)	∄	·	·	∄	·				

(non tangenti: (4,0), (3,1), (2,2); tangenti: (3,0), (2,1), …)
? ellissi, iperboloidi, paraboloidi

Nota: dato un polinomio polinomio di 2° grado in X, Y:
$aX^2 + bY^2 + 2cXY + 2dX + 2eY + f = 0$
è conica di matrice

$A = \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & c \\ e & c & b \end{pmatrix}$

e possiamo subito capire: se si spezza in 2 rette ($\det A = 0$)
e altrimenti che tipo di conica è:

$\det(A_\infty) = \det\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$: > 0 ellisse (ha punti reali se $|A| > 0$, non ha p. $\mathbb{R}$ se $|A| < 0$); $= 0$ parabola; < 0 iperbole

perché intersecato con $X_0 = 0$ dà $aX^2 + bY^2 + 2cXY = 0$
$\Delta = c^2 - ab$: > 0 2 soluzioni $\mathbb{R}$; $= 0$ 1 sol. reale; < 0 2 soluzioni $\mathbb{C}$ non $\mathbb{R}$

Problema: dare criteri "minimali" sulle matrici per distinguere i vari tipi di quadriche non degeneri in dim 3, 4, …, n.

Problemi affini:

① in $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ quanti tipi di {ellissoidi, iperboloidi, paraboloidi} esistono (tra quadriche non degeneri)

dim 2	dim 3	dim 4	dim 5?	… dim n?
2 ellissi	2 ellissoidi	2 ellissoidi		2 ellissoidi
1 iperb.	2 iperb.	3 iperboloidi		n-1 iperboloidi
1 parab.	2 parab.	2 paraboloidi		$\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$

② Aspetti affini delle quadriche rigate (dim 3): $\operatorname{sgn} = (2,2)$ si può ottenere: $\operatorname{sgn}_\infty(2,1)$ iperboloide, non tg π_∞; $\operatorname{sgn}_\infty(1,1)$ paraboloide, tg π_∞

della costruzione: tesserati comuni a 3 rette 2a2 sghembe:

ha rette (2a2 sghembe) che stanno su 3 piani paralleli

③ domanda: dato un "piccolo" tratto di conica affine, come posso capire se è ellisse/parabola/iperbole?
sugg.: usare la polarità?

Esercizi/problemi:

nel piano: $P, Q \in \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ cerchiamo $\{X : d(P,X) = k\, d(Q,X)\}$, $k \geq 0$

nello spazio: $\frac{d(X,P)}{d(X,Q)} = k$; $\frac{d(X,P)}{d(X,r)} = k$; $\frac{d(X,P)}{d(X,\pi)} = k$; $\frac{d(X,r)}{d(X,s)} = k$

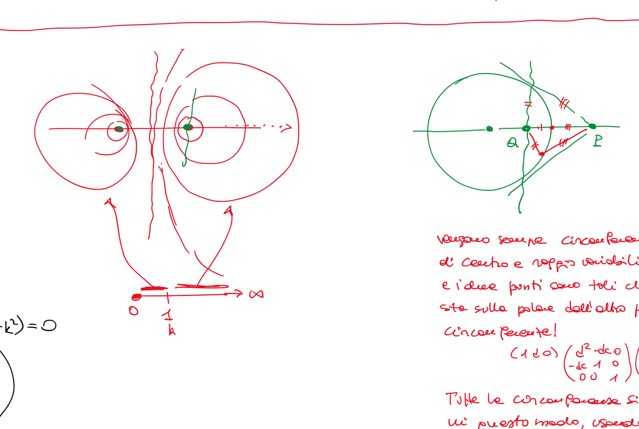
nel piano: P punto, r retta $\not\ni P$ cerchiamo $\{X : d(X,P) = k\, d(X,r)\}$

primo caso $P, Q \in \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ posso supporre: $\binom{d}{0}$, $\binom{-d}{0}$, $X = \binom{x}{y}$

$d(X,P) = k\, d(X,Q)$
$\|X - P\|^2 = k^2\|X - Q\|^2$
$(X-d)^2 + Y^2 = k^2((X+d)^2 + Y^2)$
$X^2(1-k^2) + Y^2(1-k^2) - 2dX(1+k^2) + d^2(1-k^2) = 0$

$\begin{pmatrix} d^2(1-k^2) & -d(1+k^2) & 0 \\ -d(1+k^2) & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} d^2 & -d\frac{1+k^2}{1-k^2} & 0 \\ -d\frac{1+k^2}{1-k^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X^2 + Y^2 - 2d\frac{1+k^2}{1-k^2}X + d^2 = 0$$



Vengono sempre circonferenze, di centro e raggio variabili con k, e i due punti sono tali che ciascuno sta sulla polare dell'altro per tutte le circonferenze!

$(1\; d\; 0)\begin{pmatrix} d^2 & -dc & 0 \\ -dc & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} = (d^2 - d^2c, -dc + d, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Tutte le circonferenze si possono trovare in questo modo, usando punti su un diametro.

giovedì 31/10/2024