Parametrizzazione: $\gamma : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ $\quad \mathbb{I}$ può essere $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $\mathbb{R}$

γ è $\mathcal{C}^k$ se $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathcal{C}^k(\mathbb{I})$

γ è regolare se $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{I}$

γ è semplice se $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ (a meno che $t_1 = a$ e $t_2 = b$)

γ è chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$

γ è regolare a tratti se $\mathbb{I} = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n]$ e γ è regolare su ogni $[a_{i-1}, a_i]$

Teorema fondamentale delle curve piane:

Data $k : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ con $k \in \mathcal{C}^0$, $\mathbb{I} = [a, +\infty)$ o $(-\infty, b]$ o $\mathbb{R}$

funzione arbitraria, $p_0 \in \mathbb{R}^2$, $v_0 \in \mathbb{R}^2$ con $\|v_0\| = 1$

Allora $\exists!$ la curva $\gamma : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$ regolare con $\gamma(a) = p_0$, $\gamma'(a) = v_0$ e curvatura k.

Osservazioni:

(1) Una TFC in classe $\mathcal{C}^k$ è classe $\mathcal{C}^{k+2}$ $\forall k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

non vale se k non è derivabile nel senso forte

es: $|x|$ problema nel $\mathbb{C}$-analisi

$\sqrt{x}$ può $\in \mathcal{C}^0$ ovunque, ma la concatenazione di rette non è $\mathcal{C}^1$ nella TFC ha bisogno $\mathcal{C}^1$ per il teorema di esistenza e unicità

non vale per una curva che non è $\mathcal{C}^2$ a tratti (vedi punto 2)

(2) Esempio di curva che non cade nelle ipotesi di specifica:

$\gamma(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{t} \\ \sin \frac{1}{t} \end{pmatrix} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$ $\quad k(t) = \frac{1}{2t^3}$

γ è $\mathcal{C}^\infty$ ma non è regolare in $t = 0$ (calcolo per limite del rapporto incrementale)

γ è $\mathcal{C}^\infty$ ma non è semplice in $t = 0$ (la curva "torna indietro")

γ è $\mathcal{C}^\infty$ ma non è regolare a tratti in $t = 0$ (la curva "torna indietro" e la derivata destra e sinistra in $t = 0$ sono 0)

- $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathcal{C}^1$ ma non $\mathcal{C}^2$ in $t = 0$
- $\begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathcal{C}^2$ ma non $\mathcal{C}^3$ in $t = 0$
- $\begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathcal{C}^3$ ma non $\mathcal{C}^4$ in $t = 0$
- $\begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathcal{C}^1$ ma non $\mathcal{C}^2$ in $t = 0$ (la curva cambia concavità) $\rightarrow$ fig.

γ è $\mathcal{C}^\infty$ ma non è regolare in $t = 0$ (la curva ha una cuspide)

γ è $\mathcal{C}^\infty$ ma non è semplice in $t = 0$ (la curva passa due volte per lo stesso punto)

γ è $\mathcal{C}^\infty$ ma non è regolare a tratti