Riassunto: $X \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, parametrizzata/carta: $\underset{\text{aperto}\subseteq\mathbb{R}^2}{U} \xrightarrow{\text{carta}} X \subseteq \mathbb{R}^3$

spazi/fibrati tangente:

$\forall P \in X$: $T_PX = \{$vettori tangenti a curve per $P \in X\}$ "approssimazione lineare di X vicino a P"

$TX := \bigsqcup_{P\in X} T_PX$ con proiezione $TX \xrightarrow{\pi} X$, $(P,v) \longmapsto P$

campi vettori tangenti su X = sezioni di π, cioè $TX \leftarrow X$, $(P,v) \longleftarrow\!\shortmid P$ con $v \in T_PX$

funzioni e differenziali tra superficie:

$F: X \to Y$ "tale che sulla carta è C^∞"

$\forall P \in X$: $dF_P : T_PX \longrightarrow T_{FP}Y$

$v \longmapsto (F\circ\gamma)'(0) =: dF_P(v)$, $v = \gamma'(0)$

per $\gamma \subseteq X$, $\gamma(0) = P$, $\gamma'(0) = v$; $(-\varepsilon,\varepsilon) \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{F} Y$

cioè $dF: TX \longrightarrow TY$, $(P,v) \longmapsto (FP, dF_P(v))$ "approssimazione lineare di F vicino a P".

X sup $\subseteq \mathbb{R}^3$

① $I : TX \times TX \longrightarrow \mathbb{R}$ "restrizione del prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ ai T_PX"

$I_P : T_PX \times T_PX \longrightarrow \mathbb{R}$, $I_P(v,w) := v\cdot w$

$T_PX = \langle \sigma_u, \sigma_v\rangle$, $\Gamma(I_P) = \begin{pmatrix} \sigma_u\cdot\sigma_u & \sigma_u\cdot\sigma_v \\ & \sigma_v\cdot\sigma_v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ & g_{22}\end{pmatrix}$, $\Gamma(I_P) = G_I$

$\det > 0$ "strumento di misura per di è in X".

② Gauss: $X \longrightarrow S^2$, $P \longmapsto g(P) = n_P = n_{X,P} = n$

Weingarten: $\mathcal{L} := -dg : TX \longrightarrow TS^2$

$\forall P$: $T_PX \longrightarrow T_{gP}S^2 = n^\perp = T_PX$ endomorfismo

teo: $\mathcal{L}$ autoaggiunto per I: $I_P(\mathcal{L}_P v, w) = I_P(v, \mathcal{L}_P w)$

matrice di $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ nella base σ_u, σ_v

③ $II_P(v,w) := I_P(\mathcal{L}_P v, w) = I_P(v, \mathcal{L}_P w) = II_P(w,v)$

$II : TX \times TX \longrightarrow \mathbb{R}$ simmetrica

$\Gamma(II) = G_{II} = \begin{pmatrix} II(\sigma_u,\sigma_u) & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_u\cdot n_u & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\cdot\sigma_{uu} & n\cdot\sigma_{uv} \\ & n\cdot\sigma_{vv}\end{pmatrix}$

$n \perp \sigma_u, \sigma_v$, $n\cdot\sigma_u = 0$, $n\cdot\sigma_v = 0$

$L = G_I^{-1} G_{II}$.

④ teorema spettrale: $\mathcal{L}$ autoagg per I (che è >0) allora $\mathcal{L}$ è I-ortogonalmente diagon. cioè esiste base v_1, v_2 di T_PX $\forall P$ tale che v_1, v_2 è I-ortogonale

$\Gamma_{(v_1,v_2)}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

e $\alpha_{(v_1,v_2)}(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2\end{pmatrix} = \Gamma_{(v_1,v_2)}(II)$

diagonale

v_1, v_2 direzioni curvature

k_1, k_2 curvature principali

$K = k_1 k_2 = \det \mathcal{L}$

$H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathcal{L}$

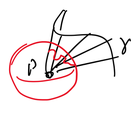
⊗ Tipi di punti su X

Alcuni di esempi da esplicitare:

① Cilindri: $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ curva, $v \in \mathbb{R}^3$ $\quad \sigma(s,t) = \gamma(s) + tv$: per semplicità possiamo supporre γ piana, $v \perp$ piano di γ

$\sigma(s,t) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ t\end{pmatrix}$

② Coni: $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ curva, $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ $\quad \sigma(s,t) = \gamma(s) + t(\gamma(s) - P) = P + t(\gamma(s) - P)$: per semplicità possiamo supporre: $P = 0$, γ spira sulla S^2



$\sigma(s,t) = t\gamma(s)$

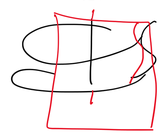
③ Sviluppabili delle tangenti:

$\gamma \in \mathbb{R}^3$, $X :=$ unione delle tangenti

$\sigma(s,t) = \gamma(s) + t\gamma'(s)$

④ Superficie di rotazione:

γ curva in $\mathbb{R}^3$ ("profilo"), z retta "asse" ($z \cap \gamma = \emptyset$?) $\quad \sigma(s,\vartheta) = \begin{pmatrix} x(s)\cos\vartheta \\ x(s)\sin\vartheta \\ z(s)\end{pmatrix}$



supponendo γ piana e asse su quel piano:

⑤ Elicoidi: di ogni punto di una curva γ si fa l'elica attorno a un fissato asse:

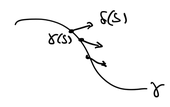
se γ piana, asse sta sul piano: $\quad \sigma(s,\vartheta) = \begin{pmatrix} x(s)\cos\vartheta \\ x(s)\sin\vartheta \\ z(s) + p\vartheta\end{pmatrix}$

$\gamma = \begin{pmatrix} x(s) \\ 0 \\ z(s)\end{pmatrix}$ asse $= z$ $\quad p \in \mathbb{R}$ "passo ridotto" ($p = 0$: rotazione)

⑥ Superficie RIGATE:

γ curva ("base o profilo") $\subseteq \mathbb{R}^3$

δ curva ("DIRETTRICE")



$\sigma(s,t) = \gamma(s) + t\,\delta(s)$

⑦ TUBOLARI: γ curva $\subseteq \mathbb{R}^3$

"tubo di γ di raggio r" =

$\sigma(s,\vartheta) = \gamma(s) + r(n(s)\cos\vartheta + b(s)\sin\vartheta)$

⑧ Normale di curva $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$: $\sigma(s,t) := \gamma(s) + t\,n_\gamma(s)$

Polare di curva $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$: $\sigma(s,t) = \gamma(s) + \frac{1}{k_\gamma(s)} n_\gamma(s) + t\,b_\gamma(s)$

⑨ Falde di una superficie (analoga delle curve dei centri per una curva) è unione dei centri di curvature principali se $\sigma(s,t)$ è superficie data, è unione $\sigma(s,t) + \frac{1}{k_1(s,t)} n_\sigma(s,t)$

e $\sigma(s,t) + \frac{1}{k_2(s,t)} n_\sigma(s,t)$.

TEOREMA EGREGIUM DI GAUSS:

$K = \det(\mathcal{L}) = \frac{\det G_{II}}{\det G_I}$ perché $L = G_I^{-1} G_{II}$

dipende solo dalla p.f.f. quindi è INTRINSECO (non dipende dalla immersione in $\mathbb{R}^3$) e può essere calcolato da chi sta sulla superficie (e sa calcolare I) (senza usare normale!).

Conseguenze:

se X, Y sono localm. isometriche allora hanno stesso K (il viceversa è FALSO: due sup possono avere la stessa funzione K e non essere isometriche!)

K intrinseco, ma k_1, k_2, H no (dipendono dalla immersione).

dimostrazioni:

- esplicita: calcoli
- •• intrinseco, teorico: conseguenze delle condizioni di "integrabilità della superficie"

dimostrazione (Gauss) per conti:

$K = \frac{\det II}{\det I} = \frac{1}{(\det I)^2}\det\begin{pmatrix} \sigma_{uu}\cdot\sigma_u\times\sigma_v & \sigma_{uv}\cdot\sigma_u\times\sigma_v \\ & \sigma_{vv}\cdot\sigma_u\times\sigma_v\end{pmatrix}$ perché: $II = \begin{pmatrix} \sigma_{uu}\cdot n & \sigma_{uv}\cdot n \\ & \sigma_{vv}\cdot n\end{pmatrix} = \frac{1}{\det(I)}\begin{pmatrix} \sigma_{uu}\cdot\sigma_u\times\sigma_v & \cdot \\ \cdot & \cdot\end{pmatrix}$, ma $n = \frac{\sigma_u\times\sigma_v}{\|\sigma_u\times\sigma_v\|} = \frac{1}{\det I}\sigma_u\times\sigma_v$

$(\det I)^2 K = \det\begin{pmatrix} \det(\sigma_{uu}\,\sigma_u\,\sigma_v) & \det(\sigma_{uv}\,\sigma_u\,\sigma_v) \\ & \det(\sigma_{vv}\,\sigma_u\,\sigma_v)\end{pmatrix}$

$= \det(\sigma_{uu}\,\sigma_u\,\sigma_v)\cdot\det(\sigma_{vv}\,\sigma_u\,\sigma_v) - \det(\sigma_{uv}\,\sigma_u\,\sigma_v)^2$

$= \det\left(\begin{pmatrix} \sigma_{uu}^t \\ \sigma_u^t \\ \sigma_v^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{vv} & \sigma_u & \sigma_v\end{pmatrix}\right) - \det\left(\begin{pmatrix} \sigma_{uv}^t \\ \sigma_u^t \\ \sigma_v^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{uv} & \sigma_u & \sigma_v\end{pmatrix}\right)$

$= \det\begin{pmatrix} \sigma_{uu}\cdot\sigma_{vv} & \sigma_{uu}\cdot\sigma_u & \sigma_{uu}\cdot\sigma_v \\ \sigma_u\cdot\sigma_{vv} & e & f \\ \sigma_v\cdot\sigma_{vv} & f & g\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} \sigma_{uv}\cdot\sigma_{uv} & \sigma_{uv}\cdot\sigma_u & \sigma_{uv}\cdot\sigma_v \\ \sigma_u\cdot\sigma_{uv} & e & f \\ \sigma_v\cdot\sigma_{uv} & f & g\end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} \sigma_{uu}\cdot\sigma_{vv} - \sigma_{uv}\cdot\sigma_{uv} & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \\ \cdot & & \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \\ \cdot & & \end{pmatrix}$

ora ci basta vedere che i termini evidenziati in rosso dipendono solo dalla I forma (e sue derivate!)

I: $\begin{cases} e = \sigma_u\cdot\sigma_u \\ f = \sigma_u\cdot\sigma_v \\ g = \sigma_v\cdot\sigma_v\end{cases}$

I_u: $\begin{cases} e_u = 2\sigma_{uu}\cdot\sigma_u \\ f_u = \sigma_{uu}\cdot\sigma_v + \sigma_u\cdot\sigma_{uv} \\ g_u = 2\sigma_{uv}\cdot\sigma_v\end{cases}$ $\quad \begin{cases} \sigma_{uu}\cdot\sigma_u = \frac{1}{2}e_u \\ \sigma_{uu}\cdot\sigma_v = f_u - \frac{1}{2}e_v \\ \sigma_{uv}\cdot\sigma_v = \frac{1}{2}g_u\end{cases}$

I_v: $\begin{cases} e_v = 2\sigma_{uv}\cdot\sigma_u \\ f_v = \sigma_{uv}\cdot\sigma_v - \sigma_u\cdot\sigma_{vv} \\ g_v = 2\sigma_{vv}\cdot\sigma_v\end{cases}$ $\quad \begin{cases} \sigma_{uv}\cdot\sigma_u = \frac{1}{2}e_v \\ \sigma_{vv}\cdot\sigma_u = f_v - \frac{1}{2}g_u \\ \sigma_{vv}\cdot\sigma_v = \frac{1}{2}g_v\end{cases}$

I_{uu}: $\begin{cases} e_{uu} = \\ f_{uu} = \\ g_{uu} = 2\sigma_{uuv}\cdot\sigma_v + 2\sigma_{uv}\cdot\sigma_{uv}\end{cases}$

I_{uv}: $\begin{cases} e_{uv} = \\ f_{uv} = \sigma_{uuv}\cdot\sigma_v + \sigma_{uu}\cdot\sigma_{vv} + \sigma_{uv}\cdot\sigma_{uv} + \sigma_u\cdot\sigma_{uvv} \\ g_{uv} = \end{cases}$

I_{vv}: $\begin{cases} e_{vv} = 2\sigma_{uvv}\cdot\sigma_u + 2\sigma_{uv}\cdot\sigma_{uv} \\ f_{vv} = \\ g_{vv} = \end{cases}$

$f_{uv} - \frac{1}{2}g_{uu} - \frac{1}{2}e_{vv} = \sigma_{uu}\cdot\sigma_{vv} - \sigma_{uv}\cdot\sigma_{uv}$!

dunque:

$(\det I)^2 K = \det\begin{pmatrix} f_{uv} - \frac{1}{2}g_{uu} - \frac{1}{2}e_{vv} & \frac{1}{2}e_u & f_u - \frac{1}{2}e_v \\ f_v - \frac{1}{2}g_u & e & f \\ \frac{1}{2}g_v & f & g\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_u \\ \frac{1}{2}e_v & e & f \\ \frac{1}{2}g_u & f & g\end{pmatrix}$

K = funzione di e, f, g e loro derivate!

Esplicitiamo nei casi:

$f = 0$ (I ff. diagonale $= \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & g\end{pmatrix}$)

$K = -\frac{1}{2\sqrt{eg}}\left(\left(\frac{g_u}{\sqrt{eg}}\right)_u + \left(\frac{e_v}{\sqrt{eg}}\right)_v\right)$.

e nel caso $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g\end{pmatrix}$

allora $K = -\frac{(\sqrt{g})_{uu}}{\sqrt{g}}$. $\quad -\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{g_u}{\sqrt{g}}\right)_u$

se $f \equiv 0$: $K = \frac{1}{e^2g^2}\left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}g_{uu} - \frac{1}{2}e_{vv} & \frac{1}{2}e_u & -\frac{1}{2}e_v \\ -\frac{1}{2}g_u & e & 0 \\ \frac{1}{2}g_v & 0 & g\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_u \\ \frac{1}{2}e_v & e & 0 \\ \frac{1}{2}g_u & 0 & g\end{vmatrix}\right)$

$= \frac{1}{e^2g^2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}egg_{uu} + \frac{1}{4}eee_vg_v + \frac{1}{4}geg_ug_u \\ -\frac{1}{2}ege_{vv} + \frac{1}{4}ee_u^2 + \frac{1}{4}ge_v^2\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{e^2g^2}\left(-\frac{1}{2}egg_{uu} + \frac{1}{4}(eg)_ug_u - \frac{1}{2}ege_{vv} + \frac{1}{4}(eg)_ve_v\right)$

$= -\frac{1}{2\sqrt{eg}}\left(\frac{egg_{uu} - \frac{1}{2}(eg)_ug_u}{eg\sqrt{eg}} + \frac{ege_{vv} - \frac{1}{2}(eg)_ve_v}{eg\sqrt{eg}}\right) = \dots$

Domanda: possiamo trovare parametrizzazioni di una superficie X in modo che:

la prima ff. sia diagonale? $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & g\end{pmatrix}$

la prima ff. sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g\end{pmatrix}$?

la prima ff. sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$? (no, altrimenti $K \equiv 0$ sempre! ma perché?)

lunedì 16 marzo 2026