Riassunto:

① Mancavano:
- $\mathcal{O}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ aperti:
  - chiusi x intersezioni finite ($\forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_x$ finita, $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{O}_x$)
  - chiusi x unioni ($\forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_x$, $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{O}_x$)

  ordina tra topologie

  Base:
  Prebase

- $\mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ chiusi:
  complementari di aperti

② Aperti di "vicinanza" presi $x \to$ insiemi
Aperti di intersezione di $(x, \mathcal{O}_x)$

$\subseteq$: $\mathcal{V}(x) \to \mathcal{P}(x)$ — $\mathcal{V}(x) \to \mathcal{P}(x)$
$S \mapsto S^\circ$ — $\subseteq \mapsto \Sigma$

- puntuale
- E/A
- caratt con $\mathcal{N}$ finite

① Idea globale — induzione — ② Idempotenza — caratt con $\mathcal{N}$ finite

③ Se ogni punto ammette una base
"l'esistenza implica la topologia"
e ci consente di definire la nozione di chiusura su qualsiasi spazio topologico.

Stia per insiemi base per ci avrà le stesse proprietà di prima ma invertendo $\subseteq$ e $\supseteq$

Def: $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una topologia su X se:
- $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- $\mathcal{O}$ è chiusa per unioni arbitrarie: $\forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$, $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{O}$
- $\mathcal{O}$ è chiusa per intersezioni finite: $\forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}$ finita, $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{O}$

Def: $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una topologia chiusa su X se:
- $\emptyset, X \in \mathcal{C}$
- $\mathcal{C}$ è chiusa per unioni finite: $\forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$ finita, $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$
- $\mathcal{C}$ è chiusa per intersezioni arbitrarie: $\forall \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$, $\bigcap \mathcal{C} \in \mathcal{C}$

Definizione: X insieme qualsiasi,

un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è un FILTRO (su X) se:
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- $X \in \mathcal{F}$
- chiuso per $\cap$ finite: $(S, T \in \mathcal{F} \Rightarrow S \cap T \in \mathcal{F})$
- chiuso per AVANZAMENTI: $(S \in \mathcal{F}, T \subseteq X \Rightarrow T \in \mathcal{F})$
  $(\Rightarrow X \in \mathcal{F})$

d'ultimo: $\mathcal{F}$ è un filtro su X
è qualcosa per cui richiedere vicinanza,
è chiuso per un numero finito:
- se $\exists$ qualcosa di più forte con cui ci va,
- allora $\bigcap_{\text{FIN}} \exists$ è un ragno

$\{X\}$ è sempre il più possibile
$\mathcal{P}(X)$ non è MAI un filtro! Perché $\emptyset$?

"Stabile" vuol intuitivo perché il "più" generale
in un universo qualsiasi perché è possibile che
tutti vicinanza vale in contesto in cui non è vero!

Def: $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è un ULTRAFILTRO se è un filtro massimale rispetto all'inclusione.

Osservazione: $\forall x \in X$ abbiamo $\mathcal{F}_x = \{U \subseteq X : x \in U\}$ è FILTRO
ed è un ULTRAFILTRO,
le rappresentano in 3d una qualsiasi
altra definizione di X (da una conclusione)
in $\forall$, allora un filtro che contenga
$\mathcal{F}_x \cup \{\emptyset\}$ contraddice $(\star)$ $\forall \mathcal{F}$ massimale.

Questi sono gli ULTRAFILTRI PRINCIPALI
(quelli attorno a $x \in X$).

Problema: esistono ULTRAFILTRI non principali?

TEOREMA: Se X non è finito,
esistono ULTRAFILTRI non principali:
(equivalente al lemma del Tutto,
all'assioma della scelta)

Eq lemma: $\exists \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ filtro su X è ULTRAFILTRO
SSE
$\forall S \subseteq X$ o ha $S \in \mathcal{U}$ oppure $X \setminus S \in \mathcal{U}$

(⇐) ovvio: $\exists \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}$ con $\forall \mathcal{U}$ ⇒ $\exists \mathcal{F} \supsetneq \mathcal{U}$ filtro
$(X \setminus U \in \mathcal{U})$
(Sarebbe $\exists U \in \mathcal{U}$ tale che $U \cap (X \setminus U) = \emptyset$,
non abbiamo posto che $\emptyset \notin \mathcal{F}$.)

(⇒) supponiamo $S \subseteq X$ sia tale che $S \notin \mathcal{U}$
$X \setminus S \notin \mathcal{U}$

$\{Y : Y \supseteq S\} = \mathcal{F}$ si mette con: $\exists^* G \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ problema finito!) $\exists^* G \in \mathcal{U}$ ($X \setminus S \in \mathcal{U}$)
$\forall^* \notin \mathcal{U}$

provare $\exists$ non mi interessa.

Esempio: $X = \mathbb{N}$
Vogliamo costruire ultrafiltro $\mathcal{U}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{n\} \notin \mathcal{U}$
(ma $\mathcal{U}$ è infinito)
Ogni $\mathcal{U}$ ha un ultrafiltro: poi vedremo
ma non è un filtro principale
(quindi non è un filtro principale,
in cui formato tutti insieme ha)

Se $\mathcal{U}$ è principale $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\{n\} \in \mathcal{U}$
$\forall A \in \mathcal{U}$, $n \in A$
$\forall A \in \mathcal{U}$, $\{n\} \subseteq A$
$\{n\} \in \mathcal{U}$
Se $\mathcal{U}$ è principale $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\{n\} \in \mathcal{U}$
$\forall A \in \mathcal{U}$, $n \in A$
$\forall A \in \mathcal{U}$, $\{n\} \subseteq A$
$\{n\} \in \mathcal{U}$