CURVE PARALLELE :

date due curve $\gamma(t)$ e $\delta(t)$ con stesso parametro (diciamo che sono "in corrispondenza") si dicono PARALLELE se $\forall t : n_\gamma(t) = n_\delta(t)$ ①
$\Leftrightarrow \|\gamma(t) - \delta(t)\|$ è costante

e quindi vale se $\forall t : n_\gamma(t) /\!/ (\gamma(t) - \delta(t))$ ②
(vale se nel piano, vuol dir dimensione)

② $\Rightarrow$ ① Sempre vero :

$$\delta(t) = \gamma(t) + \lambda(t)\, n_\gamma(t) \qquad \delta(t) - \gamma(t) \in \langle n_\gamma(t) \rangle$$

$$\delta' = \gamma' + \lambda' n_\gamma + \lambda n_\gamma'$$
$$n_\gamma \perp \; \underbrace{= \gamma' + \lambda' n_\gamma}_{\perp n_\gamma} + \lambda(-\kappa_\gamma \tfrac{\gamma'}{\|\gamma'\|} + \tau_\gamma \tfrac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \wedge \tfrac{\gamma'}{\|\gamma'\|})$$
$$\perp \tau_\gamma$$

$$\lambda' = 0, \quad \lambda = \text{costante}$$

$$\delta(t) - \gamma(t) = \lambda\, n_\gamma(t)$$
$$\|\delta(t) - \gamma(t)\| = \lambda \text{ costante.}$$

Nel piano vale anche ③ $\Rightarrow$ ② (① equivale ③) :

$\|\delta(t) - \gamma(t)\|$ costante
$(\delta' - \gamma') \cdot (\delta - \gamma) = 0$
$\Rightarrow$ nel piano hanno vettori $\perp n_\gamma$ ed hanno sempre $\delta - \gamma /\!/ n_\gamma$.

Caso del piano :

Per ogni γ otteniamo che $\delta : = \gamma + \lambda n$
con λ costante è curva parallela a γ :

$$\delta' = \gamma' + \lambda n' = t + \lambda(-\kappa t) = (1 - \lambda\kappa)t$$
$$\|\delta'\| = |1 - \lambda\kappa|$$

$$\delta'' = -\lambda\kappa' t + (1 - \lambda\kappa)t' = -\lambda\kappa' t + \kappa(1 - \lambda\kappa) n$$

$$\kappa_\delta = \frac{|\delta' \; \delta''|}{\|\delta'\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda\kappa & -\lambda\kappa' \\ 0 & \kappa(1-\lambda\kappa) \end{vmatrix}}{|1-\lambda\kappa|^3} = \frac{\kappa}{|1-\lambda\kappa|} .$$

Caso dello spazio :

Cerchiamo condizioni affinché la curva

$$\delta = \gamma + \lambda n \quad \text{con } \lambda \text{ costante}$$

abbia $n_\delta = n(= n_\gamma)$: $\qquad (t, n, b) = (t, n, b) \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$\delta' = \gamma' + \lambda n' = t + \lambda(-\kappa t + \tau b)$$
$$= (1 - \lambda\kappa) t + \lambda\tau b \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda\kappa \\ 0 \\ \lambda\tau \end{pmatrix}$$

$$\delta'' = (1-\lambda\kappa)' t + (1-\lambda\kappa) t' + \lambda\tau' b + \lambda\tau b'$$
$$= -\lambda\kappa' t + (1-\lambda\kappa)(\kappa n) + \lambda\tau' b + \lambda\tau(-\tau n)$$
$$= -\lambda\kappa' t + ((1-\lambda\kappa)\kappa - \lambda\tau^2) n + \lambda\tau' b$$
$$= -\lambda\kappa' t + \left(1 - \lambda(\kappa^2 + \tau^2)\right) n + \lambda\tau' b \quad \begin{pmatrix} -\lambda\kappa' \\ 1-\lambda(\kappa^2+\tau^2) \\ \lambda\tau' \end{pmatrix}$$

Perché $n_\delta /\!/ n$ bisogna : $\delta' /\!/ (\delta'' - \text{proiezione su } n)$

Se $\begin{vmatrix} 1-\lambda\kappa & -\lambda\kappa' \\ \lambda\tau & \lambda\tau' \end{vmatrix} = 0$

Se $(1-\lambda\kappa)\lambda\tau' + \lambda^2\kappa\tau' = 0$
$\lambda\tau' - \lambda^2\kappa\tau' + \lambda^2\kappa\tau' = 0$

$$\frac{\tau'}{\tau^2} = \lambda\left(\frac{1}{\tau} - \frac{\kappa'}{\tau^2}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{\tau}\right)' = -\lambda\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'$$
$$\frac{1}{\tau} + c = \lambda\frac{\kappa}{\tau}$$
$$1 + c\tau = \lambda\kappa$$

esistono costanti λ, c tali che $\lambda\kappa - c\tau = 1$

Curve di BERTRAND,
ad è equivalente alla condizione e dei precedenti

Lunedì 22 dicembre 2025

CURVE DI BERTRAND in $\mathbb{R}^3$

γ (tipo vaso in più) con $\kappa\tau \neq 0$ è di Bertrand se :

- $\exists\, \overline{\gamma}$: $\gamma(t) \sqrt{\gamma}\overline{\gamma}(t) \;/\!/\; n = \overline{n}$ (normali concordi)

se $\exists$ costante : $\overline{\gamma} = \gamma + r\overline{n}$ allora vanno in $n = \overline{n}$

se $\exists$ costanti α, c : $\tau\kappa + c\tau = 1$

(tale $\overline{\gamma}$ è unica se γ non è elica !)

(1) $\overline{\gamma}(t) = \gamma(t) + \kappa(t) \cdot n(t)$

$\overline{\gamma}' = \gamma' + r'n + r n'$
$= t + r(-\kappa t + \tau b)$
$= (1 - r\kappa) t + r\tau b$

$\overline{\gamma}' \perp \overline{\gamma}'' \perp n$
$\Leftrightarrow \overline{\gamma}' \cdot n = 0$
$\Leftrightarrow \overline{\gamma}' \times \overline{\gamma}'' \cdot n = 0$
$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \overline{\gamma}' \\ \overline{\gamma}'' \\ n \end{vmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-r\kappa & -r\kappa' & 0 \\ 0 & \times & 1 \\ r\tau & r\tau' & 0 \end{vmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow (1-r\kappa)r\tau' + r^2\kappa'\tau = 0$
$(1-r\kappa)r\tau' + r\kappa' r\tau = 0$
$\Leftrightarrow \frac{r'}{r} = \frac{r\kappa'}{r\kappa - 1}$
$\ln|r| = \frac{1}{\alpha}\ln|r\kappa - 1| + c$
$\alpha \ln|r| = \ln|r\kappa - 1| + \alpha c$
$r^\alpha = e^{\alpha c}(r\kappa - 1)$
$r^\alpha + c\tau = r\kappa - 1$

$\overline{\gamma}' /\!/ \overline{\gamma}' \perp n$
$\overline{\gamma} \leq \overline{\gamma}' \times \overline{\gamma}'' \perp n$

$\overline{\gamma}' = \gamma' + r'n + r n'$
$= t + r(-\kappa t + \tau b)$
$= (1 - r\kappa) t + r\tau b$
$= -r\kappa' t + (1-r\kappa) t' + r'\tau b + r\tau' b$
$= -r\kappa' t + (1-r\kappa)\kappa n + r'\tau b - r\tau^2 n$
$= -r\kappa' t + (1-r\kappa)\kappa n + r'\tau b - r\tau^2 n$

(2) angolo tra t e $\overline{t}$ (per γ e $\overline{\gamma}$)
è costante :

$$\frac{d}{ds}(t \cdot \overline{t}) = \underbrace{t'}_{\kappa n} \cdot \overline{t} + t \cdot \frac{d\,(\overline{t})}{ds} = 0 + 0 = 0$$
$$\frac{d\overline{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\overline{s}} = \overline{\kappa}\,\overline{n}$$

$t \cdot \overline{t} =$ costante
= coseno angolo tra t e $\overline{t} = \frac{t \cdot \overline{t}}{\|t\| \cdot \|\overline{t}\|}$

(3) $\cos\vartheta(t,\overline{t}) = \frac{\overline{\gamma}' \cdot \overline{\gamma}'}{\|\overline{\gamma}'\| \cdot \|\overline{\gamma}'\|} = \frac{t \cdot (\overline{(1-r\kappa)t + r\tau b})}{1 \cdot \sqrt{(1-r\kappa)^2 + (r\tau)^2}}$
$= \frac{1 - r\kappa}{\sqrt{(1-r\kappa)^2 + (r\tau)^2}}$
$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r\tau}{1-r\kappa}\right)^2}}$

è costante se $\frac{r\tau}{1-r\kappa}$ costante

$1 - r\kappa = c\tau$
$1 = r\kappa + c\tau$

e viceversa : se γ è curva in $\mathbb{R}^3$ con $\kappa\tau \neq 0$ tale che $\exists$ costanti α, c con $r\kappa + c\tau = 1$ allora è Bertrand con $\overline{\gamma}$ curva sopra.

Si può fare con le TFC e i punti @@@.

oppure direttamente :

usiamo $\overline{\gamma} = \gamma + \kappa n$ (dove κ è la costante in $r\kappa + c\tau = 1$)
e verifichiamo che prendendo $\overline{n} = n$:

$\overline{\gamma}' = \gamma' + r'n$
$= t + r(-\kappa t + \tau b)$
$= (1 - r\kappa) t + r\tau b$
$= c\tau t + r\tau b$
$= \tau(c t + r b)$

$\overline{\gamma}'' = \tau'(c t + r b) + \tau(c t' + r b')$
$= \tau'(\underbrace{c t + r b}_{\overline{n}\cdot\overline{\kappa}}) + \tau(c\kappa - r\tau) n$

chi è $\overline{n}$?
applicando GS a $\overline{\gamma}', \overline{\gamma}''$ si trova $\overline{n} = n$,
dunque γ è di Bertrand.

Osservazione : $\quad r\kappa + c\tau = 1 \quad r, c \in \mathbb{R}$

$(r\kappa + c\tau = 0 \equiv \text{elica})$

che relazioni ci sono tra curve di Bertrand, e curve che hanno CURVATURA costante e TORSIONE costante ?

Cercare questo tipo di curve tra le eliche della curva tipo circle unitario.

Problema : costruire oggetti curve di cui sono note le proprietà (note) oppure la curva è (nota) :

Data una famiglia $P(a) \to \mathcal{C}(t(a))$ di rette dipendenti da un parametro t in modo differenziabile, trovare la curva che hanno quelle rette tangenti (inviluppo).

Ci portiamo nel piano e diciamo, si fa nel PIANO : usare due direzioni uniche :

e ci si aspetta che siano curve fisiologiche di curve parallele.

Nel piano :

Utilizziamo le rette parametrizzate così :

$P + r\sigma \quad P + a\omega = q + \beta\omega \quad \beta = \frac{(P-q)\cdot\omega^\perp}{\ell\,\omega}$
$q + s\omega$
$P \in R(a)$
$\sigma, \omega \in \mathbb{R}^2$

$\|P - q + s\omega \;\; \omega\| = 0 \quad (\det 2\times 2)$
$|P - q \;\; \omega| + s|\sigma\;\omega| = 0$
$s = -\frac{|P-q \;\; \omega|}{|\sigma\;\omega|}$

punto di γ è $P + s\sigma = P - \frac{|P-q\;\;\omega|}{|\sigma\;\omega|}\sigma$

specifichiamo e $P = P(t) \quad \sigma = \sigma(t)$
$\in R_t = R(t+\varepsilon) \quad \omega = \sigma(t+\varepsilon)$
e facciamo $\lim_{\varepsilon\to 0}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left| \frac{P(t+\varepsilon) - P(t)}{\varepsilon} \;\; \sigma(t+\varepsilon) \right| \Big/ \left| \sigma(t+\varepsilon) \;\; \frac{\sigma(t+\varepsilon) - \sigma(t)}{\varepsilon} \right|$$
$$= \frac{|P'(t) \;\; \sigma(t)|}{|\sigma'(t) \;\; \sigma(t)|}$$

dunque $\gamma(t) = P(t) + \frac{|P'(t) \;\; \sigma(t)|}{|\sigma'(t) \;\; \sigma(t)|}\cdot\sigma(t)$

Nello spazio : Supponiamo $\pi(t) \in \pi(t+\varepsilon)$ ripetendo per il piano,

e otteniamo i punti $\gamma(t)$ di tangenza come e dati dai punti di massima distanza tra $\pi(t)$ e $\pi(t+\varepsilon)$:

dato $P + r\sigma$ in $\mathbb{R}^3$
$q + s\omega$
i punti di massima distanza danno : $P + r\sigma = q + s\omega$

con $(P + r\sigma) - (q + s\omega) \perp \sigma, \omega$
troviamo α, β :

$$\alpha, \beta = \begin{vmatrix} (P-q)\cdot\sigma & -\sigma\cdot\omega \\ (P-q)\cdot\omega & -\omega\cdot\omega \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \sigma\cdot\sigma & -\sigma\cdot\omega \\ \sigma\cdot\omega & -\omega\cdot\omega \end{vmatrix}$$

poi usiamo $P = P(t+\varepsilon) = P_\varepsilon \quad \sigma = \sigma(t+\varepsilon) = \sigma_\varepsilon$
$Q = P(t) = P \qquad \omega = \omega(t) = \omega$

e ci si trova $\gamma(t) = P(t) - \begin{vmatrix} P'(t)\cdot\sigma(t) & \sigma'(t)\cdot\sigma(t) \\ P'(t)\cdot\omega(t) & \sigma'(t)\cdot\omega(t) \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \sigma'(t)\cdot\sigma(t) & \sigma'(t)\cdot\sigma(t) \\ \sigma'(t)\cdot\omega(t) & \sigma'(t)\cdot\omega(t) \end{vmatrix} \cdot \sigma(t)$

Problema : CURVE DA TRAIETTORIA

Data la traiettoria descritta da un punto mobile sottoposta ad una forza, trovare la funzione che descrive la legge oraria posizione

dati : $\begin{cases} P_0 = \text{posizione iniziale} = \text{distanza da origine} \\ \beta_0 = \text{angolo del vettore velocità} \\ \alpha = \text{angolo della forza centrale} \\ \beta = \text{incognita, vedere quale posizione.} \end{cases}$

abbiamo : $\begin{cases} \alpha' - \beta' = \varepsilon\left(\frac{1}{r}\cos\vartheta + n\sin\vartheta\right) \\ \beta' /\!/ \left(\frac{1}{r}\cos\vartheta + n\sin\vartheta\right) \end{cases}$

calcoliamo $\alpha' - \beta'$

$\vdots$

si trova una equazione differenziale per ϑ,

$$\vartheta' = -\kappa - \frac{\|\alpha\|}{\varepsilon}\sin\vartheta$$

si trova poi $\beta = \alpha - \varepsilon\left(\frac{1}{r}\cos\beta - n\sin\vartheta\right) \ldots$

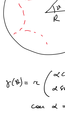
Problema : cicloidi

epicicloidi :

$$\gamma(\vartheta) = r\begin{pmatrix} \alpha\cos(\vartheta) - \cos(\alpha\vartheta) \\ \alpha\sin(\vartheta) - \sin(\alpha\vartheta) \end{pmatrix}$$
dove $\alpha = \frac{R+r}{r}$

γ'
γ''
κ
s
relazione tra κ e s
e dove cambia/annulla curvatura
ipo: epicicloidi :

ipocicloidi :



$$\gamma(\vartheta) = r\begin{pmatrix} \alpha\cos\vartheta + \cos(\alpha\vartheta) \\ \alpha\sin\vartheta - \sin(\alpha\vartheta) \end{pmatrix}$$
con $\alpha = \frac{R-r}{r}$

idem .

relazione tra : $k^2 \quad \frac{1}{s^2} \quad$ costante

---

venerdì 23 dicembre 2025