GEA 256-08

Proiettività: $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$

Proiettività su $\mathbb{P}(V)$ = $\mathbb{P}($ spazio proiettivo che ha $V)$ $\longrightarrow$ $\mathbb{P}(\text{insieme}$ $\text{degli spazi vettoriali di } \mathbb{R}^2$ $\text{di } \mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$
$= \mathbb{P}($ insieme delle rette in $\mathbb{R}^3)$
$= \{ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ lin.} \}_{/\sim}$
$= \mathbb{P}\left(\frac{\text{End}(\mathbb{R}^3)}{\text{Id}\cdot\mathbb{R}}\right)$

$\mathbb{P}(\text{End}(\mathbb{R}^3))$ = spazio proiettivo delle matrici 3×3 a coefficienti in $\mathbb{R}$, a meno di un multiplo di Id

$\mathbb{P}(\text{End}(\mathbb{R}^3)) \supset \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$
$\supset$ insieme delle proiettività di $\mathbb{P}^2$ in $\mathbb{P}^2$

Teorema fondamentale della geometria proiettiva

Classificazione: Se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso, allora ogni proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ è coniugata a una delle seguenti:
- $z \mapsto z + b$ (traslazione)
- $z \mapsto az$ (omotetia)
- $z \mapsto \frac{1}{z}$ (inversione)

Classificazione: Se A è una matrice $n\times n$ su un campo algebricamente chiuso $\mathbb{K}$, allora A è coniugata a una matrice di Jordan, cioè una matrice a blocchi di Jordan, unica a meno dell'ordine dei blocchi.

Classificazione delle proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$: Ogni proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ è coniugata a una delle seguenti:
- $z \mapsto z + b$ (traslazione)
- $z \mapsto az$ (omotetia)
- $z \mapsto \frac{1}{z}$ (inversione)

Una proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ è:
- ellittica se è coniugata a una rotazione
- parabolica se è coniugata a una traslazione
- iperbolica se è coniugata a un'omotetia di ragione reale

Una proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ è:
- ellittica se ha due punti fissi e manda ogni cerchio per i punti fissi in se stesso
- parabolica se ha un punto fisso e manda ogni cerchio per il punto fisso in se stesso
- iperbolica se ha due punti fissi e manda ogni cerchio per i punti fissi in cerchi per i punti fissi