PRIMA FORMA FONDAMENTALE delle superfici:

Notazione: X superficie, $\sigma: U \longrightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} (u,v) \longmapsto \sigma(u,v) \\ (u_0,u_1) \longmapsto \sigma(u_0,u_1) \end{cases}$

base T_PX con $P \in X$: $\begin{cases} \sigma_u, \sigma_v = \frac{\partial}{\partial u}\sigma, \frac{\partial}{\partial v}\sigma \\ \frac{\partial}{\partial u}\sigma, \frac{\partial}{\partial v}\sigma \\ \sigma_{u_0}, \sigma_{u_1} \end{cases}$

definizione: la PRIMA FF è la restrizione del prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ al piano tangente di X:
cioè: per ogni punto $P \in X$ definiamo:

$$I_P : T_PX \times T_PX \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\xi, \eta) \longmapsto I_P(\xi,\eta) := \xi \cdot \eta = \langle \xi, \eta \rangle$$

(ui punto vedi $\mathbb{R}^3$)

è funzione bilineare simmetrica non degenere definita positiva

(Quindi $I : X \longrightarrow$ fam bil su TX, $P \longmapsto I_P : T_PX \times T_PX \to \mathbb{R}$)

MATRICE ASSOCIATA alla p.f.f.:

Scelta una parametrizzazione σ di X, lo spazio tangente è generato da σ_u, σ_v

(cioè: in ogni punto $T_PX = \langle \sigma_u(P), \sigma_v(P) \rangle$)

e la prima ff ha matrice di Gram:

$$G_I = \begin{pmatrix} I(\sigma_u,\sigma_u) & I(\sigma_u,\sigma_v) \\ \text{"} & I(\sigma_v,\sigma_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ \text{"} & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} E & G \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u \\ \sigma_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v \end{pmatrix} \qquad \sigma_i \cdot \sigma_j = g_{ij}$$

NOTAZIONE GAUSS — NOTAZIONE CON INDICI (per Carl Gauss stesso)

da calcolare di tutte le I_P (al variare di $P \in X$) dà tutti gli elementi per fare ulteriore classificazione, compiti, aree della superficie

da matrice di I cambio coordinate fa bene di TX, cioè cambiando la parametrizzazione di X:

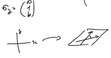
Cambio piano:
ui $\mathbb{R}^3$, $\pi: z=0$

$$U \xrightarrow{\sigma} \pi \subseteq \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto \sigma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow I = \begin{pmatrix} \sigma_x \cdot \sigma_x & \sigma_x \cdot \sigma_y \\ \sigma_y \cdot \sigma_x & \sigma_y \cdot \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in tutti i punti!

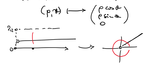
$$\pi : z = ax + by \subseteq \mathbb{R}^3$$
$$\sigma : U \longrightarrow \pi \subseteq \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ ax+by \end{pmatrix}$$
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab \\ ab & 1+b^2 \end{pmatrix}$$

Sempre sempre la stessa matrice per tutti i punti (non dipende da x, y)



ui $\mathbb{R}^3$: $\pi (z=0)$ tolta l'origine:

$$\mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \xrightarrow{\sigma} \pi \setminus \{0\}$$
$$(\rho, \varphi) \longmapsto \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\sigma_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

è diagonale perché le linee coordinate della parametrizzazione sono $\perp$ tra loro, ma NON è costante: dipende da ρ.

---

(2) Lunghezza di curve:
$\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ curva $\subset X \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\text{Lungh}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{\text{ui generale } \forall \gamma \in \mathbb{R}^3} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_\gamma(\gamma', \gamma')}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt$$

perché $\|\gamma'\| = \|\sigma_u u' + \sigma_v v'\| =$
$= \sqrt{(\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot (\sigma_u u' + \sigma_v v')}$
$= \sqrt{(\sigma_u \cdot \sigma_u) u'^2 + 2(\sigma_u \cdot \sigma_v) u'v' + (\sigma_v \cdot \sigma_v) v'^2}$
$= \sqrt{(u', v') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}$

nota: elemento infinitesimale di lunghezza: $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$

ISOMETRIE (locali) tra superfici:

$f: X \longrightarrow Y$ funzione diff tra sup diff. è isometria (locale) se df è isometria tra I_X e I_Y (per ogni punto $P \in X$),
cioè se

$$df_P : \underset{\text{con } I_{X,P}}{T_PX} \longrightarrow \underset{\text{con } I_{Y,f(P)}}{T_{f(P)}Y}$$

è isometria tra $I_{X,P}$ e $I_{Y,f(P)}$ ($\forall P \in X$),
cioè

$$I_{Y,f(P)}(df_P(\xi), df_P(\eta)) = I_{X,P}(\xi, \eta) \quad (\forall \xi, \eta \in T_PX).$$

ui hanno matrici diagonali:

$$J^t G_{I_Y} J = G_{I_X}$$

dove J = matrice jacobiana di F, cioè matrice di df nella base canonica di T_PX e T_PY.

F isometria (locale) sse F conserva la lunghezza di tutte le curve $\gamma \subset X$ ($\text{Lungh}(\gamma) = \text{Lungh}(F\gamma)$ $\forall$ curva $\subset X$)

Perché →

lunedì 03/02/2025

Riassunto: "ciò che ci interessa sulla superficie sta vicino a piani tangenti (approssimazioni lineari della superficie vicino a quel punto)":

$\forall P \in X$, T_PX spazio vett 2

$$I_P : T_PX \times T_PX \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\xi, \eta) \longmapsto I_P(\xi,\eta) = \xi \cdot \eta = \langle \xi, \eta \rangle$$

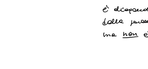
I_P := restrizione prod. scal. di $\mathbb{R}^3$ al T_PX.

Scelta una carta $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ di X vicino a P, abbiamo base T_PX: σ_u, σ_v e la matrice di I_P ui punto ha:

$$G_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} E &= \sigma_u \cdot \sigma_u \\ F &= \sigma_u \cdot \sigma_v = \sigma_v \cdot \sigma_u \\ G &= \sigma_v \cdot \sigma_v \end{aligned}$$
$$\Gamma_{(\sigma_u, \sigma_v)}(I_P)$$

(1) $\text{Lungh}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt$ ui generale $\mathbb{R}^3$

ma se $\gamma \subseteq X$ superficie $\subset \mathbb{R}^3$



$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_P(u'(t), v'(t))}\, dt$$

Isometrie di sup $F: X \longrightarrow Y$
Indica df sia isometria $\forall P$ (usando la Iff con X e Y rispetto la metrica)

$$df_P : \underset{I_X}{T_PX} \longrightarrow \underset{I_Y}{T_{F(P)}Y} \qquad I_Y(dF\xi, dF\eta) = I_X(\xi, \eta) \quad (\forall P.\ I_{Y,f(P)}(dF_P\xi, dF_P\eta) = I_{X,P}(\xi, \eta))$$

ξ, η "campi di v"

---

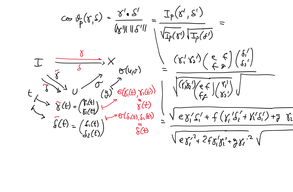
(2) angoli tra curve contenute in X:

γ, δ curve $\subseteq X$, passanti per $P \in X$

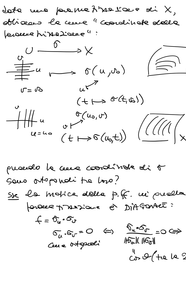
usiamo una carta centrata in P

$$U \xrightarrow{\sigma} X \subseteq \mathbb{R}^3$$
$$0 \longmapsto P$$

$$\cos\theta_P(\gamma', \delta') = \frac{\gamma' \cdot \delta'}{\|\gamma'\| \|\delta'\|} = \frac{I_P(\gamma', \delta')}{\sqrt{I_P(\gamma')}\sqrt{I_P(\delta')}} = \frac{(\gamma_1', \gamma_2') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1' \\ \delta_2' \end{pmatrix}}{\sqrt{(\gamma_1', \gamma_2') \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix}} \sqrt{\cdots}} = \frac{E\gamma_1'\delta_1' + F(\gamma_1'\delta_2' + \gamma_2'\delta_1') + G\gamma_2'\delta_2'}{\sqrt{E\gamma_1'^2 + 2F\gamma_1'\gamma_2' + G\gamma_2'^2}\sqrt{\cdots}}$$



Esempio: data una parametrizzazione di X, abbiamo la curva "coordinata della funzione parametrizzazione":



$$U \xrightarrow{\sigma} X$$
$$u \longmapsto \sigma(u, v_0) \quad (t \mapsto \sigma(t, a))$$
$$v \longmapsto \sigma(u_0, v) \quad (t \mapsto \sigma(u_0, t))$$

quando la curva coordinata di σ sono ortogonali tra loro?
sse la matrice della p.f.f. ui punto funzione parametrizzazione è DIAGONALE:

$$f = \sigma_u \cdot \sigma_v$$
$$\sigma_u \cdot \sigma_v = 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma_u \cdot \sigma_v}{\|\sigma_u\| \|\sigma_v\|} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

curve ortogonali

$\Leftrightarrow \theta$ (tra la 2 curve)

Conformità: $F: X \longrightarrow Y$ funzione diff tra sup diff.
tale che:
dF è similitudine per I_X, I_Y ($\forall P \in X$):

$$dF_P : T_PX \longrightarrow T_{F(P)}Y \text{ è similitudine}$$

sse $I_{Y,F(P)}(dF_P(\xi), dF_P(\eta)) = \lambda_P\, I_{X,P}(\xi, \eta)$ ($\forall \xi, \eta \in T_PX$)

scalare che può dipendere da P

ie

$$\boxed{J^t G_{I_Y} J = \lambda\, G_{I_X}}$$

funzione di $P \in X$.

$$J(P)^t\, G_{I_{Y,F(P)}}\, J(P) = \lambda_P\, G_{I_{X,P}} \quad (\forall P \in X)$$

sse dF rispetta gli angoli tra vettori tangenti
($\Rightarrow$ ovvio dalla definizione:

$$\frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\|\xi\| \|\eta\|} = \frac{\langle dF\xi, dF\eta \rangle}{\|dF\xi\| \|dF\eta\|} = \frac{\lambda \langle \xi, \eta \rangle}{\sqrt{\lambda}\|\xi\| \sqrt{\lambda}\|\eta\|}$$

$\Leftarrow$ quasi ovvio)

Vedremo che non esistono isometrie tra sfera e piano, ma vi sono mappe conformi...

---

(3) aree di superfici $R \subseteq X$

Supponiamo che $R \subset X$ sia contenuto nell'immagine di una parametrizzazione $\sigma: U \to X$

$$A(R) = \int_{\sigma^{-1}(R)} \|\sigma_u \times \sigma_v\| du\, dv$$

"area(R)"

$$= \int_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{\det I}\, du\, dv$$

det della I

$$= \int_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{\det(J^t G J)}\, du\, dv$$

$\|\sigma_u \times \sigma_v\|^2 = \left\| \frac{\|v\|}{\|u\|} \frac{\|u\|}{\|v\|} \right\|$ vettori $\mathbb{R}^3$

ma ora $\|\sigma_u \times \sigma_v\| = \begin{vmatrix} \sigma_u & \sigma_v \\ c & c \\ f & g \end{vmatrix} = \sqrt{\sigma_u \cdot \sigma_u \cdot \sigma_v \cdot \sigma_v}$

Funzioni ISOAREALI: $F: X \longrightarrow Y$ fra diff tra sup diff.
tale che $\forall R$ regione ui X abbiamo $A(R) = A(FR)$
sse $\det(J^t G_Y J) = \det(G_X)$
sse $\det(J)^2 = \det(G_X)/\det(G_Y)$
(se abbiamo $X = Y$ allora sse $\det(J)^2 = 1$)

Avremo un esempio interessante di funzione isoareale da sfera a cilindro...

Esempio: Iff (sup) ellissoidi. (nota: abbiamo già visto l'esempio del piano)

ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

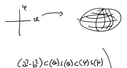
parametrizzazione:
come grafico. $(x,y) \xmapsto{\sigma} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \end{pmatrix}$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \end{pmatrix}$$

usando bipolare: (coordinate sferiche)

$$(\varphi, \theta) \xmapsto{\sigma} \begin{pmatrix} a\cos\varphi\cos\theta \\ b\cos\varphi\sin\theta \\ c\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\sigma_\varphi = \begin{pmatrix} -a\cos\theta\sin\varphi \\ -b\sin\theta\sin\varphi \\ c\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \sigma_\theta = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\cos\varphi \\ b\cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$G_I = \begin{pmatrix} \sigma_\varphi \cdot \sigma_\varphi & \sigma_\varphi \cdot \sigma_\theta \\ \sigma_\varphi \cdot \sigma_\theta & \sigma_\theta \cdot \sigma_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(\theta)^2 \underbrace{(a^2 s(\varphi) + b^2 c(\varphi))}_{\parallel} & (a^2 - b^2) c(\varphi) s(\varphi) c(\theta) s(\theta) \\ \text{"} & s(\theta)^2 (a^2 c(\varphi)^2 + b^2 s(\varphi)^2) + c^2 c(\theta)^2 \end{pmatrix}$$

$a^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + b^2 \cos^2\varphi \cos^2\theta$
$\cos^2\theta (a^2 \cos^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)$
$a^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta \cos^2\theta - b^2 \cos^2\varphi \cos^2\theta \sin^2\theta$

$a^2 s(\theta)^2 c(\varphi)^2 + b^2 s(\theta)^2 s(\varphi)^2 + c^2 c(\theta)^2$
$s(\theta)^2 (a^2 c(\varphi)^2 + b^2 s(\varphi)^2) + c^2 c(\theta)^2$

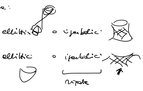
Se abbiamo $a = b$, cioè ellissoide di rotazione:

$$G_I = \begin{pmatrix} a^2 \cos^2(\varphi) & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2(\varphi) + c^2 \cos^2(\varphi) \end{pmatrix}$$

Se poi $a = b = c$, cioè abbiamo SFERA di raggio a:

$$G_I = \begin{pmatrix} a^2 \cos^2(\varphi) & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{G_I \text{ della sfera di raggio } 1}$$

Problemi per tutti: fare lo stesso lavoro per la sfera quadrica:



iperboloide ellittico o iperbolico
paraboloide ellittico o iperbolico

nopate

Intermezzo di algebra lineare:

se V spazio vettoriale, g forma bilin. simm. non deg.

allora diciamo che $\varphi: V \to V$ lineare è autoaggiunta per g se $g(\varphi(v), w) = g(v, \varphi(w))$ $\forall v, w \in V$

(dato $g \in \varphi$ definiamo $\varphi^g: V \longrightarrow V$
$g(v, \varphi^g(w)) := g(\varphi(v), w)$ $\forall v, w$
implicita: come $\varphi^g(w)$
perché conosco $g(v, \varphi^g(w))$ $\forall v \in V$.

φ autoaggiunta $\equiv \varphi = \varphi^g$)

se $(e_1 \cdots e_n) = \mathcal{B}$ è base di V,
e $G = \Gamma_{\mathcal{B}}(g)$
$A = \alpha_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$g(v, \varphi(w)) = g(\varphi(v), w)$
$v^t G (Aw) = (Av)^t G w$
$v^t A^t G w = v^t A^t G w$

allora $\alpha_{\mathcal{B}}(\varphi^g) = G^{-1} A^t G$

e φ autoaggiunta sse $A = G^{-1} A^t G$
$GA = A^t G$
$GA^2 = A^t G$
$A^2 = G^{-1} A^t G$

(se poi $G = \mathbb{1}$: $A = A^t$)
base ortonormale per g

(V, g) spazio vettoriale (g. f. bil. non deg. simm.)
allora c'è biiezione tra

$$\left\{ \begin{matrix} \varphi: V \to V \\ \text{autoaggiunte per } g \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{forme bil. simmetriche} \\ \text{su } V \end{matrix} \right\}$$

$$\varphi \longmapsto f_\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \longmapsto f_\varphi(v, w) := g(\varphi(v), w) = g(v, \varphi(w))$$

simmetrica perché
$f_\varphi(v, w) = g(\varphi(v), w) \leftarrow \varphi$ autoag.
$= g(w, \varphi(v))$
$= g(\varphi(w), v) \leftarrow$ simm.

$$? \longleftarrow f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ simmetrica}$$

definiamo φ_f in modo inverso usando che g è non degenere:

$$g(\varphi_f(v), w) := f(v, w)$$
$$\forall w$$

e vediamo che φ_f è autoaggiunta per g:

$$g(v, \varphi_f(w)) = g(\varphi_f(w), v) = f(w, v) = f(v, w)$$

e la due funzioni sono una linea dell'altra.

Proviamo anche continuità:

$$f_2(v, w) = g(\varphi_f^2(v), w) = g(\varphi_f(v), \varphi_f(w)) = g(v, \varphi_f^2 w)$$
$$f_n(v, w) = g(\varphi_f^n(v), w) = g(\varphi_f^2(v), \varphi_f(w)) = \quad = g(v, \varphi_f^n w)$$
$$f_n^i(v, w) = g(\varphi_f^i(v), w)$$

Prima biiez. simmetrica.

Se V ha dimensione n, allora $\forall i \in \langle g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n \rangle$ $\forall i$

Supponi inoltre: usare il TEOREMA C.

se $p_f(\lambda)$ è polinomio caratteristico di φ (TEOREMA: $p_f(\varphi) = 0$)
Voglio una calcolare:
p_f sostituendo X^i con $f_i(v, w)$
$= p_f$ sostituendo X^i con $g(\varphi^i(v), v)$
$= g(p_f(\text{sostituendo } X^i \text{ con } \varphi^i)(v), w) = g(p_f(\varphi)(v), w) = g(0, w) = 0$

dunque se $p_f(\lambda) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$
diventa $f_n + a_{n-1} f_{n-1} + \cdots + a_1 f_1 + a_0 f_0 = 0$.

Proviamo che $\alpha_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$ è simmetrica:

$$\begin{array}{ccc} A & \longmapsto & \Gamma_{\mathcal{B}}(f_\varphi) = A^t G \\ \alpha_{\mathcal{B}}(\varphi) = \text{matrice di } \varphi & & \text{"} \\ \text{(autoaggiunta per } A \text{ significa } A^t G = GA) & & GA \\ g(\varphi_f(v), w) & & g(v, \varphi_f(w)) \\ (Av)^t G w & & v^t G(Aw) \\ v^t A^t G w & & v^t G A w \\ G^{-1} H & \longleftarrow & H \end{array}$$

simmetrica: $(A^t G)^t = G^t A^{tt} = G A = A^t G$.
Usiamo per autoaggiunzione di φ.

Si vede subito che è invertibile, e che è l'inversa:

nota: il prodotto di 2 matrici simmetriche non è detto che sia simmetrica:
$(AB)^t = B^t A^t = BA \neq AB$ ui generale!
$B^t = B$, $A^t = A$

martedì 04/03/2025