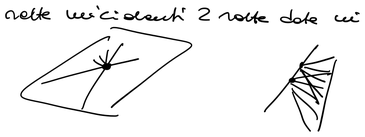
Problemi sulla Grassmanniana delle rette:

① C cono $\subseteq \mathbb{P}^3$: rette contenute nel cono?
(immagine di queste rette in $G \subseteq \mathbb{P}^5$?

② π, σ piani $\subseteq \mathbb{P}^3$: rette $\subseteq \pi \cup \sigma$
(immagine nella $G \subseteq \mathbb{P}^5$?

③ rette incidenti 2 rette date in $\mathbb{P}^3$?



non di un piano

④ date 3 rette: rette incidenti almeno 2 ?

⑤ problemi duali?

⑥ $r = P \vee Q$: coord plü $(p_{ij}) = \text{minori}(PQ)$
$(x_i) \vee (y_j)$ $= \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}$

se $r = \pi \wedge \sigma$: trovare le coord'nate plü di r
$\| \quad \| (b_0 b_1 b_2 b_3)$ nei termini di π e σ
$(a_0 a_1 a_2 a_3)$

⑦ date coord plü (p_{ij}) di r retta di $\mathbb{P}^3$
e coord $P = (x_i)$ di punto di $\mathbb{P}^3$, $\notin r$,
trovare il piano $P \vee r$

- date le coord. plücke di r,
trovare tutti i piani che $\supseteq r$.

piani di r hanno coord $a \in \ker \underbrace{(\quad)}_{B}$

⑦* date coord. plü di r retta di $\mathbb{P}^3$
e equazione di piano π di $\mathbb{P}^3$ che $\not\supseteq r$,
trovare $\pi \wedge r$

- * date le coordinate plüc di r,
trovare i punti contenuti in r

punti di r hanno coord $X \in \ker \underbrace{(\quad)}_{A}$

$AB = 0 = BA$
$\ker A = \text{im } B$
$\ker B = \text{im } A$

Geometrie Euclidea / Ellittica / Iperbolica :

- studiare i "cerchi" come famiglia di coniche
- studiare e'n di cerchi
- capire "quanti cerchi" passano per 1 punto fissato / 2 punti fissati / 3 punti fissati

cerchio centro C raggio ρ $\quad \Omega(X,C)^2 = \rho^2 \Omega(C)\Omega(X)$
D σ $\quad \Omega(X,D)^2 = \sigma^2 \Omega(D)\Omega(X)$

vedere i casi $C = D$ (stesso centro)
$\rho = \sigma$ (stesso raggio)

$\Omega(X,C)^2 = \rho^2 \Omega(C)\Omega(X)$

$\begin{cases} \Omega(P,C)^2 = \rho^2 \Omega(C)\Omega(P) & P \text{ fissato} \\ \Omega(Q,C)^2 = \rho^2 \Omega(C)\Omega(Q) & Q \text{ fissato} \end{cases}$

cosa si può dire dal centro di questi cerchi?

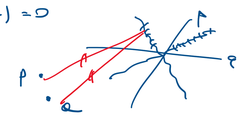
$\dfrac{\Omega(P,C)^2}{\Omega(Q,C)^2} = \dfrac{\Omega(P)}{\Omega(Q)}$

$\Omega(P,C)^2\Omega(Q) - \Omega(Q,C)^2\Omega(P) = 0$

$(\Omega(P,C)\sqrt{\Omega Q} + \Omega(Q,C)\sqrt{\Omega P})(\quad - \quad) = 0$

C appartiene a retta spuria a retta

$\Omega(P,-1) = 0$



⑥ $r = \pi \wedge \sigma$ $\quad \pi : (a_0 a_1 a_2 a_3)$
retta in $\mathbb{P}^3$ $\quad \sigma : (b_0 b_1 b_2 b_3)$

coord. plücke di r:
troviamo due punti di r e poi calcoliamo i minori:

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ a_3 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{23} \\ -p_{13} \\ p_{12} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ -p_{02} \\ p_{01} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$p_{ij} = \text{minori}(PQ) = \text{minori}\begin{pmatrix} 0 & p_{12} \\ p_{23} & -p_{02} \\ -p_{13} & p_{01} \\ p_{12} & 0 \end{pmatrix}$

$\| \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{02} \\ p_{03} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{23} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -p_{12}p_{23} \\ p_{12}p_{13} \\ -p_{12}p_{12} \\ p_{23}p_{01} - p_{02}p_{13} \\ p_{02}p_{12} \\ -p_{01}p_{12} \end{pmatrix} = -p_{03}p_{12}$

$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$

$= -p_{12} \begin{pmatrix} p_{23} \\ -p_{13} \\ p_{12} \\ p_{03} \\ -p_{02} \\ p_{01} \end{pmatrix}$

dunque le coord plücke di r usando le equazioni $(a_0 a_1 a_2 a_3)$ $(b_0 b_1 b_2 b_3)$ di due piani che $\supseteq r$ sono

$$\begin{pmatrix} p_{23} \\ -p_{13} \\ p_{12} \\ p_{03} \\ -p_{02} \\ p_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & -1 & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{02} \\ p_{03} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{23} \end{pmatrix}$$

con $p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}$

- se (p_{ij}) coord plücke di r,
come trovo i punti di r?

$X \in r = P \vee Q$ sse
$\text{rg}(X\,P\,Q) = 2$ sse
minori $\begin{pmatrix} x_0 & p & q \\ x_1 & & \\ x_2 & & \\ x_3 & & \end{pmatrix}$ sono nulli sse

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0 \\ (-)\begin{vmatrix} x_0 & p_0 & q_0 \\ x_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_0 & p_0 & q_0 \\ x_1 & p_1 & q_1 \\ x_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix} = 0 \\ (-)\begin{vmatrix} x_0 & p_0 & q_0 \\ x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 p_{23} - x_2 p_{13} + x_3 p_{12} = 0 \\ \ominus\ x_0 p_{23} - x_2 p_{03} + x_3 p_{02} = 0 \\ x_0 p_{13} - x_1 p_{03} + x_3 p_{01} = 0 \\ \ominus\ x_0 p_{12} - x_1 p_{02} + x_2 p_{01} = 0 \end{cases}$$

sse $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ soddisfa il sistema $\begin{pmatrix} 0 & p_{23} & -p_{13} & p_{12} \\ -p_{23} & 0 & +p_{03} & -p_{02} \\ p_{13} & -p_{03} & 0 & p_{01} \\ -p_{12} & +p_{02} & -p_{01} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

che è una matrice antisimmetrica,
di rango non massimo (dat = ep. q. plü),
dunque ha rango 2:
il nucleo è formato dai vettori dei punti di r.

$\text{punti di } r = \ker \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \equiv A$

- se (p_{ij}) sono coord plücke di r,
trovare le equazioni dei piani che $\supseteq r$:

$r = \pi \wedge \sigma$ dove $\pi = (a_0 a_1 a_2 a_3)$
$\sigma = (b_0 b_1 b_2 b_3)$

un piano $\tau = (\xi_0 \xi_1 \xi_2 \xi_3)$ contiene r
sse

$$\text{rg}\begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{23} & -p_{13} & p_{12} \\ & 0 & p_{03} & -p_{02} \\ & & 0 & p_{01} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\| \mu$

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ & 0 & p_{12} & p_{13} \\ & & 0 & p_{23} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

dunque $\text{piani di } r \in \ker \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \equiv B$

$\begin{cases} AB = 0 \\ BA = 0 \end{cases}$

$\text{punti di } r = \ker A = \text{im } B$
$\text{piani di } r = \ker B = \text{im } A$

= lunedì 12 gennaio 2026 =