CURVE DIFFERENZIABILI in $\mathbb{R}^n$

PROGETTO:
- definizione
- Esempi e disegni
- (numerici: BIPERIODICHE e EQUAZIONI PRENET CURVATURE (formula Lagrange, rapp. curvature...))
- Versione funzionale: curve $\Gamma(\mathbb{R})$ modello lineare
- Esempi e controesempi:
  - nelle classi: curve alle curve equivalenti
  - classi: sfere, circle
  - Spirali:
  - calcolate
  - tratteria: :

curve parametrizzate in $\mathbb{R}^n$ (le chiamo un po' funzioni di una variabile reale a valori in $\mathbb{R}^n$)

$\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $I \subseteq \mathbb{R}$
$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$

(A ogni istante associo un punto dello spazio)

Cambiamento del parametro (ho una curva parametrizzata e voglio "ricalcolare" le cose in un altro modo)

Ci serve una funzione φ che "cambia" i tempi:

$J \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n$
$s \longmapsto \varphi(s) \longmapsto \gamma(\varphi(s)) = \tilde{\gamma}(s)$

Così φ è C^k (derivabile quanto γ), $\varphi: J \to I$ è biunivoca, $\varphi^{-1}: I \to J$ è C^k

Allora $\tilde{\gamma}: J \to \mathbb{R}^n$ è C^k (derivabile come γ) e ha la stessa immagine di γ (stessa curva, ma percorsa in modo diverso).

Inoltre φ è una funzione crescente ($\varphi' > 0$) se γ e $\tilde{\gamma}$ percorrono la curva nello stesso verso, decrescente ($\varphi' < 0$) se γ e $\tilde{\gamma}$ percorrono la curva in verso opposto.

Problema: tutte le definizioni e le proprietà per le curve dovranno essere verificate anche dopo aver cambiato parametrizzazione, non abbiamo visto ora se γ è $\gamma(s(t)) + \tilde{\gamma} = \gamma(\varphi(t))$ la derivata si comporterà:

$(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'', \tilde{\gamma}''', \ldots) = (\gamma', \gamma'', \gamma''', \ldots)$ [matrice triangolare]

e dunque si ha $\tilde{\gamma}', \ldots, \tilde{\gamma}^{(k)} = \gamma', \ldots, \gamma^{(k)}$ così anche gli spazi osculatori sono INDIPENDENTI dalla parametrizzazione!

---

definizione: curve in $\mathbb{R}^n$ = classe di equivalenza di curve parametrizzate in $\mathbb{R}^n$ rispetto la relazione di equivalenza

$\gamma \sim \tilde{\gamma} \iff \exists \varphi$ biunivoca, C^k, φ^{-1} C^k tale che $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

La classe di equivalenza di una curve è detta sostegno della curva, o anche traccia, immagine, o curva geometrica di quella classe.

definizione: una curva γ di classe C^k è **regolare** se $\gamma', \gamma'', \ldots, \gamma^{(k)}$ sono vettori l.i. in $\mathbb{R}^n$ (quindi $k \le n$ se $\gamma \in \mathbb{R}^n$).

Esempi: la retta in $\mathbb{R}^n$ è una curva C^∞, data k vettori $\gamma(0) = P$ $\quad$ P punto, v vettore costante!
$\gamma'(t) = v$
$\gamma''(t) = 0 \quad \cdots \quad \gamma^{(k)}(t) = 0$

Se γ curva k-regolare in $\mathbb{R}^n$ ed α numero:
$\gamma(\alpha) + \gamma'(\alpha)$ retta tangente in $\gamma(\alpha)$
$\gamma'(\alpha)$ tangente in $\gamma(\alpha)$

$\gamma(\alpha) + \gamma'(\alpha), \gamma''(\alpha)$ piano osculatore in $\gamma(\alpha)$
$\gamma'(\alpha), \gamma''(\alpha)$ piano vettore

$\gamma(\alpha) + \gamma'(\alpha), \ldots, \gamma^{(k)}(\alpha)$ k-1-esimo spazio osculatore in $\gamma(\alpha)$

Se in t $\gamma(t)$ non è regolare, cioè $\gamma'(t) = 0$, o detto punto singolare di γ.

Bisognerebbe vedere che la regolarità non dipende dalla parametrizzazione, ma abbiamo visto che se $\tilde{\gamma} = \gamma(\varphi(t))$ la derivata si comporterà:

$(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'', \tilde{\gamma}''', \ldots) = (\gamma', \gamma'', \gamma''', \ldots) \begin{pmatrix} \varphi' & * & * & * \\ 0 & \varphi'^2 & * & * \\ 0 & 0 & \varphi'^3 & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$

e dunque si ha $\tilde{\gamma}', \ldots, \tilde{\gamma}^{(k)} = \gamma', \ldots, \gamma^{(k)}$ così anche gli spazi osculatori sono INDIPENDENTI dalla parametrizzazione!

Esempi:

$t \longmapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \gamma(t)$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$, $\gamma''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \end{pmatrix}$

Per $t = 0$ $\quad \gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ [illegible] cuspide

$y = x^{\frac{3}{2}}$

$t \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} t^3 \\ t(t-1) \end{pmatrix}$
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix}$
$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\left|\frac{2t}{3t^2-1}\right| \cdot \left|\frac{2}{-1}\right| \to 0$ (0,0)

$\gamma(1) = \gamma(-1) = (0,0)$ tangenti diverse

$t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Cubica Sghemba.

$\gamma' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$, $\gamma'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\gamma''' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sempre 2-vel (V4), dunque è 2-regolare (ma ogni punto).

Mercoledì 2 dicembre 2025

Riassunto:

curve in $\mathbb{R}^n$ (domain qualsiasi in $\mathbb{R}$): $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$

insieme continuamente di immagini (= classi di equivalenza) (= non sono $\mathbb{R}^n$)

di classe C^k se $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)$ sono volte C^k in I

se regolare se $\gamma', \gamma'', \ldots, \gamma^{(k)}$ sono vettori l.i. in $\mathbb{R}^n$ ($m \le k = n$)

Ve: $\gamma(0) = C\gamma'(t), \ldots, \gamma^{(k)}(t)$ $\quad$ Osculatore spazio osculatore
γ diciamo spazio tangente

$(\gamma', \gamma'', \ldots \gamma^{(k)}, \ldots) = (\gamma', \gamma'', \ldots, \gamma^{(k)}, \ldots) \begin{pmatrix} \varphi' & * & * & * \\ 0 & \varphi'^2 & * & * \\ 0 & 0 & \varphi'^3 & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$

Parametro d'arco delle curve:

γ curve $\mathbb{E}^n$: $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$

Def: $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_i \gamma_i'^2} \, d\tau$

Lunghezza d'arco dalla curva da t_0 a t.

Se γ è k-regolare, allora $s: I \longmapsto s(I)$ è biiettiva tra I e $J = [0, L]$

cambiamo la parametrizzazione in cui calcolo:

$\int_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t}$ $\quad$ $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau$

derivata

$\frac{d}{dt} s(t) = \|\gamma'(t)\|$ $\quad$ $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$

Studiare: dopo le definizioni sul parametro d'arco, c'era soprattutto γ curva con $\|\gamma'\| \equiv 1$;

Vedi:
- è definita calcolare $s(t)$
- è definita inversa in $t(s)$

poiché:
per vedere come calcolare per velocemente velocità (usando $\gamma(s)$) una parametrizzazione qualsiasi.

Esempi:

- **circonferenza** (raggio R)

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\frac{t}{R}) \\ R\sin(\frac{t}{R}) \end{pmatrix}$
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{t}{R}) \\ \cos(\frac{t}{R}) \end{pmatrix}$
$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 + \cos^2} = 1$
$s \in \mathbb{R}$

$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau = \int_0^t 1 \, d\tau = \left[\tau\right]_0^t = t$

$t(s) = \frac{s}{R}$

$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) = \begin{pmatrix} R\cos(\frac{s}{R}) \\ R\sin(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$

$\tilde{\gamma}'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{s}{R}) \\ \cos(\frac{s}{R}) \end{pmatrix} \Rightarrow \|\tilde{\gamma}'\| = 1$

Osservazione: anche $\frac{1}{R}\begin{pmatrix} R\cos(\frac{s}{R}) \\ R\sin(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$ ha velocità 1, una vale e la stessa cosa!

- **ellissi:** $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t}$

$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + c \cdot} \, d\sigma$ da

è un "integrale ellittico" e non ha una primitiva elementare (cioè un insieme di funzioni elementari: tipo polinomi, exp, ...).

- **parabole:** $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{2a} \end{pmatrix}$

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2t}{2a} \end{pmatrix}$ $\quad$ $\|\gamma'(t)\|^2 = 1 + \frac{t^2}{a^2}$

$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{a^2}} \, d\sigma$ $\quad$ $2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$

$= \int \sqrt{1 + \sinh^2(\sigma)} \cosh(\sigma) \, d\sigma$ $\quad$ $d\sigma = \cosh(\sigma) \, d\sigma$

$= \int \cosh^2(\sigma) \, d\sigma$

$= \frac{1}{2}\left(\tau + \sinh(\sigma)\cosh(\sigma)\right)_0^t$

$= \frac{1}{4}\left(\sinh(2\sigma) - 2\sigma\sqrt{1+\sinh^2}\right)_0^t$

$= \frac{1}{2}\sigma\left(2\sigma + \sqrt{1+4\sigma^2}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{1+4\sigma^2}$

abbiamo scelto soprattutto un insieme di funzioni "elementari", non è detto che la derivata inversa e nemmeno $t(s)$...

Problema: guardare gli esercizi fatti prima.

FRENET: ad ogni curva associamo una "riferimento mobile"

$\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t)$ $\quad$ $k \le n$ almeno $(n-1)$-regolare $\quad$ $\left(\gamma', \gamma'', \ldots, \gamma^{(k)}, e_1(\alpha_{ij}(\gamma', \ldots, \gamma^{(k)})), \ldots, e_n(\alpha_{ij}(\gamma', \ldots, \gamma^{(k)}))\right) = V_t$ base di $\mathbb{R}^n$ dipendente dal punto t

γ curva in $\mathbb{R}^n$

V_t è "curva" in $G_{n,k}(\mathbb{R})^n$
$t \longmapsto V_t(t)$
$\mathbb{I} \longrightarrow G_{n,k}(\mathbb{R})$ molto brutta!

parametrizzando di $G_{n,k}$

$E_\gamma = (e_1(t), \ldots, e_n(t))$
base ORTONORMALE ellittica $\forall t(t)$
base di $G_{n,k}$

RIFERIMENTO (TRIEDRO ORTONORMALE) DI FRENET della curva γ.

E_γ è "curva" in $O_n(\mathbb{R})^n$:
$t \longmapsto E_\gamma(t)$
$\mathbb{I} \longrightarrow O_n(\mathbb{R})$ matrici ortogonali

---

Esempio in $\mathbb{R}^3$:

se γ è 3-regolare, $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ sono indipendenti: $\gamma', \gamma'', \gamma' \times \gamma''$ base

se γ è di parametro d'arco: γ' (normale) $\cdot$ γ'' $\quad$ $\gamma' \times \gamma''$ $\quad$ $\gamma' \times \gamma''$ (normale) $= \|\gamma' \times \gamma''\| = \|\gamma''\|$

dunque la base di Frenet è

$e_1 = \gamma'$; $e_2 = \frac{\gamma''}{\|\gamma''\|}$; $e_3 = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}$

tangenziale, normale, binormale

$e_3 = e_1 \times e_2$

se invece γ non è un parametro d'arco:

γ', γ'' indipendenti $\gamma' \times \gamma''$ base

$e_1 = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$, $e_3 = ?$

$\Rightarrow n = b \times t$

$b = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}$

Si può calcolare solo applicando una formula (vedremo poco).

Equazioni di FRENET:

Data γ 3-regolare, consideriamo E_γ riferimento di Frenet di γ,

e $E_\gamma' = E_\gamma \cdot K_\gamma$ dove $K_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix}$

la funzione $k_1(s), \ldots, k_{n-1}(s)$ si dicono CURVATURE di γ,
k_1: CURVATURA PRINCIPALE
k_2: SECONDA CURVATURA (o TORSIONE)
k_i: i-ESIMA CURVATURA
sono funzioni > 0 per $i < n-1$

Significato geometrico di k_1 e γ piano vicino all'osculatore.

dimostriamo che E_γ indotto E_γ dal sistema di Frenet è sempre vero:

$E = V \cdot T$ dove T è matrice TRIANGOLARE SUP. data procedura di Gram-Schmidt $T = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ elementi diagonali > 0.

① E ortogonale, $E'E = \mathbb{1} \Rightarrow$ $E' = E \cdot K$ con $K = -K$ (dalla prima riga)

② $E' = (VT)' = \boxed{V'}T + VT'$

$\boxed{V'} = \boxed{V(\cdot)}T + VT'$

$V\left(\begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \end{pmatrix}\right)T + VT'$

$V\left(\begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \end{pmatrix}\right)T + T'$

$E = VT$
$ET^{-1} = V$

$E\,T^{-1}\left(\begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \end{pmatrix}\right) + T'T^{-1} = E\left(\begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \end{pmatrix}\right) = Ek$

T triangolare T^{-1} triangolare

$V = (\gamma', \gamma'' \ldots \gamma^{(n)}\, \alpha)$

$V' = (\gamma', \gamma'' \ldots \gamma^{(n)}\, \alpha')$

$= (\gamma', \gamma'' \ldots \gamma^{(n)}\, \alpha) \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & * & * \end{pmatrix}$

③ grazie a ② e ③ abbiamo $K = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ * & \ddots & * \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}$

e vediamo che $K(s) > 0$ se $s < n-1$

Nota: le curve E_γ e k_i sono tutte un pelo.

se $\gamma(s)$ lunga e un pelo?

dobbiamo applicare la definizione a $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$

e controllare $E(s) = (\gamma(s), \ldots, \gamma^{(n)}(s), \alpha(s))$

$E'(s) = E(s) \cdot \Omega(s)$

(la matrice del sistema di Frenet finisce quella se γ una o più piano / abbiamo visto solo E ortogonale, $E \cdot VT$ con Triangolare...)

con $\tilde{E}(s) = E(t(s))$

$\tilde{E}'(s) = \frac{d}{ds} E(t(s)) = \frac{d}{dt} E(t) \Big|_{t(s)} \cdot \frac{dt}{ds}$

$= E'(t)\Big|_{t(s)} \cdot \frac{dt}{ds}$

$= E(t)\Big|_{t(s)} \cdot K(t)\Big|_{t(s)} \cdot \frac{dt}{ds}$

$= \tilde{E}(s) \cdot K(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}$

$K_i = \omega_i \frac{1}{\|\gamma'\|}$

$\tilde{K}(s) = \omega_i(t(s)) \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}$ (tutti calcolati su $t(s)$).

cioè $K(t) = \omega_i(t) \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$

Calcolo esplicito dei Frenet in dimensione 3 e 2:

$n = 3$: $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$

un polinomio:
ortonormalizzando dei Frenet:
$(\gamma', \gamma'', \gamma' \times \gamma'') \longrightarrow \left(t, \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \frac{b}{\|b\|}, \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}\right)$

un problema:

equazioni Frenet $(t \; n \; b)' = (t \; n \; b) \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$

cioè $\begin{cases} t' = kn \\ n' = -kt + \tau b \\ b' = -\tau n \end{cases}$ $\quad$ k = curvatura
τ = torsione

$k = \|t'\| = \|\gamma''\|$

$\tau = -b' \cdot n$ $\quad$ $n \cdot b = 0$
$= b \cdot n'$ $\quad$ $n' \cdot b + n \cdot b' = 0$
$= \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma''\|} \cdot \left(\frac{\gamma''}{\|\gamma''\|}\right)'$
$= \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma''\|} \cdot \left(\frac{\gamma'''}{\|\gamma''\|} + \gamma'' \cancel{\left(\frac{1}{\|\gamma''\|}\right)'}\right)$
$= \frac{\gamma' \times \gamma'' \cdot \gamma'''}{\|\gamma''\|^2} = \frac{|\gamma' \; \gamma'' \; \gamma'''|}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}$

Giovedì 4 dicembre 2025