Proiezioni per gran distanza ed ∞-PROSPETTIVE

vettori in $\mathbb{R}^2$: $u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

vettori $v_1, \dots, v_{n-1}$ in $\mathbb{R}^n$: $\det(v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{vmatrix} e_1 & v_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ e_n & v_{n1} & \cdots \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sum (-1)^{i+1} v_{i1} \det(\text{matrice ottenuta da } v \text{ eliminando la } i\text{-esima riga}) \\ \vdots \\ \det \begin{pmatrix} -1 & \cdots \\ \vdots & \\ -1 & \cdots \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

vettore che ha come componente i-esima il minore ottenuto dalla matrice $(v_1 \dots v_{n-1})$ togliendo la riga i

vettore base ortogonale a $\mathbb{R}^n$

$u \times (v \times w) = |u\ v\ w|$

$$(u \times u) \cdot (v \times v) = \begin{vmatrix} u \cdot v & u \cdot v \\ u \cdot v & u \cdot v \end{vmatrix}$$

$$\| u \times u \|^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot u \\ u \cdot u & u \cdot u \end{vmatrix} = \|u\|^2 \|u\|^2 - (u \cdot u)^2 = \|u\|^2 \|u\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|u\|^2 \|u\|^2 \sin^2 \theta = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \theta$$

(teorema dell'area del parallelogramma)

riscrivo la generalizzazione in questo caso:

$$u \cdot \det(v, \dots, v_{n-1}) = \det(u, v, \dots, v_{n-1})$$

$$\det(v, \dots, v_{n-1}) \cdot \det(w, \dots, w_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot v & w \cdot w \end{pmatrix}$$

$$\| \det(v_1, \dots, v_{n-1}) \|^2 = \det(v_i \cdot v_j) = \|v\|^2 \cdots \|v_{n-1}\|^2 \det(\cos \theta(v_i, v_j))$$

= volume del parallelepipedo avente i vettori v come lati

= prodotto $(n-1)$-dimensionale

riscrivo la generalizzazione per n qualsiasi: $\det \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & \cdots \\ \vdots & \\ v_n \cdot v_1 & \cdots \end{pmatrix} = \sum_{\text{tutti i minori}^2} \prod \det^2$ (matrice ott.)

$u \times (v \times w) = (u \cdot w) v - (u \cdot v) w$

$v \times (v \times w) = (v \cdot w) v - (v \cdot v) w$

$w \times (v \times w) = (w \cdot w) v - (v \cdot w) w$

(v. sopra se w è parte di v ortogonale a v, poiché $\frac{v \cdot w}{v \cdot v} v$ è proiezione lungo v di w)

$(u_1 \times u_2) \times (v_1 \times v_2) = |u_1 u_2 v_1| u_1 - |v_1 u_2 u_1| u_1$

$= |u_1 u_2 v_1| v_1 - |u_1 u_2 v_1| v_2$

(basta usare la formula precedente con $u = u_1 \times u_2 \dots$)

Fatti: $u \times (v \times w)$ è $\perp$ a $v \times w$

giacque $\in \langle v, w \rangle$

$= \alpha v + \beta w$ (vedi trucco u, β)

Per: è $\perp u$, giacque

$0 = \alpha\, u \cdot v + \beta\, u \cdot w$

e calcolo uno dei prodotti scalari con v:

$$v \cdot (u \times (v \times w)) = \alpha\, v \cdot v + \beta\, v \cdot w$$

$$\begin{vmatrix} v & u & v & w \\ v \cdot u & v \cdot w & & \\ v \cdot u & v \cdot w & & \\ w \cdot u & w \cdot w & & \end{vmatrix} = \frac{v \cdot w}{v \cdot u} \frac{v \cdot v}{v \cdot w} = (v \cdot w)\, v \cdot v - (v \cdot v)\, v \cdot w$$

$P(t)$ punto rispondente da vero a fini momentu (punto mobile, curve)

$v(t)$ velocità " " " (velocità mobile, campo vettoriale)

$A(t)$ matrice invertibile " " " (RIFERIMENTO MOBILE)

ortogonale (RIFERIMENTO ORTONORMALE)

derivata: $\frac{d}{dt} v(t) = v'$, $\frac{d}{dt} v(t) = \ddot{v}$, $\frac{d}{dt} \ddot{v} = \dddot{v}$ ...

derivata: $(v+w)' = v' + w'$

$(v \cdot w)' = v' \cdot w + v \cdot w'$

$(v \times w)' = v' \times w + v \times w'$

modulo: $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ $\|v\|^2 = v \cdot v$

$\|v\|' ?$ $\frac{d}{dt} \|v\|^2 = \frac{d}{dt}(v \cdot v) = v' \cdot v + v \cdot v' = 2 v \cdot v'$

$= 2 \|v\| \cdot \|v\|'$ $\Rightarrow$ $\|v\|' = \frac{v \cdot v'}{\|v\|}$

derivando direttamente?

$$\left(\frac{1}{\|v\|}\right)' = -\frac{\|v\|'}{\|v\|^2} = -\frac{v \cdot v'}{\|v\|^3}$$ poiché analogamente $\left(\frac{1}{(x^2+1)}\right)' = \left((x^2+1)^{-1}\right)'$

$$\left(\frac{v}{\|v\|}\right)' = v' \left(\frac{1}{\|v\|}\right) + v \frac{v \cdot v'}{\|v\|^3} = \frac{v'}{\|v\|} - \frac{v \cdot v'}{\|v\|^3} v = \frac{\|v\|^2 v' - (v \cdot v') v}{\|v\|^3}$$ se $\mathbb{R}^3$ (prodotto vettore $\times v$)

DERIVATA di un VERSORE, poiché deve restare $\perp v$

$= \frac{v \times (v' \times v)}{v \cdot v}$ (formula $\cdot \times \cdot$ di prima)

è parte di v' ortogonale a v ✓.

in particolare $\|v\| = \text{costante}$ sse $v \cdot v' = 0$ sse $v' \perp v$ ●

(interpretazione fisica: velocità ha lunghezza costante (velocità costante) sse l'accelerazione è $\perp$ al vettore stesso.

Lunedì 1 dicembre 2025

Problema : dare formula per $\left(\frac{v \times w}{\|v \times w\|}\right)'$

Matrici: $(A+B)' = A' + B'$

$(AB)' = A'B + AB'$

$(A^n)' = \sum_{i+j=n} A^i A' A^j$ (ragionare $A \leadsto A'$ di seguito per esempio!)

$(A^{-1})' = -A^{-1} A' A^{-1}$ poiché usiamo $(A^{-1})' A = 0$

$((A^{-1})' A)' = 0$

$(A^{-1})' A + A^{-1} A' = 0$

$(\operatorname{tr} A)' = \operatorname{tr}(A')$ $\operatorname{tr}(A) = \Sigma a_{ii}$

$(\det(A))' = \sum_{j=1}^{n} \det(A_j')$ dove A_j' = matrice che si ottiene da A derivando la j-esima colonna.

$= \det(A) \cdot \operatorname{tr}(A' A^{-1})$

$\operatorname{tr}(A^{-1} A')$

$\det(A) A'$

Jacobi: poiché da $A^{-1} A = \det(A)\, \mathbb{1}$ $\det(A^{-1} A) = \det(A)^n$? $\operatorname{tr}(A^{-1} A) = \det(A)'$? $\operatorname{tr}(\det(A)\, A^{-1}) = n \det(A)'$ $\vdots$ $= \operatorname{tr}(n\, A^{-1} A')$ e deriviamo...

se U matrice ortogonale, cioè $U^{-1} = U^t$ cioè $U^t U = \mathbb{1}_n$

allora $U' = UA$ poiché U invertibile, e A risulta antisimmetrica

poiché da $U^t U = \mathbb{1}_n$ deriviamo $(U^t)' U + U^t U' = 0$ $A^t \frac{U^t U}{\mathbb{1}} + \frac{U^t (U A)}{\mathbb{1}} = 0$ $A^t + A = 0$, cioè $A^t = -A$ ●

$(U^t)' = (U')^t$ $= (UA)^t$

Funzioni $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

differenziale di f

$(1,1)$ $f : \Sigma \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$

$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \partial_x f(x) = f_x(x)$

$f' = f_x$

$df : \Sigma \xrightarrow{\text{aperto di } \mathbb{R}} \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x \longmapsto df(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v \mapsto df(x) \cdot v = f'(x) \cdot v$

$df(x) = f'(x)\, dx$

approssimazione lineare di f vicino a x_0

(n,m) $f : U \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^m$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$

$df : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $x \longmapsto df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto df(x) \cdot v = \partial_v f(x)$

derivate ordinarie:

$\partial_v f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \partial_{e_i} f(x)$

$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) = \partial_{e_1} f(x) = \partial_x f(x) = f_x(x)$

$\frac{\partial}{\partial x_1} f = f_x$

$df(x) = \sum \partial_i f(x)\, \underline{dx_i}$ dx_i = ei dell'duale della base $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow$ $= \pi_i(x)$

$df(x)$ è una matrice-funzione LINEARE $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nella base canonica è rappresentata una matrice

$M_x \left(df(x)\right) = \left(\partial_j f_i(x)\right)_{i,j}$ matrice jacobiana di f

poiché $df(x) \cdot v = \partial_v f(x)$

$= \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$

$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Composizione usando due differenziali per composizione:

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$

$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$

$d(g \circ f)(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ (somma è continua)

$df(x)$ $\mathbb{R}^m \xrightarrow{dg(f(x))} \mathbb{R}^p$

$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$ composizione di prodotto di matrici Jacobiane

"$d(g \circ f) = dg \cdot df$"

"differenziale della funzione composta è composizione dei differenziali delle funzioni"

differenziale di f in coordinate:

$(1,1)$: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(n,1)$: $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Derivate superiori:

$(1,1)$ $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = \partial_x^2 f(x) = f_{xx}(x)$ $\Rightarrow$ Taylor: $f(x+\varepsilon) = f(x) + f'(x)\varepsilon + \frac{1}{2} f''(x) \varepsilon^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \varepsilon^n + \cdots$

$f^{(n)} = f_{xx\dots x}$

$\vdots$

$(n,1)$: $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) = \partial_i \partial_j f(x) = f_{x_i x_j}(x)$ $\Rightarrow$ Taylor: $f(x+\varepsilon) = f(x) + \sum \partial_{x_i} f(x)\, \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \partial_{x_i x_j} f(x)\, \varepsilon_i \varepsilon_j + \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} \partial_{x_{i_1} \dots x_{i_n}} f(x)\, \varepsilon^{\underline{i}} + \cdots$

$= f(x) + df(x)\,\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^t H_f(x)\, \varepsilon + \cdots$

matrice che $df(x) \in \mathbb{R}^n$ $H_f = \left(\partial_i \partial_j f\right)$ "hessiana" H_f è $(\partial_i \partial_j f \dots \partial_n f)$ "gradiente"

H_f è "matrice reciproca", forma quadratica -

Composizione delle derivazioni:

$\gamma(t) : \theta \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$

$\theta \xrightarrow{g} t \xrightarrow{\gamma} \gamma(t)$

$t(\theta) \mapsto \gamma(t(\theta))$

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t)$ differenziale

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\gamma' = \frac{d}{dt} \gamma$ $t' = \frac{d}{d\theta} t$

① $\tilde{\gamma}'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \tilde{\gamma}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \gamma(t(\theta)) = \frac{d}{dt} \gamma(t(\theta)) \cdot \frac{dt}{d\theta}(\theta)$

$= \gamma'(t(\theta)) \frac{dt}{d\theta}(\theta)$

$\tilde{\gamma}' = \gamma' \cdot \frac{dt}{d\theta}$

② $\tilde{\gamma}''(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left(\tilde{\gamma}'(\theta)\right)$

$= \frac{d}{d\theta} \left(\gamma'(t(\theta)) \cdot \frac{dt}{d\theta}(\theta)\right)$

$= \frac{d}{d\theta}\left(\gamma'(t(\theta))\right) \frac{dt}{d\theta}(\theta) + \gamma'(t(\theta)) \cdot \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dt}{d\theta}(\theta)\right)$

$= \frac{d}{dt}(\gamma')(t(\theta)) \cdot \frac{dt}{d\theta}(\theta) \cdot \frac{dt}{d\theta}(\theta) + \gamma'(t(\theta)) \cdot \frac{d^2 t}{d\theta^2}(\theta)$

$= \gamma''(t(\theta)) \left(\frac{dt}{d\theta}(\theta)\right)^2 + \gamma'(t(\theta)) \cdot \frac{d^2 t}{d\theta^2}(\theta)$

$\tilde{\gamma}'' = \gamma'' \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 + \gamma' \cdot \frac{d^2 t}{d\theta^2}$

③ $\tilde{\gamma}''' = \frac{d}{d\theta} \left(\tilde{\gamma}''\right) = \frac{d}{d\theta} \left(\gamma'' \cdot \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 + \gamma' \cdot \frac{d^2 t}{d\theta^2} \right)$

$= \frac{d}{d\theta}(\gamma'') \cdot \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 + \gamma'' \cdot \frac{d}{d\theta}\left(\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2\right) + \frac{d}{d\theta}(\gamma') \cdot \frac{d^2 t}{d\theta^2} + \gamma' \cdot \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2 t}{d\theta^2}\right)$

$= \frac{d}{dt}(\gamma') \cdot \frac{dt}{d\theta} \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 + \gamma'' \cdot 2 \frac{dt}{d\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dt}{d\theta}\right) + \frac{d}{dt}(\gamma') \cdot \frac{dt}{d\theta} \cdot \frac{d^2 t}{d\theta^2} + \gamma' \frac{d^3 t}{d\theta^3}$

$= \gamma''' \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^3 + \gamma'' \cdot 3 \frac{dt}{d\theta} \cdot \frac{d^2 t}{d\theta^2} + \gamma' \cdot \frac{d^3 t}{d\theta^3}$

$\tilde{\gamma}''' = \gamma''' \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^3 + 3 \gamma'' \frac{dt}{d\theta} \frac{d^2 t}{d\theta^2} + \gamma' \frac{d^3 t}{d\theta^3}$

④ $\tilde{\gamma}^{(4)} = \gamma^{(4)} \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^4 + \dots$ $\dots + \gamma' \frac{d^4 t}{d\theta^4}$ esercizio!

$\dots, \left(\frac{d^2 t}{d\theta^2}\right)^2, \frac{dt}{d\theta} \frac{d^3 t}{d\theta^3}, \dots$

---

martedì 2 dicembre 2025

$\tilde{\gamma}^{(4)} = \frac{d}{d\theta}\left(\tilde{\gamma}'''\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\gamma''' \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^3 + 3\gamma'' \frac{dt}{d\theta} \frac{d^2 t}{d\theta^2} + \gamma' \frac{d^3 t}{d\theta^3}\right) =$

$= \gamma^{(4)} \frac{dt}{d\theta} \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^3 + \gamma''' \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^3 \frac{dt}{d\theta} + 3\gamma''' \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\theta}\right) \frac{d^2 t}{d\theta^2} + 3\gamma'' \frac{dt}{d\theta} \frac{d^2 t}{d\theta^2} + \gamma'' \frac{dt}{d\theta} \frac{d^3 t}{d\theta^3} + \gamma' \frac{d^4 t}{d\theta^4} =$

$= \gamma^{(4)} \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^4 + \gamma''' \left(6 \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 \frac{d^2 t}{d\theta^2}\right) + \gamma'' \left(\left(\frac{d^2 t}{d\theta^2}\right)^2 + 4 \frac{dt}{d\theta} \frac{d^3 t}{d\theta^3}\right) + \gamma' \frac{d^4 t}{d\theta^4}$

in generale $\tilde{\gamma}^{(n)} = \gamma^{(n)} \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^n + \dots$ $\dots$ $\dots$ $+ \gamma' \frac{d^n t}{d\theta^n}$

importante poiché dove $\langle \gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(n)} \rangle = \langle \tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'', \dots, \tilde{\gamma}^{(n)} \rangle$ cioè rapporto tra γ tipo varietà index di parametrizzazione...

$(\gamma' \gamma'' \dots \tilde{\gamma}^{(n)} \dots) = (\gamma' \gamma'' \dots \gamma^{(n)} \dots) \begin{pmatrix} \frac{dt}{d\theta} & * & \cdots & * \\ 0 & \frac{dt}{d\theta} & * & \cdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{dt}{d\theta} \end{pmatrix}$