Proiettività prospettive di opportune rigate cubiche,
e in particolare QUADRICHE RIGATE (quadriche non degeneri che contengono rette)

Quadriche non degenere in $\mathbb{P}^3(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^4)$
(può essere pensata intrinseca: ellisse
~ retta proiettiva complessa nella proiettiva)

Casi standard: $\forall q \in \mathbb{C}$ (2 coniche nella $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$)
$\forall p \in (1,1)$ di $\mathbb{R}$ (2 coniche nella $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$)

Rigata rotta: 2 quadriche degenerate (1,1)
ciascuna riducibile in modo
$\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \boxed{\square} & 0 \\ 0 & \boxed{\square} \end{pmatrix}$
$X_0^2 + Y_0^2 - Y_1^2 - Y_2^2$ & $\boxed{X_0 X_3 - X_1 X_2}$
$(X_0^2 - Y_0^2) - (Y_1^2 - Y_2^2)$
$(X_0 + Y_0)(X_0 - Y_0) - (Y_2 + Y_1)(Y_2 - Y_1)$
$X_0 \quad X_3 \quad Y_1 \quad Y_2$

(1) Si vede subito che ci sono almeno rette contenute:

$\mathbb{I}(\gamma_{\lambda\mu})$: $\begin{cases} \lambda X_0 = \mu X_1 \\ \lambda X_2 = \mu X_3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\mu \end{pmatrix}$
con $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \lambda & 0 \\ 0 & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$
PRIMA SCHIERA

$\mathbb{I}(\gamma_{\lambda\mu})$: $\begin{cases} \lambda X_0 = \mu X_2 \\ \lambda X_1 = \mu X_3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\mu \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$
SECONDA SCHIERA

chiaramente $\mathbb{I}(\gamma_{\lambda\mu}), \mathbb{I}'(\gamma_{\lambda\mu}) \subset \mathcal{Q} \quad \forall \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$

vicevers, se $\pi \subset \mathcal{Q}$ retta e una delle precedenti:

$\pi \cap (X_0 = 0)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ span $\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$
$X_0 X_3 = X_1 X_2$
$\pi \cap (X_3 = 0)$: $\begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \\ 0 & \gamma' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ span $\begin{pmatrix} \alpha' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta' \\ \gamma' \\ 0 \end{pmatrix}$

dunque π è sup di due punti, uno in $(X_0 = 0)$, uno in $(X_3 = 0)$
ma $\pi \subset \mathcal{Q}$
(spazio generato dai vettori da cui siamo partiti $\Rightarrow$ è $\mathbb{I}(\gamma_{\alpha\beta})$)

è facilissimo solo se 2 casi:
$\pi = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}$ con $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$ allora $\pi \in \mathbb{I}(\gamma_{\alpha\beta})$
oppure
$\pi = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \delta & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}$ con $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$ allora $\pi \in \mathbb{I}'(\gamma_{\alpha\beta})$

Morale: ci sono esattamente 2 famiglie di rette,
così che una $\forall q$ che sia $(2,2)$ in $\mathbb{K}^3$ ci siano 2 famiglie di solo spazi isomorfi una ad una!

(2) come stanno disposte queste rette?

rette della $\mathbb{I}$ incrociano sempre 2 a 2 sghembe
rette della $\mathbb{I}'$ stesso fatto 2 a 2 sghembe
ogni retta $\mathbb{I}$ incontra TUTTE le rette della $\mathbb{I}'$
(e viceversa)

Modi esempio che $\mathbb{I}(\gamma_{\lambda\mu})$ e $\mathbb{I}'(\gamma'_{\lambda'\mu'})$ sono sghembe se distinte:

$$\begin{vmatrix} \mu & 0 & \mu' & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda' & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \mu' \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu & \mu' & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \mu' \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda' \end{vmatrix} = -(\mu\lambda' - \lambda\mu')^2$$

$= 0$ (cioè le rette fanno incidenza; non sghembe)
sse $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda'}{\mu'}$ sse $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}$
stessa retta!

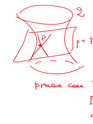
idem per $\mathbb{I}(\gamma_{\lambda\mu})$ e $\mathbb{I}(\gamma'_{\lambda'\mu'})$

$\mathbb{I}(\gamma_{\lambda\mu}) \cap \mathbb{I}'(\gamma_{\alpha\beta})$

Vediamo da matrice dei punti che spezzano la retta:

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & \alpha & 0 \\ \lambda & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda & 0 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{punto di intersezione:}} \begin{matrix} \beta\mathbb{I} + \alpha\mathbb{I}' = \mu\lambda\gamma_{\lambda\mu} + \alpha\beta\gamma_{\alpha\beta} \\ \mathbb{I}(\gamma_{\lambda\mu}) \qquad \mathbb{I}'(\gamma_{\alpha\beta}) \end{matrix} \boxed{\begin{pmatrix} \beta\mu \\ \beta\lambda \\ \alpha\mu \\ \alpha\lambda \end{pmatrix}}$$

$\beta\mathbb{I} + \alpha\mathbb{I}' - \mu\lambda\mathbb{I} = 0 \Rightarrow$ det $= 0$
$\Rightarrow$ rette incidenti



prendo caso $X_0 X_3 = X_1 X_2$ (quadrica)
$P^* \left(\frac{1}{0}\right)$
calcolo $\mathbb{P}$
calcolo $p \cap Q$ (conica del $\mathbb{P}$, unione di 2 rette di $\mathbb{P}$ ciascuna con Q --)

(3) dato punto della quadrica e' intersezione di due rette contenute nella quadrica, una della I schiera una della II schiera

Notte se $P \in \mathcal{Q}$, allora $p = T_P \mathcal{Q}$ (piano)
è tale da $p \cap \mathcal{Q}$ è conica degenere di p
dunque interseca in rette (≤2)
e dunque sono due tipo precedente -

tipici: tuttavia:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ p_{34} \\ p_{24} \end{pmatrix} \in \begin{cases} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ p_{34} \\ p_{24} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{24} \\ p_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{34} \\ p_{24} \end{pmatrix} = \mathbb{I}(\gamma_{x_1, p_{34}}) \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ p_{34} \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ p_{24} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ p_{34} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{24} \\ p_{14} \end{pmatrix} = \mathbb{I}'(\gamma_{x_1, p_{34}}) \end{cases}$$

per condizione sfere
$X_0 X_3 = X_1 X_2$

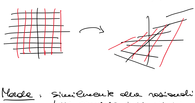
Il calcolo del punto di intersezione delle rette di $\mathbb{I}$ e $\mathbb{I}'$ suggerisce:

MAPPA DI SEGRE:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$$
$$\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda\lambda' \\ \lambda\mu' \\ \mu\lambda' \\ \mu\mu' \end{pmatrix}$$

è ben definita,
è iniettiva (esercizio),
non è suriettiva:
l'immagine della mappa di Segre è una quadrica in $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ di equazione $X_0 X_3 = X_1 X_2$ (ca $\mathcal{Q}$)

inoltre: le rette case tramite mappa di Segre date da $\{\text{rette}^{\text{K}}\} \times \{\mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}$
e $\{\mathbb{P}^1(\mathbb{K})\} \times \{\text{rette}^{\text{K}}\}$



Morale: sfruttando idea precedente tra rette delle coniche irriducibili:
ci sono come parametrizzati dai punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$,
ma la quadrica rigata di punti sono parametrizzati dai punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

Per generale dicevamo "vogliamo rettangoli" i sottoinsiemi di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che sono tramite funzioni polinomiali un biunivoco con PRODOTTI DI SPAZI PROIETTIVI:

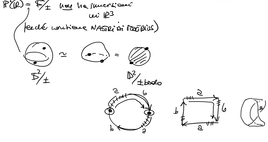
le coniche sono razionali (a $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$)
la quadrica rigata sono razionali (a $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$)

Nota: $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ non è $\mathbb{P}^2$

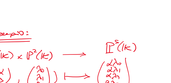
(anche se $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ $\quad \mathbb{P}^1$
$\cup \quad \cup$
$\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 = \mathbb{K}^4$

per esempio $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \cong \mathbb{S}^1$
$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$
$\mathbb{T}^2 / \mathbb{Z}_2$ non ha immersione in $\mathbb{R}^3$

perché $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^2 / \mathbb{Z}_2$



$\mathbb{S}^2 / \pm$ identità



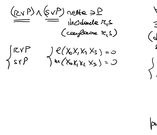
esempio:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^8(\mathbb{K})$$
$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} xz \\ xw \\ yz \\ yw \\ x^2z \\ x^2w \\ xyz \\ xyw \\ y^2z \\ y^2w \\ x^3z \\ x^3w \\ x^2yz \\ x^2yw \\ xy^2z \\ xy^2w \\ y^3z \\ y^3w \end{pmatrix}$$

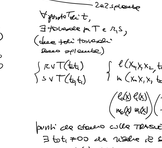
immagine?

Ha senso occuparsi ulteriormente di questo problema proiettivo?

(a) date 3 rette in $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$, dare a due sghembe almeno (1 ulteriore) retta incidente
le ha date forma una rigata di rette di una quadrica rigata,
e di altra retta di rette di quella quadrica rigata di $\mathbb{P}$ rette date
(e tutte quelle incidenti a 3 (almeno) trovate!)



$\Rightarrow$



$(r \vee P) \wedge (s \vee P)$ retta $\supseteq$ incidente r, s (sappiamo $\forall_s$)

$\begin{cases} r \vee P \\ s \vee P \end{cases}$ $\begin{matrix} \ell(X_0 X_1 X_2 X_3) = 0 \\ m(X_0 X_1 X_2 X_3) = 0 \end{matrix}$

$\forall$ punto $T \in t$,
$\exists!$ piano $\pi_T \in \pi, s$
(dove tali piani sono sghembe)

$\begin{cases} r \vee T(\lambda_T \mu_T) \\ s \vee T(\lambda_T \mu_T) \end{cases}$ $\begin{matrix} \ell(X_0 X_1 X_2 X_3 \lambda_T \mu_T) = 0 \\ m(X_0 X_1 X_2 X_3 \lambda_T \mu_T) = 0 \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} \ell(\lambda) & \ell(\mu) \\ m(\lambda) & m(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_t \\ \mu_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

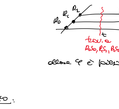
punti che stanno sulle TRASVERSALI:
$\exists$ tali $\neq 00$ da rette in sistema
sse $\begin{vmatrix} \ell(\lambda) & \ell(\mu) \\ m(\lambda) & m(\mu) \end{vmatrix} = 0$

(b) dato $\varphi : \pi \longrightarrow s$ proiettività tra 2 rette sghembe in $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$
allora

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{R \in \pi} (R \vee \varphi(R)) \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$$
Unione di rette

è una quadrica rigata:
da rette $R \vee \varphi(R)$ al variare $R \in \pi$
formano una schiera,
π, s sghembe per ciascuna schiera

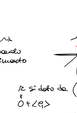
(una proiettività tra rette sghembe in $\mathbb{P}^3$ è sempre un PROIETTIVO
da una retta dell'altra dei cui punti una TERNA retta sghemba con le altre)



$\pi \longrightarrow s$ è proiettività, quindi parametrizzata

$R \longmapsto (R \vee t) \wedge s$

viceversa se $\pi \xrightarrow{\varphi} s$ proiettività



allora φ è proiettività di centro t.

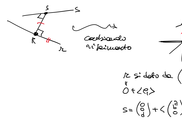
(1*) $\varphi : \pi(\mathbb{K}) \longrightarrow s(\mathbb{K})$ proiettività con π, s sghembe in $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$
allora $\mathcal{Q} = \bigcup_{R \in \pi(\mathbb{K})} \pi \wedge \varphi(R)$ è unione di rette, $R \in \pi(\mathbb{K})$
è quadrica rigata in $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$

(2) Siano π, s rette sghembe in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$
studiamo:

$$\{X \in \mathbb{E}^3(\mathbb{R}) : d(X, \pi) = k\, d(X, s)\} \quad \text{con } k \in \mathbb{R}_{>0}$$

Vediamo che si tratta di quadriche rigate!

Supponiamo:



π si dato da $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \right\rangle$

$O + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

$$d(X, \pi) = d\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

$$d(X, s) = \frac{\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \times \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \times \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{2}} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -x_0 x_2 \\ -x_1 x_2 \\ x_0^2 + x_1^2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(x_0 x_2)^2 + (x_1 x_2)^2 + (x_0^2 + x_1^2)^2 + x_2^2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(x_0^2 + x_1^2)(x_2^2 + 1) + (x_0^2 + x_1^2)^2}}{\sqrt{2}}$$

$\frac{\sqrt{x^2 + X}}{d(X,s) \cdot \frac{\sqrt{2}(x^2 + 1)}{x^2}}$

da $d(X,\pi)^2 = k^2 d(X,s)^2$ viene una equazione di 2° grado nelle $X_0 X_1 X_2$, omogenea nelle $X_0 X_1 X_2 X_3$: stiamo in presenza di quadriche -

possiamo supporre $a^2 + b^2 = 1$,
altrimenti
$d^2(X_0^2 + X_1^2) - (X_2 - d X_3)^2 = (b X_1 - a X_3)^2$
omogeneo
$a^2 (X_0^2 + X_1^2) - (X_2 - d X_3)^2 = (b X_1 - a X_3)^2$
e si vede subito che ha signatura $(2,2)$, perché?

④ altro esempio: dato un piano π e un punto $P \notin \pi$,
che insieme ottengono con
$\{X \in \mathbb{E}^3(\mathbb{R}) : d(X, \pi) = k\, d(X, P)\}$
(punti con dist tra π e P costante) ?

Giovedì 23 ottobre 2025