G2A-256-12

giovedì 13 novembre 2025 15:31

Isometrie di spazi "formati" $\begin{cases}\text{normati} & (\text{non deg. simm.})\\ \text{simplettici} & (\text{non deg. altern.})\end{cases}$

Def: $\varphi : (V,g) \longrightarrow (W,h)$ funzione lineare $V \xrightarrow{\varphi} W$ (e g, h forme bil. su V, W risp.)

allora diciamo che φ è isometria (per g, h)

se: ① φ iniettiva

② φ rispetta le forme:

$$h(\varphi v, \varphi v') = g(v, v') \quad \forall v, v' \in V$$

Osservazioni preliminari:

(0) $id_{(V,g)} : (V,g) \to (V,g)$ isometria

composizioni di isometrie $V \to W \to U$ è isometria

(1) se (V,g) non degenere allora ② ⇒ ①,

cioè l'iniettività di φ è automatica,

$v \in \ker\varphi$, $\varphi(v) = 0$

$$h(\varphi(v), \varphi(v')) = g(v, v') \quad \forall v' \in V$$

$\underbrace{\qquad}_{0}$ $\quad$ "0 $\quad$ dunque $v = 0$, $\ker\varphi = 0$.

(2) se ($\mathrm{car}\,\mathbb{K} \neq 2$) e forme simmetriche:

② ⇔ φ rispetta le forme quadratiche,

cioè $q_h(\varphi v) = q_g(v)$

$h(\varphi v, \varphi v) \quad g(v, v) \quad \forall v \in V$

⇒ sempre!

⇐ calcoliamo su $v + w$:

$$h(\varphi v + \varphi w, \varphi v + \varphi w) = g(v+w, v+w)$$

$$\cancel{h(\varphi v, \varphi v)} + 2h(\varphi v, \varphi w) + \cancel{h(\varphi w, \varphi w)} \qquad \cancel{g(v,v)} + 2g(v,w) + h(w,w)$$

dunque $2 \neq 0$, $h(\varphi v, \varphi w) = h(v, w)$

(3) se g ha base ortogonale: φ isometria sse $\varphi(\text{b.o.n.})$ è b.o.n.

se g ha base simplettica: φ isometria sse $\varphi(\text{b.s.})$ è b.s.

(infatti basta controllare la definizione $h(\varphi v, \varphi v') = g(v, v')$ su una base di V)

(4) problema: come interagisce "essere isometria" con "essere lineare"?

se h è non degenere, e φ suriettiva allora ② ⇒ φ lineare.

(confrontare $\varphi(\alpha v + v')$ con $\alpha\varphi(v) + \varphi(v')$ vettori di W, usando la forma ...)

Aspetti matriciali: $\varphi : V \longrightarrow W$

$\mathcal{V}$ = base di V

$\mathcal{W}$ = base di W

$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$

$G = \Gamma_{\mathcal{V}}(g)$

$H = \Gamma_{\mathcal{W}}(h)$

φ isometria sse (φ iniettiva ⇔ $\mathrm{rg}A \geq \dim_{\mathbb{K}} V$)

e $h(\varphi v, \varphi v') = g(v, v') \quad \forall v, v'$

$$\Downarrow$$

$$(AX)^t H (AX') = X^t G X' \quad \forall X, X' \in \mathbb{K}^{\dim V} \text{ (coord. di } v, v' \text{ in } \mathcal{V})$$

$$X^t A^t H A X'$$

$$\Updownarrow$$

$$A^t H A = G$$

(nota: se $H = G = \mathbb{1}$ la condizione è $A^t A = \mathbb{1}$ matrici ortogonali!)

Osservazioni:

① caso $(V,g) = (W,h)$:

se g non degenere,

Isometrie per $g \leq \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$

di solito non normale.

quindi

$\mathrm{Isom}(G) \; \{A : A^t G A = G\} \leq GL_n(\mathbb{K})$

isometrie rispetto alla forma di matrice G

se $G \simeq G'$ (congruenti) allora $\mathrm{Isom}(G)$ e $\mathrm{Isom}(G')$ sono sottogruppi coniugati di $GL_n(\mathbb{K})$

② significato geometrico delle isometrie:

* funzioni lineari che rispettano tutte le proprietà definite in termini di g (se g è def>0 su spazi reali: misure, angoli...)

* viste come proiettività, sono funzioni $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ che mandano la quadrica associata alla forma g in sé stessa

(piccolo esercizio:

se $\mathcal{Q}$ quadrica in $\mathbb{P}(V)$

e φ proiettività di $\mathbb{P}(V)$ in sé,

allora $\varphi(\mathcal{Q})$ è quadrica,

se $\mathcal{Q}$ ha matrice G simmetrica,

e φ ha matrice A,

qual è la matrice di $\varphi(\mathcal{Q})$?)

Autovalori / Jordan per isometrie:

$\varphi \in (V,g)$, g non degenere,

(0) $\det\varphi = \pm 1$ perché (scelta base): $A^t G A = G$ con G non degenere, $|A^t G A| = |G|$

$|A|\cancel{|G|}|A|$

$\det(A)^2 = 1$

(1) autovalori di isometrie:

α autovalore di φ ($\exists v \neq 0 : \varphi(v) = \alpha v$)

$\begin{cases} v \text{ autovettore non isotropo per } g: \quad g(\alpha v, \alpha v) = \alpha^2 g(v,v) \\ \quad g(\varphi v, \varphi v) = g(v,v) \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 = 1, \; \alpha = \pm 1 \\ (\alpha \neq \pm 1 \Rightarrow v \text{ isotropo}) \\ \quad \text{possiamo solo dire } \alpha \neq 0. \\ \quad (\text{domanda: se } \alpha \neq \pm 1 \text{ è autovalore, anche } 1/\alpha \text{ lo è?}) \end{cases}$

(2) se v, w autovettori di autovalori α, β:

$g(v,w) = g(\varphi v, \varphi w) = g(\alpha v, \beta w) = \alpha\beta\, g(v,w)$

$(1 - \alpha\beta)\, g(v,w) = 0$

dunque: se $\alpha\beta \neq 1$ allora $g(v,w) = 0$ cioè $v \perp_g w$

se $g(v,w) \neq 0$ allora $\alpha\beta = 1$

(3) se $W \leq V$, $\varphi(W) \leq W$ allora $\varphi(W^\perp) \leq W^\perp$:

se $u \in W^\perp$ ($g(u,w) = 0 \; \forall w \in W$)

allora $g(\varphi u, w) = g(\varphi u, \varphi(\underbrace{\varphi^{-1} w}_{\in W}))$

$= g(u, \varphi^{-1}(w)) = 0 \quad \forall w$

ma in generale $W^\perp$ e W non sono complementari,

per es. se v autovettore isotropo $\varphi(\langle v\rangle) \leq \langle v\rangle$

$\varphi(\langle v\rangle^\perp) \leq \langle v\rangle^\perp$

ma $\langle v\rangle^\perp = \langle v, \ldots\rangle$

CASO NORMATO: g simm. non deg.

- $O(V,g) = \{\text{isometrie di } (V,g)\} \leq GL(V)$

$SO(V,g) = \ker(\det : O(V,g) \to \{\pm 1\}) \trianglelefteq O(V,g)$

$\leq SL(V)$

•• se $V = \mathbb{K}^n$ e $G = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_q \end{pmatrix}$

$O_{p,q}(\mathbb{K})$ = matrici di isometrie (pseudo-euclidee) di G

$= \{A : A^t G A = G\}$

$O_{n,0} \simeq O_{0,n} = O_n$ isometrie euclidee

$O_{n-1,1} \simeq O_{1,n-1}$ tr. Lorentz

come sopra $SO_{p,q} \trianglelefteq O_{p,q}$ $\quad O_{p,q}/SO_{p,q} \simeq \{\pm 1\}$

$\wedge\!\!| \qquad \wedge\!\!|$

$SL \trianglelefteq GL$

∴ Riflessioni ortogonali (proiezioni ortogonali) rispetto a vettori non isotropi,

transitività,

⇒ TEOREMA CARTAN-DIEUDONNÉ

⇒ TEOREMA DI ESTENSIONE DI WITT.

CASO SIMPLETTICO, g alternante non deg

- $Sp(V,g)$ = isometrie per $(V,g) \leq GL(V)$

$(\leq SL(V) \; !)$

cioè $\det = 1$.

•• $V = \mathbb{K}^{2m}$ $\quad G = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_m \\ -\mathbb{1}_m & 0 \end{pmatrix}$

$Sp_m(\mathbb{K}) = \{A : A^t G A = G\} \leq SL_{2m}(\mathbb{K})$

TRASF. SIMPLETTICHE

∴ TRASVEZIONI SIMPLETTICHE e loro transitività sulle coppie simplettiche di vettori,

TEOREMA: Sp è generato da trasvezioni simplettiche.

Intermezzo: esempi di spazi normati:

isometrie del piano: $\mathbb{R}^2$

sgn $(0,0)$: $G = 0$, $A \in GL_2(\mathbb{R})$ qualsiasi

matrice è isometria!

$(0,1)$, $(1,0)$: $G = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ perché $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} c^2 & cd \\ dc & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^t G A = G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

(ci sono cose $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ....)

$(2,0)$, $(0,2)$: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

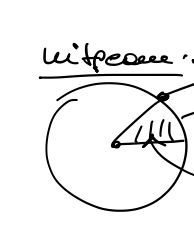
cerchiamo A t.c. $A^t G A = G$

$A^t A = \mathbb{1}$

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ oppure $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$\lvert A\rvert = 1$	$\lvert A\rvert = -1$
$p_A(X) = X^2 - 2\cos\theta X + 1$	$p_A(X) = X^2 - 1$
autovalori $\cos\theta \pm i\sin\theta = \alpha, \bar\alpha$	autovalori ± 1 (riflessione)
$A \underset{\mathbb{C}}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar\alpha \end{pmatrix}$	$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
autovettori in $\mathbb{C}^2$, non $\mathbb{R}^2$ isotropi per G non ortogonali	autovettori reali anisotropi ortogonali: di 1 è $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ 1-\cos\theta \end{pmatrix}$
$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$	$H = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$
$H^t G H = H^t H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$H^t G H = H^t H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

int. geom.:



$(1,1)$: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cerchiamo A: $A^t G A = G$

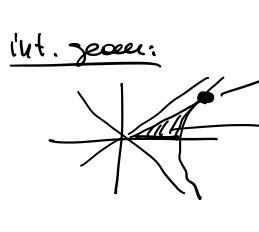
colonne di A sono base ortogonale "iperbolica"

$A = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$: $x^2 - y^2 = 1$, $x'^2 - y'^2 = -1$, $xx' - yy' = 0$

$A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$ oppure $A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\theta & -\mathrm{sh}\theta \\ \mathrm{sh}\theta & -\mathrm{ch}\theta \end{pmatrix}$

$\det = 1$	$\det(A) = -1$
$p_A(X) = X^2 - 2\cosh\theta X + 1$	$p_A(X) = X^2 - 1$
autovalori $= \cosh\theta \pm \sinh\theta$ reali	autov. $= \pm 1$
autovettori reali isotropi non ortogonali	autovettori reali, anisotropi ortogonali, 1: $\begin{pmatrix} \mathrm{sh}\theta \\ \mathrm{ch}\theta - 1 \end{pmatrix}$
$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$H = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\theta/2 & \mathrm{sh}\,\theta/2 \\ \mathrm{sh}\,\theta/2 & \mathrm{ch}\,\theta/2 \end{pmatrix}$
$H^t G H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$H^t G H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

int. geom.:



giovedì 13 novembre 2025

---

caso $\mathbb{R}^3$

$(0,0)$: $G = 0 \Rightarrow A \in GL_3$

$(1,0)$, $(0,1)$: $G = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A = \left(\begin{array}{c|c} GL_2 & * \\ \hline 0\,0 & \pm 1 \end{array}\right)$

esercizio!

$(2,0)$, $(0,2)$: $G = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & \mathbb{1} \end{array}\right) \Rightarrow A = \left(\begin{array}{c|c} GL_1 & *\,* \\ \hline 0 & O_{2,0} \end{array}\right)$

$(1,1)$: $G = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & \begin{smallmatrix} 1 & \\ & -1 \end{smallmatrix} \end{array}\right) \Rightarrow A = \left(\begin{array}{c|c} GL_1 & *\,* \\ \hline 0 & O_{1,1} \end{array}\right)$

$(3,0)$, $(0,3)$: $G = \mathbb{1}_3$

c'è certamente un autovettore reale (perché pol. caratt. ha grado 3), necess. ± 1, autovettore v (non isotropo), dunque $\mathbb{R}^3 = \langle v\rangle \oplus \underbrace{\langle v\rangle^\perp}_{\dim 2} = \langle v_2, v_3\rangle$ sgn $(2,0)$

A isometria $\sim \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0\,0 \\ \hline 0 & \boxed{\;} \end{array}\right)$ ← $O_{2,0}(\mathbb{R})$

$(2,1)$, $(1,2)$: $G = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A : A^t G A = G$?

A ha certamente un autovalore reale $\alpha \neq 0$

ma bisogna vedere gli autovettori: sia v

$\langle v\rangle$ stabile, quindi $\langle v\rangle^\perp$ anche, ma:

se $g(v,v) > 0$

$\mathbb{R}^3 = \langle v\rangle \oplus \underline{\underline{\langle v\rangle^\perp}}$ sgn $(1,1)$

$\alpha = \pm 1$

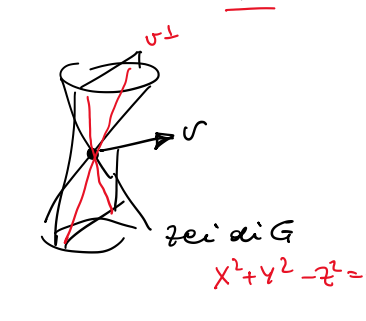
$A \sim \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0\,0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \end{array}\right)$ ← $O_{1,1}(\mathbb{R})$

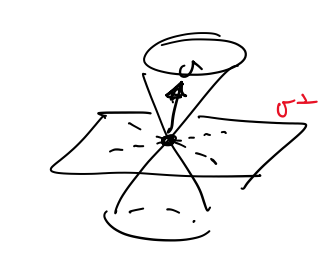
se $g(v,v) < 0$

$\mathbb{R}^3 = \langle v\rangle \oplus \langle v\rangle^\perp$ sgn $(2,0)$

$\alpha = \pm 1$

$A \sim \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0\,0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \end{array}\right)$ ← $O_2(\mathbb{R})$





se $g(v,v) = 0$

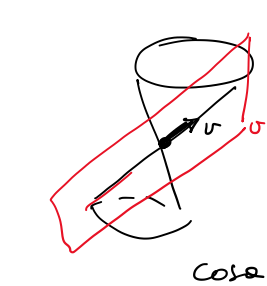
allora possiamo solo dire che $\alpha \neq 0$

$\langle v\rangle^\perp$ è stabile per l'isometria

$= \langle v, u\rangle$ $\quad g(u,v) = 0$

$g(u,u) \neq 0$ altrimenti su $\langle v,u\rangle$ la forma g sarebbe $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ $*=0$

e $\langle v,u\rangle$ sarebbe isotropo, assurdo perché g non deg.



Cosa fa l'isometria sul sottospazio $\langle v,u\rangle$?

se è diagonalizzabile su $\langle v,u\rangle$: $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

se non è diagonalizzabile su $\langle v,u\rangle$: $\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

completiamo v, u a base $v, u, \underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ in modo che:

(w non può essere $\perp_g v$)

possiamo scegliere w ISOTROPO $\perp u$

$G = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ in questa base

$w \in \langle u\rangle^\perp = \langle v, ?\rangle$ compl. di $\langle u\rangle$

$g(v,w) \neq 0$ altrimenti g degenere

$= -1$ moltipl. w per $-\frac{1}{g(v,w)}$

per rendere w isotropo, basta sostituirlo con $w + \alpha v$

in modo che $g(w + \alpha v, w + \alpha v) = 0$

$g(w,w) + 2\alpha g(w,v) + \cancel{\alpha^2 g(v,v)} = 0$

$\alpha = \ldots$

A matrice di isometria =

$A = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & a \\ 0 & \pm 1 & b \\ \hline 0 & 0 & c \end{array}\right)$

tale che $A^t G A = G$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & b \\ -\alpha & 0 & -a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha c \\ 0 & 1 & b \\ -\alpha c & b & b^2 - 2ac \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -\alpha c = -1 & c = 1/\alpha \\ b = 0 & b = 0 \\ -2ac = 0 & a = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$$

$A = \left(\begin{array}{cc|c} \pm 1 & 1 & a \\ & \pm 1 & b \\ \hline 0 & 0 & c \end{array}\right)$

tale che $A^t G A = G$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & b \\ -1 & -1 & -a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & b-c \\ -c & b-c & b^2 - 2ac \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -c = -1 & c = 1 \\ b - c = 0 & b = 1 \\ b^2 - 2ac = 0 & a = 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$J_3(1)$

nota: abbiamo calcolato le matrici di isometrie di g in una base di V che non è ortog. per g,

$G = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$.

---

isometrie di forme in $\mathbb{R}^4$?

casi interessanti: $(4,0)$:

$(3,1)$

$(2,2)$

Isometrie nei casi normati:

(V,g) con g simmetrica non degenere

simmetrie ortogonali rispetto a vettori non isotropi

v non isotropo $g(v,v) \neq 0$

allora $V = \langle v\rangle \oplus \langle v\rangle^\perp$

e usiamo la simmetria di asse $\langle v\rangle^\perp$ e direzione $\langle v\rangle$

$\sigma_v^\perp = \sigma^{\langle v\rangle}_{\langle v\rangle^\perp} : V \longrightarrow V$

$x = \alpha v + v' \longmapsto \sigma_v(x) := v' - \alpha v$

$\langle v\rangle$ $\langle v\rangle^\perp$ $\quad = x - 2\alpha v$

autovett. di 1 $\quad v' = x - \alpha v$

autovettore di -1

in formule: troviamo α imponendo

$x - \alpha v \perp v$

$g(x - \alpha v, v) = 0$

$g(x,v) - \alpha g(v,v) = 0$

$\alpha = \frac{g(x,v)}{g(v,v)}$

dunque $\sigma_v^\perp(x) = x - 2\alpha v$

$= x - 2\frac{g(x,v)}{g(v,v)} v = \left(id - 2\frac{v\, g(v,-)}{g(v,v)}\right)(x)$

$g(x,v) = g(v,x) = \underline{\underline{Y^t G X}}$

in termini di matrici: $G = \Gamma_{\mathcal{V}}(g)$

$$\boxed{\alpha_{\mathcal{V}}(\sigma_v^\perp) = \mathbb{1}_n - 2\frac{1}{\boxed{Y^t G Y}_{\neq 0}} \boxed{Y Y^t G}}$$

matrice (rango 1)

se $Y = \alpha_{\mathcal{V}}(v)$ coord. di v nella base $\mathcal{V}$

se $G = \mathbb{1}$ (b.o.n. per g): $\mathbb{1}_n - 2\frac{YY^t}{Y^t Y}$

problema: $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$ è isometria per $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($\alpha \neq 0$ in $\mathbb{R}$)

verificare e scriverla come composizione di simmetrie (ortogonali rispetto a vettori non isotropi per la forma di matrice G)!

Problema: le simmetrie ortogonali sono ISOMETRIE (una simmetria vettoriale è isometria per g sse è simmetria ortogonale)

transitività delle simmetrie:

se v, w sono vettori non isotropi di uguale forma,

cioè $g(v,v) = g(w,w) \neq 0$

allora $w = \varphi(v)$ dove $\varphi = \pm\sigma^\perp_{v \mp w}$

perché almeno uno tra $v + w$ e $v - w$ è non isotropo

(se fossero entrambi isotropi, dovrebbe essere isotropo $\langle v,w\rangle$:

$\begin{cases} g(v+w, v+w) = 0 \\ g(v-w, v-w) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} g(v,v) + \cancel{2}g(v,w) + \cancel{g(w,w)} = 0 \\ g(v,v) - \cancel{2}g(v,w) + \cancel{g(w,w)} = 0 \end{cases}$)

$\sigma_{v+w}(v) = v - 2(v+w)\frac{g(v+w, v)}{g(v+w, v+w)}$

$= v - 2(v+w)\frac{g(v,v) + g(w,v)}{\underline{\underline{g(v,v)}} + 2g(v,w) + \underline{\underline{g(w,w)}}}$

$= v - 2(v+w)\frac{1}{2}$

$= -w$

$\sigma_{v-w}(v) = \ldots\ldots = w$

TEOREMA DI CARTAN-DIEUDONNÉ:

$O(V,g) = O_{p,q}(\mathbb{K})$ è generato da simmetrie ortogonali rispetto a vettori anisotropi

e ogni isometria è composizione di al più $\dim_{\mathbb{K}} V$ tali simmetrie ortogonali.

dimostrazione:

(1) se $\exists v$: $\varphi v = v$ non isotropo! allora φ è stabile su $\langle v\rangle^\perp$ che è complementare di $\langle v\rangle$, ha dim -1, induzione

(2) se $\exists v$ non isotropo con $\varphi v - v$ non isotropo

allora uso $\sigma^\perp_{\varphi v - v}$ e $\sigma^\perp_{\varphi v - v} \circ \varphi = \psi$ è tale che $\psi(v) = v$

e allora $\varphi = (\sigma^\perp_{\varphi v - v})^{-1} \circ \underline{\psi}$ composizione di al più $n-1$ simm.$^\perp$

(3) se $\forall v$ non isotropo, capita che $\varphi v - v$ è isotropo?

può succedere solo se • $\dim V = 2m$

• $\det\varphi = 1$

e allora usiamo σ qualsiasi simmetria ortogonale

$\sigma \circ \varphi$ ha $\det(\sigma \circ \varphi) = -1$

dunque $\sigma \circ \varphi$ è nei casi (1) o (2)

dunque $\sigma \circ \varphi$ = composizione di $\leq 2m$ simm.$^\perp$

$< 2m$ simm.$^\perp$

$\varphi = \sigma^{-1} \circ (< 2m \text{ simmetrie}^\perp)$.

Isometrie nei casi simplettici:

(V,g) spazio con g forma alternante non degenere

$\varphi : V \longrightarrow V$ lineare diciamo che è una TRASVEZIONE di asse H (iperpiano di V)

se: $\varphi|_H = id_H$

$\varphi - id$ ha immagine in H

dunque matrici del tipo $\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline h & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array}\right)$ con $h \in H$

(in basi $v_1 \ldots v_n$ t.c. $\langle v_2 \ldots v_n\rangle = H$)

cioè

$$\boxed{\begin{matrix} \varphi(x) = x + \alpha(x)h & \text{con } h \in H \\ & \alpha(x) = 0 \; \forall x \in H \end{matrix}}$$

$\varphi : V \to V$ TRASVEZIONE si dice TRASVEZIONE SIMPLETTICA se è anche isometria simplettica

sse $g(\varphi x, \varphi y) = g(x + \alpha(x)h, y + \alpha(y)h)$

$g(x,y)$ $\quad = g(x,y) + \alpha(x)g(h,y)$

$(\forall x,y)$ $\quad + \alpha(y)g(x,h) + \alpha(x)\alpha(y)\cancel{g(h,h)}$

$$\boxed{\begin{matrix} \alpha(x)g(h,y) + \alpha(y)g(x,h) = 0 \\ (\forall x,y) \end{matrix}}$$

$x \in H \not\ni y \Rightarrow \underset{0}{\alpha(x)}\cancel{g(h,y)} = -\underset{0}{\alpha(y)}\, g(x,h) \Rightarrow h \perp_g x \; (\forall x \in H)$

$\langle h\rangle^\perp = H$

$x, y \notin H \Rightarrow \alpha(x) = \alpha\, g(x,h)$

$\alpha(y) = -\alpha\, g(h,y) = \alpha\, g(y,h)$

(con $\alpha \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, perché $\alpha = \frac{\alpha(x)}{g(x,h)} = -\frac{\alpha(y)}{g(h,y)} = \frac{\alpha(y)}{g(y,h)} \; \forall x,y \ldots$)

dunque φ è trasvezione simplettica asse H sse

$\varphi(x) = x + \alpha\, g(x,h) \cdot h$ $\quad$ con $h^\perp = H$

$= x - \alpha\, g(h,x)\, h$ $\quad$ $\alpha \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

che matrici hanno? $\boxed{\mathbb{1} - \alpha\, h h^t G}$

lunedì 17 novembre 2025

Riassunto: V sp. vettoriale qualsiasi

trasvezioni $\varphi : V \to V$ $\quad \varphi|_H = id_H$ (H iperpiano V)

$id_V - \varphi$ ha immagine $\leq H$

in opportuno rif. matrici $\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline h & \ddots & & \\ & & & 1 \end{array}\right)$

dunque $\varphi(x) = x + \alpha(x)h$ $\quad h \in H$

$\alpha \in V^*$ (cioè $V \to \mathbb{K}$)

con $\ker\alpha \supseteq H$

($\alpha(x) = 0$ se $x \in H$)

(trasf. geo. affine, ovvero sp. geo. proiettivo,

Jordan: 1 blocco d'ord. 2

gli altri d'ord. 1 ...)

(V,g) spazio simplettico, allora $\varphi(x) = x + \alpha(x)h$

è isometria simplettica (trasv. simplettica)

sse

① $h^\perp = H$

② $\alpha(x) = \alpha \cdot g(x,h)$ $\quad$ con $\alpha \in \mathbb{K}^\times$

cioè

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(x) &= x + \alpha\, g(x,h)\, h \\ &= x - \alpha\, g(h,x)\, h \end{aligned}}$$

da controllare direttamente

$g(\varphi(x), \varphi(y)) = \cdots = g(x,y) \quad \forall x,y$

Transitività delle trasv. simplettiche:

(0) g simplettica, $u \in V$ qualsiasi, $\alpha \in \mathbb{K}^\times$

$\tau_{u,\alpha}(x) = x - \alpha\, g(u,x)\, u$

è isometria (trasv. simplettica, asse $u^\perp$)

(1) $v, w \in V$

se $g(v,w) \neq 0 \Rightarrow \tau_{\underset{u}{\underline{\underline{w-v}}}, \underset{\alpha}{\frac{1}{g(v,w)}}}(v) = v - \frac{1}{g(v,w)} \cdot g(w - \cancel{v}, v) \cdot (w - v)$

$= v + (w - v) = w$

se $g(v,w) = 0 \Rightarrow$ esiste un vettore u tale che $g(v,u) \neq 0$, $g(u,w) \neq 0$

(piccolo problema)

⇒ usando due trasvezioni posso $v \xrightarrow{\tau} u \xrightarrow{\tau} w$

trovo certamente u: $g(v,u) \neq 0$ (altrimenti g degenere, $u \in \ker(g)$)

se $g(u,w) \neq 0$ siamo a posto,

altrimenti $g(w,u) = 0$ e trovo u' con $g(w,u') \neq 0$ (altrimenti g degenere, $w \in \ker(g)$)

se $g(v,u') \neq 0$ siamo a posto, altrimenti $g(v,u') = 0$

e allora $u + u'$ va bene: $g(v, u+u') = g(v,u) + \cancel{g(v,u')} \neq 0$

$g(w, u+u') = \cancel{g(w,u)} + g(w,u') \neq 0$.

(2) se (u,v), (u,w) sono coppie simplettiche

se $g(v,w) \neq 0$ esiste trasvezione $(u,v) \mapsto (u,w)$

se $g(v,w) = 0$ allora $(u, u+v)$ è ancora coppia simplettica

$(u,v) \xrightarrow{\text{trasv.}} (u, u+v) \xrightarrow{\text{trasv.}} (u,w)$

$g(v, u+v) = g(v,u) + \cancel{g(v,v)}$ $\qquad$ $g(u+v, w) \neq 0$, $= g(u,w) + \cancel{g(v,w)}$

(3) Conclusione: con al più 4 trasvezioni simplettiche, posso mandare qualsiasi coppia simplettica in qualsiasi altra coppia simplettica

Quindi vale l'analogo di C-D per spazi simplettici, usando trasvezioni simplettiche:

ogni isometria simplettica (manda coppie simplettiche in coppie simplettiche)

si scrive come composizione di al più $2\dim_{\mathbb{K}} V$ trasvezioni simplettiche,

in particolare le trasvezioni simplettiche generano $Sp(V)$, e tutte le isom. simplettiche hanno det $= 1$.

giovedì 20 novembre 2025