Problema: $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ omeomorfismo. $S \circ S = S$.
VVKS: $\begin{cases} S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \sigma(x,y) \end{cases}$
$T_p S : T_p S \to T_p S$
$\mathcal{F}_p : T_p S \times T_p S \to \mathbb{R}$
$(v,w) \mapsto \mathcal{F}_p(v,w) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$
Studiamo il caso in cui la $\mathcal{F}_p$ è simmetrica.

GRADO WEINGARTEN e SECONDA FORMA FONDAMENTALE (costruzione sulla S)

Per $S \subseteq \mathbb{R}^3$ piano tangente "orientato" (dato) localmente $\mathbb{R}^3$ che descrive S, una volta fissato vanno visto da un lato e da l'altro.

Abbiamo considerato n in $\mathbb{R}^3$ e abbiamo ortogonale a $T_p S$: ciò dipendeva da una scelta n_p e $-n_p$.

Ora: considero n in $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $T_p S$ e considero una scelta n_p e $-n_p$.

$$n_p = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$$

Dove in p tutte le scelte significano "normale locale" e più tardi parlerò di una scelta su "campo normale".

Definizione: una definizione di S è detta ORIENTABILE se si possiede un campo n di versori normali, cioè una funzione

$$n : S \to \mathbb{R}^3$$
$$p \mapsto n_p \in T_p S$$

Osservazione: localmente su S (su una carta) si sempre possibile scegliere $n_p = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$.

Non vuol dire si può usare per trovare buone fatte su tutta da cui un campo n sarà continua.

Nota: Non funziona usando il differenziale parziale: se abbiamo una sfera con la seguente figura:

$\mathbb{R}^2 \supseteq U \xrightarrow{\sigma} V \subseteq \mathbb{R}^3$

$\sigma(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v)}{\|\sigma_u(u,v)\|}$

$|\sigma_u| > 0$

(in ogni carta con coordinate $\sigma(u,v)$ definisco n in "tutto il punto" di una carta, ma non è detto che n sia continua: σ_u non dipende dal punto in cui $\sigma_u \neq 0$)

Se S sup orientabile, decidendo FISSA di dare un campo normale n su S:

$$S : S \to \mathbb{R}^3$$
$$p \mapsto n_p$$

(nel disegno del cono nulla cambiato equivalentemente con $n_p = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$)

Ora in ogni punto p di S ho una "direzione" e "dentro" e "fuori" di S.

Problema: come cambia la normale al variare di p? Dalla conoscenza di S:

S = piano $\quad S$ = cilindro $\quad S$ = $\mathbb{R}^2$

S = cilindro $\quad S$ = una calotta

S = sfera

obiettivo Gauss:

$$K(p) : \lim_{C \to p} \frac{\text{Area}(S(B(p,C)))}{\text{Area}(B(p,C))} = \lim_{C \to 0} \frac{\text{Area}(S(C))}{\text{Area}(C)} \begin{cases} 0 & \text{piano} \\ 0 & \text{cilindro, cono} \\ \frac{1}{R^2} & \text{per sfera raggio } R \end{cases}$$

Problema di Gauss: come cambia la normale al variare di p dalla conoscenza di S?

Problema: non tutte le superfici sono orientabili!

Esempi: foglio, Stella, quadrilatero sono orientabili.

Esempi non orientabili: nastro di Möbius, sfera dei Klein, piano proiettivo reale.

$(x, y) \sim (-x, -y)$

Il cilindro contiene al suo interno un nastro di Möbius: prendo una di orientamento $\mathcal{F}_{\text{Cilindro}}$ (che $\mathcal{F}_p$) si trova alla stessa punto sopra la linea $\mathcal{F}_p$ (orientamento opposto).

(in realtà: di "normale" sul cilindro dunque può cambiare di orientare nella stessa punto non con la linea dalla parte:

Una quadra di quella "Mobiusia" di piano proiettivo.)

Ripetiamo stesse cose: come cambia la normale?

Mappa di Weingarten $\mathcal{W}$ = Derivazione della mappa di Gauss.

$\forall p \in S$:
$\mathcal{W}_p : T_p S \to T_p S$
$\mathcal{W}_p(v) = -d_p S(v)$

Perché $S : S \to \mathbb{R}^2$

Vogliamo provare che $\mathcal{W}_p : T_p S \to T_p S$ è lineare (VP 2C.5)
come endomorfismo di uno spazio vettoriale in $\mathbb{R}$. (lineare)

Dobbiamo provare simmetrica e la corrispondente forma $\mathcal{F}_p$ di $T_p S$, precisamente vedere che

$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}_p}(\mathcal{W}_p) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ma che $\left(\mathcal{F}_p(\mathcal{W}), \mathcal{F}_p(\mathcal{W})\right) = \left(\mathcal{F}_p, \mathcal{F}_p\right) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Definizione: $\mathcal{F}_p : T_p S \to T_p S$
$\mathcal{F}_p(v) := -d_p S(v) = -(S \circ \gamma)'_p$
$\mathcal{F}_p(v) = -S'(0)_p = -(\gamma_v)_p$

$\mathcal{F}_p$ è lineare

$\mathcal{F}_p(\mathcal{W}_p) = -\mathcal{W}_p(v) = -(S \circ \gamma)'_p$

CAO $\begin{cases} \mathcal{F}(\mathcal{W}_p) = -n_p = \sigma_u \wedge \sigma_v \\ \mathcal{F}(v,w) = \langle v, \mathcal{F}_p(w) \rangle = \langle v, -(S \circ \gamma)'_p \rangle \end{cases}$

$\mathcal{F}_p$ è simmetrica

$n = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$ funzione di u, v

$\mathcal{F}_p(v) = \mathcal{F}_p(\gamma_v)$

$\mathcal{F}_p(\gamma_