Riassunto

Superficie X (immersa in $\mathbb{R}^3$) $\leadsto$ un particolare di $\mathbb{R}^3$ con un'attenzione su quel singolo $\mathbb{R}^3$ cioè $\forall$ punto P di X esiste una piastra $U \ni P$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $U \cap X$ è una mappa 2D.

$\varphi : U \longrightarrow X$ (una parametrizzazione locale)

$\varphi(u,v) = \varphi(u,v)$

$(u,v) \longmapsto \varphi(u,v)$

$\forall P \in X \cap U \longrightarrow \exists!$ u,v t.c. $P = \varphi(u,v)$ (coordinate locali)

$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (una parametrizzazione globale)

per le sup. abbiamo definizioni locali, basiamoci:

① prodotto scalare / norma

② angolo di curvatura: $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}$ $\quad \Gamma(\infty) \in \mathbb{R}^3$

③ area di superficie: $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \Sigma(\infty) \in \mathbb{R}$

Per varie superficie X definiamo lo spazio (piano) tg nel singolo punto:

$P \longmapsto T_P(X) = \{\text{spazio vettoriale di dim 2} \mid \{\gamma(0) : \gamma \text{ curva } \subset X\}, \gamma(0) = P\}$

$= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$

$X \longrightarrow T(X) = \bigsqcup_{P \in X} T_P(X)$

$= \{(P, v) : P \in X, v \in T_P X\}$

calcolo delle sup tangenti:

① in (0,0)

② in (1,1)

③ in (1,0)

Funzioni tra superficie (differenziabili):

$F : X \longrightarrow Y$ mappa continua tra una compatibilità con gli atlanti

$\forall P \in X$: $\begin{array}{ccc} \varphi & X & \longrightarrow Y & \psi \\ & \cup & & \cup \\ & \Gamma & \longrightarrow & \Gamma' \\ & \cup & & \cup \\ & \varphi^{-1}(\Gamma) & \longrightarrow & \psi^{-1}(\Gamma') \end{array}$

$\psi \circ F \circ \varphi$ è differenziabile

$\Rightarrow \psi \circ F \circ \varphi : \varphi^{-1}(\Gamma) \longrightarrow \psi(\Gamma')$

$dF : X \longrightarrow E(T_X T)$

$E \longrightarrow dF_P : T_P X \longrightarrow T_{F(P)} Y$ differenziale

$(v, \mathbb{R}^3 \to X) \longrightarrow dF_P(v) = (F \circ \varphi)'(0)$

$(P, v) \longmapsto (F(P), dF_P(v))$

Scopo del appl.: capire come "fare calcolo" su una superficie che "vive nello spazio".

X superficie.

$\varphi : U \longrightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzazione.

$(u,v) \longmapsto \varphi(u,v)$

$(u_0, v_0) \longmapsto \varphi(u_0, v_0)$

$\forall P \in X$: $T_P X$ spazio vettoriale generato da $\varphi_u, \varphi_v \in \mathbb{R}^3$

$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ (calcolati in P).

Definizione della prima forma fondamentale di X:

$\forall P \in X$ è una forma quadratica (bilineare simmetrica) sullo spazio tangente $T_P X$.

$I : P \longmapsto I_P : T_P X \times T_P X \longrightarrow \mathbb{R}$

$I_P(v,w) = v \cdot w$ (prodotto scalare nel $\mathbb{R}^3$).

$I \in$ è quindi simmetrica, quindi trovo un $\mathbb{R}^3$ che è invece tangente delle superficie.

I_P è la restrizione del p.s. $\mathbb{R}^3$ al piano $T_P X$.

Osservazione: $\forall P$ I_P è definita positiva (anche $\mathbb{R}^3$ dice proprietà fondamentale).

Dato spazio tangente $T_P X$ abbiamo una base φ_u, φ_v data dalla parametrizzazione φ, e un modo per la matrice del prodotto di I_P è dato da:

$G_I = \begin{pmatrix} I(\varphi_u, \varphi_u) & I(\varphi_u, \varphi_v) \\ I(\varphi_v, \varphi_u) & I(\varphi_v, \varphi_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix}$

ovviamente è simmetrica $\det G > 0$: $\varphi_u \cdot \varphi_u + \varphi_v \varphi_v^2$

$\det G = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - (\varphi_u \cdot \varphi_v)^2 > 0$ per CS.

$= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \varphi_u & \varphi_v \end{pmatrix}$ (spesso)

Idea fondamentale: la I ci dice gli strumenti di misura dell'intrinseco, ma che la misura dipende dalla superficie.

Ad ogni curva γ $\exists$ γ $\exists$ γ $\exists$