Applicazione delle quadriche: classificazione delle rette di $\mathbb{P}^3$.

Motivazione: ci aiuta in un'infinità di aspetti geometrici. Un dato stesso oggetto geometrico: $\eta_{\mathbb{P}^3}$.
- $\subset$ punti di $\mathbb{P}^3$
- rette di $\mathbb{P}^3$ = punti $w \in \mathbb{P}^5$
  piani di $\mathbb{P}^3$ = punti $w \in \mathbb{P}^5$
- coniche di $\mathbb{P}^3$ = punti di $w \in \mathbb{P}^5$
- quadriche di $\mathbb{P}^3$ = punti di $\mathbb{P}(\Gamma^2)^{\vee}$

Diamo caso **una** bisezione: rette di $\mathbb{P}^3$
$r = X \vee Y$ ha una coordinata
$= \mathbb{K}\pi\xi$ una sola sul punto unitario:

Potremmo pensare
$$\{\text{rette di } \mathbb{P}^3\} \cong \frac{(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3)_{\Delta}}{\left| \begin{array}{l} (x,y) \sim (x',y') \text{ se } X \vee X' = Y \vee Y' \\ (\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3)_{\Delta} / (\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3)_{\Delta} \end{array} \right.}$$
dove che "dimensione" dovrà essere 4 sono rette di $\mathbb{P}^3$: $6-2=4$.
C'è di sicuro delle rette di $\mathbb{P}^3$ dipendenti da 4 parametri: $\mathbb{P}^3$ stesso.

Problema: Rendere Kleiniano:

$Gr_{3,1} = Gr := \{\text{sottospazi di dim 1 di } \mathbb{P}^3\}$
$\neq \{\text{sottospazi di dim 2 in } \mathbb{K}^4\}$

$\mathbb{P}_{\mathbb{K}} \in \mathbb{P}^3$ danno una rette in $\mathrm{sp}(P \cup Q) = 2$.
(ad un insieme di vettori 2 di $\mathbb{P}(Q)$ con basi π, ξ vettori).

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^4 \setminus \{0\})^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^6 \setminus 0 \\ (P, Q) & \longmapsto & \mathrm{minori}(P \cap Q) \\ \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} & \longmapsto & \mathrm{minori}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{23} \\ p_{24} \\ p_{34} \end{pmatrix} \end{array}$$
COORDINATE PLÜCKERIANE

$\boxed{\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{array}}$

$p_{ij} := \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}$

$\mathbb{K}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}} = \{\text{rette } r \text{ di } \mathbb{K} \ni \mathbb{P}^3\}$

dà luogo
$$(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3)_{\Delta} \longrightarrow \mathbb{P}^5$$
se (P, Q), (P', Q') danno la stessa retta allora $\mathcal{C}$ (immagine in $\mathbb{P}^5$ è la stessa)
$P \vee Q = P' \vee Q'$

$P', Q' \in P \vee Q$: $\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{\in GL_2(\mathbb{K})}$ $\quad P' = \alpha P + \gamma Q$, $Q' = \beta P + \delta Q$

minori di $\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}$ =
minori di $\begin{pmatrix} \alpha P + \gamma Q \\ \beta P + \delta Q \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \cdot$ minori$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$

$$p'_{ij} = \begin{vmatrix} x'_i & y'_i \\ x'_j & y'_j \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right|$$
$$= p_{ij} \cdot \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

dunque abbiamo una mappa

$$\boxed{\begin{array}{ccc} Gr_{3,1} = Gr & \longrightarrow & \mathbb{P}^5 \\ \text{rette di } \mathbb{P}^3 & r = P \vee Q & \longmapsto \mathrm{minori}(P \cap Q) \end{array}}$$
INMERSIONE DI PLÜCKER.
DATA QUANDO ABBIAMO RETTE DI $\mathbb{P}^3$ in $\mathbb{P}^5$

Teorema: abbiamo costruito una mappa ben definita
$$Gr \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^5$$
$$r = P \vee Q \longmapsto \mathrm{minori}(P \cap Q)$$
tale che:
(1) è iniettiva (Thm. di Plücker)
(2) $\mathrm{im}(\Phi) = \mathcal{Q}$ quadrica di $\mathbb{P}^5$ (quadrica di Klein) di equazione:
$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$$
(ad un modo $\begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} = Q$
(nota che $\mathbb{P}^5(\mathbb{K})$ studia di questa (3)
e rango 6, in particolare contiene piani proiettivi)

(3) dunque c'è bisezione $Gr \cong \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^5$.

Iniettività: $\Psi(P) = p^t Q p = p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23}$
$$\Psi(p, p') = p^t Q p' = p_{12}p'_{34} - p_{13}p'_{24} + p_{14}p'_{23} \ldots$$
(per vedere: r, s ortogonale che $\Psi(p, p') = 0$ incidenti se $= 0$)

Problema: se la retta $r = P \vee Q$ è nulla, vogliamo una equazione di ipersuperfici: $r = \alpha x_1 + \ldots$
Come trovare che coordinate p_{ij} usando 3?: Spazio $\mathbb{P}^3$ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$?

se $P = (x)$, $Q = (y)$ $\quad p_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}$? Sappiamo $\mathrm{sp}(P \cup Q) = 2$

Osservazione: per determinare che la p_{ij} soddisfano un'equazione abbiamo matrice di rango 2, si potrebbe calcolare anche così:
① $\left(\begin{array}{cc} P & Q \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$
che ha rango 2, quindi $\det = 0$
oppure
② $\det\begin{pmatrix} P & Q & P & Q \end{pmatrix} = 0$
e corrisponde alla proiezione sulla prima delle righe

$p_{34}p_{12} - p_{14}p_{23} + p_{24}p_{13} + p_{23}p_{14} - p_{13}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0$

③ $\det\begin{pmatrix} P & Q & P & Q \end{pmatrix}$
Sappiamo per indipendenza lineare
ridurre $(x_i; x_j; y_i; y_j) = (x_i; y_i; x_j; y_j) = (x_i \wedge y_i; x_j \wedge y_j)$.

$$\begin{pmatrix} p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{23} & p_{24} & p_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{34} \\ p_{24} \\ p_{23} \\ p_{14} \\ p_{13} \\ p_{12} \end{pmatrix} = 0$$
$$\Psi(p, p) = 0$$
(come calcolare il punto di intersezione?)

(2) Fisso di rette di $\mathbb{P}^3 = \{r,\ r \cap \underset{\mathbb{K}^4 \cong \mathbb{P}^3}{P} \neq \emptyset\} \longmapsto$ rette $\subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^5$

$r = P \vee Q(x)$ $\longmapsto$ minori$(P \cap Q(x)) = x\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$
dove $Q(x)$ rendono rette $\in \mathbb{K}^3$ $\quad = \alpha p_{12} + \beta p_{13}$
α minori(P, Q) + minori(P, Q_2)

e viceversa, le rette CONTENUTE nella $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^5$ sono punti corrispondenti alle rette $\in$ un piano?

(3) piani rigati = $\{\text{rette di } \mathbb{P}^3 \ni \underset{\text{piano}}{p}\} \longmapsto$ piano $\subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^5$

(4) stelle di rette = $\{\text{rette di } \mathbb{P}^3 \ni \underset{\text{punto}}{P}\} \longmapsto$ piano $\subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^5$

Sappiamo $P = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$
allora $x(P)$ = rette $P \vee X$ con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
calcolo $\Phi(P \vee X) = \mathrm{minori}\begin{pmatrix} \alpha & x_1 \\ \beta & x_2 \\ \gamma & x_3 \\ \delta & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \alpha x_2 - \gamma x_3 \\ \alpha x_3 - \delta x_4 \\ \beta x_3 - \gamma x_4 \\ \beta x_4 - \delta x_3 \\ \gamma x_4 - \delta x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}$ piano $\mathbb{P}^5$.

(5) $\left\{\begin{array}{c}\text{proiezione del rette di} \\ \text{una quadrica rigata su } \mathbb{P}^3\end{array}\right\} \longmapsto \underset{\text{una congruenza}}{\text{conica}} = \text{piano} \cap \mathcal{Q}$.

Se la quadrica rigata è $x_1x_2 = x_3x_4$
allora $\Sigma: \begin{cases} x_1x_2 = x_3x_4 \\ \lambda x_1 - \mu x_3 \\ \lambda x_2 - \mu x_4 \end{cases} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$\mathrm{minori}\begin{pmatrix} \lambda & x_3 \\ \mu & x_4 \\ 0 & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_3 \\ \mu x_4 \\ \lambda x_4 \\ \mu x_3 \end{pmatrix}$ è $\begin{cases} p_{34} = 0 \\ p_{13} = p_{14} \\ p_{23} = 0 \\ p_{12} = p_{13}p_{24} \end{cases}$ piano $\subseteq \mathbb{P}^5$
$\underset{\text{conica in } \mathbb{P}^5}{}$

(6) rette incidenti una punto rette r_0:
$\{r : r \cap r_0 \neq \emptyset\} \longrightarrow \mathcal{Q} \cap$ iperpiano di $\mathbb{P}^5$ di equazione $\Psi(r_0, -) = 0$

Sappiamo che $\Psi(r_0, -) = 0$ $\quad$ $\Psi(r_0, r_0) = 0$

Se $\Psi(r_0, r) = 0$ $\quad$ $\Psi(r_0, r_0) = 0$
$\Psi(r_0, r + r_0) = 0$
$\Psi(r_0, r) + \Psi(r_0, r_0) = 0$
$\Psi(r_0, r) = 0$

Matrice la quadrica
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & p_{23} & -p_{13} & p_{14} \\ -p_{23} & 0 & p_{12} & -p_{24} \\ p_{13} & -p_{12} & 0 & p_{34} \\ -p_{14} & p_{24} & -p_{34} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \det(Q) = 0$$
$p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23} + p_{12}p_{34}$

Troviamo due soluzioni del sistema:
$$\begin{pmatrix} p_{12} \\ 0 \\ -p_{14} \\ p_{24} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ p_{34} \\ p_{24} \\ -p_{23} \end{pmatrix} \quad \text{e ne cerco: } \begin{pmatrix} \\ p_{34} \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{23} \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix} ?$$
sappiamo che $\det(Q) = 0$
$\mathrm{minori}\begin{pmatrix} p_{12} & 0 \\ 0 & p_{34} \\ -p_{14} & p_{24} \\ p_{24} & -p_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12}^2 \\ p_{12}p_{34} \\ p_{12}p_{24} \\ -p_{14}p_{12} \\ p_{14}p_{34} \\ p_{14}p_{24} \\ p_{24}p_{34} \\ -p_{24}p_{23} \end{pmatrix} = p_{12}\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{34} \\ p_{24} \\ -p_{14} \\ p_{14} \\ p_{24} \\ p_{34} \\ -p_{23} \end{pmatrix}$ $\neq$
$-p_{14}p_{23} + p_{24}p_{13}$

Dunque: ① Φ è iniettiva perché le coordinate p_{ij} determinano il sistema che rende una matrice $\mathrm{im}(\Phi)$ sono rette.

② $\mathrm{im}(\Phi) \subseteq \mathcal{Q}$ dai equazione data dal det del prodotto matrice

Vorrei che coincide $\mathcal{Q} \subseteq \mathrm{im}(\Phi)$
Facile, perché se $\mathcal{Q}(p)$ soddisfa all'equazione allora la matrice è antisimmetrica determinante nullo, quindi rango $\mathcal{Q}$, e ha una matrice di dimensione 2 (una rette proiettiva).
MASTA VEDERE che quella rette ha la coordinate di partenza.

Se (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, b_2) sono piani di x_0
Sono due punti:
- con $x_0 = 0$ ottengo $\begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$
- con $x_0 = 1$ ottengo $\begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

e calcoliamo $(p_{ij}) = \mathrm{minori}\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & b_1 \\ 0 & c_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & a_2 \\ 0 & b_2 \\ 0 & c_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{13} \\ p_{23} \\ p_{14} \\ p_{24} \\ p_{34} \end{pmatrix}$

Problema di fibra:
Se $\Psi: \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^5$ è polinomiale, allora $\Psi^{-1}(\mathrm{im}\,\Phi)$ è rette
dunque Ψ ripiega della Grassmaniana.
$\Psi: Gr \longrightarrow Gr$ $\quad$ iniettiva
$r \longmapsto \Psi(r)$
dunque $\Psi: \underset{\mathbb{P}^5}{\mathcal{Q}} \longrightarrow \underset{\mathbb{P}^5}{\mathcal{Q}}$ $\quad$ iniettiva

domanda: vero che $\exists \Psi: \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^5$ con $\Psi(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{Q}$, $\Psi|_{\mathcal{Q}} = \Phi$?

Se è vero conosciamo:
$\left\{\begin{array}{c}\text{proiettività del } \mathbb{P}^5\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{proiettività del } \mathbb{P}^5 \\ \text{che mandano} \\ \text{in } \mathcal{Q} \text{ in sé}\end{array}\right\}$
$\Psi \longleftrightarrow \Phi$
è una bisezione?

Problemi di geometria delle rette di $\mathbb{P}^3$:

(1) r, s rette in $\mathbb{P}^3$: sappiamo che $\Psi(r, s) \neq 0$
incidenti se $\Psi(r, s) = 0$

Vorrei: r, s incidenti se $r = P \vee Q$
$s = P' \vee Q'$
e $\mathrm{sp}(P \cup P', P' \cup Q') < 4$
dunque se $\det(P \cup P', P' \cup Q') = 0$
sse
$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{23}p_{14} + p_{14}p_{23} - p_{24}p_{13} + p_{34}p_{12} = 0$$
$$(p_{12}\ p_{13}\ p_{14}\ p_{23}\ p_{24}\ p_{34}) \begin{pmatrix} & & & & & -1 \\ & & & & 1 & \\ & & & -1 & & \\ & & 1 & & & \\ & -1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{34} \\ p_{24} \\ p_{23} \\ p_{14} \\ p_{13} \\ p_{12} \end{pmatrix} = 0$$
$$\Psi(p, q) = 0$$
(come calcolare il punto di intersezione?)

(2) fisso di rette di $\mathbb{P}^3 = \{r,\ r \cap \underset{\mathbb{K}^4 \cong \mathbb{P}^3}{P}\} \longmapsto$ rette $\subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^5$

$r = P \vee Q(x)$ $\longmapsto$ minori$(P \cap Q(x)) = x\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$
dove $Q(x)$ rendono rette $\in \mathbb{K}^3$ $\quad = \alpha p_{12} + \beta p_{13}$
α minori(P, Q) + minori(P, Q_2)

e viceversa, le rette CONTENUTE nella $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^5$ sono punti corrispondenti alle rette $\in$ un piano?

(3) piani rigati = $\{\text{rette di } \mathbb{P}^3 \ni \underset{\text{piano}}{p}\} \longmapsto$ piano $\subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^5$

(4) stelle di rette = $\{\text{rette di } \mathbb{P}^3 \ni \underset{\text{punto}}{P}\} \longmapsto$ piano $\subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^5$

Sappiamo $P = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$
allora $x(P)$ = rette $P \vee X$ con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$
calcolo $\Phi(P \vee X) = \mathrm{minori}\begin{pmatrix} \alpha & x_1 \\ \beta & x_2 \\ \gamma & x_3 \\ \delta & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \alpha x_2 - \gamma x_3 \\ \alpha x_3 - \delta x_4 \\ \beta x_3 - \gamma x_4 \\ \beta x_4 - \delta x_3 \\ \gamma x_4 - \delta x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}$ piano $\mathbb{P}^5$.

(5) $\left\{\begin{array}{c}\text{proiezione del rette di} \\ \text{una quadrica rigata su } \mathbb{P}^3\end{array}\right\} \longmapsto \underset{\text{una congruenza}}{\text{conica}} = \text{piano} \cap \mathcal{Q}$.

Se la quadrica rigata è $x_1x_2 = x_3x_4$
allora $\Sigma: \begin{cases} x_1x_2 = x_3x_4 \\ \lambda x_1 - \mu x_3 \\ \lambda x_2 - \mu x_4 \end{cases} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$\mathrm{minori}\begin{pmatrix} \lambda & x_3 \\ \mu & x_4 \\ 0 & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_3 \\ \mu x_4 \\ \lambda x_4 \\ \mu x_3 \end{pmatrix}$ è $\begin{cases} p_{34} = 0 \\ p_{13} = p_{14} \\ p_{23} = 0 \\ p_{12} = p_{13}p_{24} \end{cases}$ piano $\subseteq \mathbb{P}^5$
$\underset{\text{conica in } \mathbb{P}^5}{}$

(6) rette incidenti una punto rette r_0:
$\{r : r \cap r_0 \neq \emptyset\} \longrightarrow \mathcal{Q} \cap$ iperpiano di $\mathbb{P}^5$ di equazione $\Psi(r_0, -) = 0$

Sappiamo che $\Psi(r_0, -) = 0$ $\quad$ $\Psi(r_0, r_0) = 0$

Se $\Psi(r_0, r) = 0$ $\quad$ $\Psi(r_0, r_0) = 0$
$\Psi(r_0, r + r_0) = 0$
$\Psi(r_0, r) + \Psi(r_0, r_0) = 0$
$\Psi(r_0, r) = 0$

Matrice la quadrica
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & p_{23} & -p_{13} & p_{14} \\ -p_{23} & 0 & p_{12} & -p_{24} \\ p_{13} & -p_{12} & 0 & p_{34} \\ -p_{14} & p_{24} & -p_{34} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \det(Q) = 0$$
$p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23} + p_{12}p_{34}$

Troviamo due soluzioni del sistema:
$$\begin{pmatrix} p_{12} \\ 0 \\ -p_{14} \\ p_{24} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ p_{34} \\ p_{24} \\ -p_{23} \end{pmatrix} \quad \text{e ne cerco: } \begin{pmatrix} \\ p_{34} \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{23} \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix} ?$$
sappiamo che $\det(Q) = 0$
$\mathrm{minori}\begin{pmatrix} p_{12} & 0 \\ 0 & p_{34} \\ -p_{14} & p_{24} \\ p_{24} & -p_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12}^2 \\ p_{12}p_{34} \\ p_{12}p_{24} \\ -p_{14}p_{12} \\ p_{14}p_{34} \\ p_{14}p_{24} \\ p_{24}p_{34} \\ -p_{24}p_{23} \end{pmatrix} = p_{12}\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{34} \\ p_{24} \\ -p_{14} \\ p_{14} \\ p_{24} \\ p_{34} \\ -p_{23} \end{pmatrix}$ $\neq$
$-p_{14}p_{23} + p_{24}p_{13}$

Dunque: ① Φ è iniettiva perché le coordinate p_{ij} determinano il sistema che rende una matrice $\mathrm{im}(\Phi)$ sono rette.

② $\mathrm{im}(\Phi) \subseteq \mathcal{Q}$ dai equazione data dal det del prodotto matrice

Vorrei che coincide $\mathcal{Q} \subseteq \mathrm{im}(\Phi)$
Facile, perché se $\mathcal{Q}(p)$ soddisfa all'equazione allora la matrice è antisimmetrica determinante nullo, quindi rango 2, e ha una matrice di dimensione 2 (una rette proiettiva).
MASTA VEDERE che quella rette ha la coordinate di partenza.

Se (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, b_2) sono piani di x_0
Sono due punti:
- con $x_0 = 0$ ottengo $\begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$
- con $x_0 = 1$ ottengo $\begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

e calcoliamo $(p_{ij}) = \mathrm{minori}\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & b_1 \\ 0 & c_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & a_2 \\ 0 & b_2 \\ 0 & c_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{13} \\ p_{23} \\ p_{14} \\ p_{24} \\ p_{34} \end{pmatrix}$

---

mercoledì 4 novembre 2025

Riassunto: $Gr = Gr_{3,1} = \{\text{rette} \subseteq \mathbb{P}^3\}$
$= \{\text{sottosp. di dim}_{\mathbb{K}} 2 \text{ in } V \text{ di}_{\mathbb{K}} 4\}$

$\boxed{Gr \xrightarrow{\Phi} \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{P}^5}$

$r = P \vee Q$ $\longmapsto$ minori$(P \cap Q)$
dove P, Q $\longmapsto$ minori$(P \cap Q) = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{23} \\ p_{24} \\ p_{34} \end{pmatrix}$

$\mathcal{Q}: \begin{pmatrix} & & & & & -1 \\ & & & & 1 & \\ & & & -1 & & \\ & & 1 & & & \\ & -1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix} = 0$ $\quad$ bene dog (contiene piani)

equazione $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$
$\Psi(p) = \Psi(p)^t = p^t Q p$
$\Psi(p, q) = p^t Q q$

Problema: studiare i sottospazi lineari del rette di $\mathbb{P}^3$
$\equiv$ studiare gli sottospazi del rette che corrispondono a sottospazi lineari su $\mathcal{Q}$ di sottospazi lineari di $\mathbb{P}^5$.

Ragionamento: H un iperpiano di $\mathbb{P}^5$
implicano cosine da rette corrispondenti ai punti di $H \cap \mathcal{Q}$.
È iperpiano di una equazione (rette incidenti p_{ij} di $\mathbb{P}^3$)
$$\Psi(q, p) = \sum a_{ij} p_{ij} = 0 \quad \text{con } a_{ij} \in \mathbb{K} \text{ non tutti nulli}$$
$$\Psi(q, p) = 0 \qquad p = \begin{pmatrix} p_{12} \\ \vdots \\ p_{34} \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{34} \end{pmatrix}$$
$$\Psi \Phi p = 0$$
Se fissiamo $a \in \mathcal{Q}$, sappiamo che la rette che corrisponde p soddisfano $\Psi(a, p) = 0$ $\underset{\text{sse}}{}$ sono rette che incidono la rette (di coord pluc) a.

Cosa succede se $a \notin \mathcal{Q}$?

Sistemi lineari di rette di $\mathbb{P}^3$:

Necessità = (semplicemente necessario di $\mathbb{P}^3$) $\frac{1}{\mathbb{K}}\mathbb{P}^3_{\mathbb{K}}$
= (semplicemente lineare di V su V^*) $\left\{\begin{array}{l}\text{sistemi} \\ \text{di } \mathbb{K}^4\end{array}\right.$
= (forma LC non stage $V \vee V \to \mathbb{K}$)

Si dice $\left\{\begin{array}{l}\text{piano} \\ \text{sottospazio nullo}\end{array}\right\}$ $\forall f.c.$ η sia $\left\{\begin{array}{l}\text{sottomodulo} \\ \text{sottomodulo}\end{array}\right\}$

sse $\left\{\begin{array}{l}\text{IIPPP: } P \neq Q \\ \boxed{\forall r \in \eta(x) \quad \forall x \in P}\end{array}\right.$

Sia $\eta: \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$ un sistema nullo,
(un indicatore $X \mapsto \eta(x) \cap X$)

Se $x = P \vee Q$ è rette in $\mathbb{P}$,
allora $\eta(P)$ e $\eta(Q)$ sono due spazioni di $\mathbb{P}$ distinti,
$\eta(P) \cap \eta(Q)$ è una rette $= \eta(x)$
quindi: il sistema "rette di $\mathbb{P}$ in rette di $\mathbb{P}$"
$P \vee Q \longmapsto \eta(P) \cap \eta(Q)$

Diciamo che $r \in$ FIXA per η se $\eta(r) = r$
e vogliamo studiare la rette fisse del un sistema nullo!

Se il rette $\mathbb{P}^3$, $\eta(x)$ (imagine tramite η (sistemi nulla) che posizioni hanno x ed $\eta(x)$?

O sono ignoti $(x = \eta(x))$ o sono sghembe $(x \cap \eta(x) = \emptyset)$.
CASO:
Se $x \cap \eta(x) \neq \emptyset$, allora $x = \eta(x)$

Perché: Sia $X \in x \cap \eta(x)$

$x = X \vee Y$ $\quad \eta(x) = \eta(X) \cap \eta(Y)$
$X \in x$
$X \in \eta(x)$
$\in \eta(Y) \Rightarrow Y \in \eta(X)$ $\quad \Rightarrow \forall x \in \eta(X) \cap \eta(Y)$
$\in \eta(Y)$ $\quad \eta(x)$
$\eta(x) \ni X, Y \Rightarrow \eta(x) \ni X \vee Y$
$\underset{\neq x}{}$ //

Descrizione: le rette fissa un punto $X \in \eta$
(sotto per il sistema nullo) si sono:
le rette per X nel piano $\eta(X)$.

Descrizione puntale rette con la coordinate Plückeriane:
η di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ (o che ha $\det = 0$)
con $\Psi(A) \neq 0$
(quindi se di $\det(A)$ che è non nullo)

Se $x = X \vee Y$ è unita per η:
$\eta(x) = x$ $\quad$ se $\forall \in \eta(x)$
$\quad$ se $X^t A Y = 0$ $\quad$ $X^t A$ appartiene $\eta(x)$
$\quad$ $(x_1 x_2 x_3 x_4) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0$

$\quad$ se $\sum a_{ij}(x_i y_j - x_j y_i) = 0$

$\quad$ se $\sum a_{ij} \underbrace{p_{ij}}_{\text{Coord pluc rette}} = 0$

$\quad$ se $\Psi(a_{ij}, p) = 0$ $\quad$ con $\Psi(a_{ij}) > 0$.

Ora possiamo classificare tutte le possibili "sezioni lineari" di $\mathcal{Q}$ con "piani lineari" di rette di $\mathbb{P}^3$:

Vogliamo le intersezioni di $\mathcal{Q}$ con sottospazi lineari di $\mathbb{P}^5$.

Sia H sottospazio lineare di $\mathbb{P}^5$.

(1) sappiamo $\dim_{\mathbb{K}} H = 4$ (H iperpiano)
allora H ha equazione: $\Psi(a_{ij}, -) = 0$
con $a \in \mathbb{P}^5$,
ci sono 2 casi:
$a \in \mathcal{Q}$: allora Ψ = hyperp tang Φ $\underset{\Psi(a)=0}{\text{sse}}$ $\underset{\text{rette passante per } a}{\text{rette passante per } a}$ $\Psi(a) = 0$ $\quad$ $\Psi(a, a) = 0$ $\quad$ $\Psi(a, -) = 0$
$\Psi(a, a) = 0$ $\quad$ $\Psi(a, -) = 0$
$\Psi(a, -) = 0$ $\quad$ $\Psi(a, a