STUDIO DELLE CURVE SULLE SUPERFICIE:

rif. FRENET / DARBOUX

curve speciali: e. CURVATURA, e. ASINTOTICHE, e. GEODETICHE

$\gamma \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^3$

curva superf.

$t \mapsto (u(t), v(t))$

$(u,v) \overset{\sigma}{\longmapsto} \sigma(u,v)$

$I \xrightarrow{\gamma} U \longrightarrow X \subseteq \mathbb{R}^3$

$I \subseteq \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto \sigma(u(t), v(t)) =: \gamma(t)$

Riferimento Frenet:

$$\begin{cases} e_1 = \gamma'/\|\gamma'\| \in TX \\ e_2 = e_3 \times e_1 \\ e_3 = \dfrac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|} \end{cases} \quad e_2, e_3 \in \langle e_1 \rangle^\perp$$

$E = (e_1, e_2, e_3)$

$E' = EK$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

supponiamo γ in p.d.a.

k = curvatura

τ = torsione

Riferimento di Darboux:

$$\begin{cases} v_1 = \gamma'/\|\gamma'\| = e_1 \\ v_2 = v_3 \times v_1 \\ v_3 = n_X = \text{normale alla superficie} \end{cases}$$

$TX = \langle v_3 \rangle^\perp$

$v_2, v_3 \in \langle e_1 \rangle^\perp = \langle v_1 \rangle^\perp$

$v_3 \perp TX$

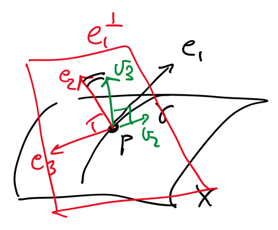
$V = (v_1, v_2, v_3)$

$V' = VH \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & -k_g & -k_n \\ k_g & 0 & -\tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix}$ perché $V \in O_3$

k_g = CURVATURA geodetica

k_n = CURVATURA normale

τ_g = TORSIONE geodetica.



Confrontiamo i due riferimenti e le due matrici dei sistemi differenziali:

$E = V\Theta$

$V = E\Theta^{-1}$

$$(e_1\ e_2\ e_3) = (v_1\ v_2\ v_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\vartheta & -\cos\vartheta \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \end{pmatrix}}_{=\Theta} \qquad \Theta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s\vartheta & c\vartheta \\ 0 & -c\vartheta & s\vartheta \end{pmatrix}$$

dove ϑ = angolo tra e_2 e v_3

$\cos\vartheta = e_2 \cdot v_3$

(dunque: $e_2 = 0 \cdot v_1 + \underset{\sin\vartheta}{a}\, v_2 + \underset{\cos\vartheta}{b}\, v_3$)

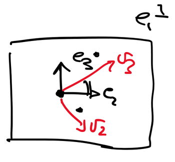
Confrontiamo ora le matrici K e H:

alla mano:

- $\underset{ke_2}{e_1'} = v_1'$
  $= k_g v_2 + k_n v_3$
  $= k_g(s\vartheta \cdot e_2 - c\vartheta e_3) + k_n(c\vartheta e_2 + s\vartheta e_3)$
  $= \underbrace{(k_g s\vartheta + k_n c\vartheta)}_{k} e_2 + \underbrace{(-k_g c\vartheta + k_n s\vartheta)}_{0} e_3$

  $\Longrightarrow \begin{cases} k^2 = k_g^2 + k_n^2 \\ k_g = k\sin\vartheta \\ k_n = k\cos\vartheta \end{cases}$

- $\cos\vartheta = e_2 \cdot v_3$ derivando:
  $-\vartheta'\sin\vartheta = e_2' \cdot v_3 + e_2 \cdot v_3'$
  $\overset{!}{=} (\cancel{-ke_1} + \tau e_3) \cdot v_3 + e_2 \cdot (\cancel{-k_n v_1} - \tau_g v_2)$
  $\overset{!}{=} \tau \cdot \underline{e_3 \cdot v_3} - \tau_g\, \underline{e_2 \cdot v_2}$
  $= (\tau - \tau_g)\sin\vartheta$



$\Rightarrow \begin{cases} -\vartheta' = \tau - \tau_g \\ \tau = \tau_g - \vartheta' \\ \tau_g = \tau + \vartheta' \end{cases}$ ← "DERIVATA TRA I DUE RIFERIMENTI"

più scientifico:

$E = V\Theta \qquad E' = EK$

$V = E\Theta^{-1} \qquad V' = VH$

$E' = (V\Theta)' = V'\Theta + V\Theta'$
$= VH\Theta + V\Theta'$
$= (E\Theta^{-1})H\Theta + (E\Theta^{-1})\Theta'$
$= E(\underbrace{\Theta^{-1}H\Theta + \Theta^{-1}\Theta'}_{=K})$

$K = \Theta^{-1}H\Theta + \Theta^{-1}\Theta'$
$= \Theta^{-1}(H\Theta + \Theta')$

$V' = (E\Theta^{-1})' = E'\Theta^{-1} + E(\Theta^{-1})'$
$= EK\Theta^{-1} + E(-\Theta^{-1}\Theta'\Theta^{-1})$
$= V\Theta K\Theta^{-1} - V\cancel{\Theta\Theta^{-1}}\Theta'\Theta^{-1}$
$= V\underbrace{(\Theta K\Theta^{-1} - \Theta'\Theta^{-1})}$

$\Rightarrow H = \Theta K\Theta^{-1} - \Theta'\Theta^{-1}$
$= (\Theta K - \Theta')\Theta^{-1}$

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s\vartheta & -c\vartheta \\ 0 & c\vartheta & s\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Theta' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\vartheta & s\vartheta \\ 0 & -s\vartheta & c\vartheta \end{pmatrix} \cdot \vartheta'$$

proviamo a sviluppare i conti:

$$H = \Theta K\Theta^{-1} - \Theta'\Theta^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ k_g & 0 & \\ k_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -c \\ 0 & c & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & c \\ 0 & -c & s \end{pmatrix} - \vartheta'\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & c \\ 0 & -c & s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -c \\ 0 & c & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -sk & -ck \\ k & c\tau & -s\tau \\ 0 & s\tau & c\tau \end{pmatrix} - \vartheta'\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -sk & -ck \\ sk & 0 & -\tau \\ ck & \tau & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta' \\ 0 & \vartheta' & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ sk & 0 & \\ ck & \tau + \vartheta' & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dunque} \begin{cases} k_g = k\sin\vartheta \\ k_n = k\cos\vartheta \\ \tau_g = \tau + \vartheta' \end{cases}$$

Riassunto: la CURVATURA TOTALE k di γ si divide in due parti:

- k_g geodetica $= k\sin\vartheta$ « CURVATURA SUL SP.TG. » (questa viene vista da chi sta sulla superficie)
- $k_n = k\cos\vartheta$ NORMALE « CURVATURA NORMALE ALLO SP.TG »

la TORSIONE TOTALE τ di γ si divide in due parti:

- τ_g, curvatura geodetica
- $-\vartheta'$ DOVUTA alla VARIAZIONE TRA i DUE RIFERIMENTI

Altri significati della II forma:

derivando $v_3 = n_X$ nella direzione $e_1 = v_1 = \gamma'$

$$v_1(n_X) = v_1(v_3) = \begin{cases} dn(v_1) = -\mathcal{L}(v_1) \\ v_3' = -k_n v_1 - \tau_g v_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(v_1) = k_n v_1 + \tau_g v_2}$$

$$\boxed{\underset{\mathrm{II}(v_1,v_1)}{(\mathcal{L}(v_1) \cdot v_1)} = k_n} \qquad \boxed{\underset{\mathrm{II}(v_1,v_2)}{\mathcal{L}(v_1) \cdot v_2} = \tau_g}$$

in particolare: $\mathcal{L}(v_1) = k_n v_1$ sse $\tau_g = 0$
v_1 autovettore di $\mathcal{L}$

inoltre $k_n = 0$ sse $\mathrm{II}(v_1, v_1) = 0$ sse v_1 isotropo per II

Curve speciali sulla superficie X:

① curve con $\tau_g \equiv 0$: LINEE DI CURVATURA
sse vettore tg curva è autovettore di $\mathcal{L}$

nota: tutta la τ torsione della curva è ϑ'

equazione differenziale per le curvature:

$\mathcal{L}(v_1) \overset{\times}{=} v_1$

$L\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \overset{\times}{=} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \qquad L = G_I^{-1} G_{II}$

$G_{II}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \overset{\times}{=} G_I\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \overset{\times}{=} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eu' + fv' \\ fu' + gv' \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} eu' + fv' & lu' + mv' \\ fu' + gv' & mu' + nv' \end{pmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} u'^2 & -u'v' & v'^2 \\ e & f & g \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$

equazione differenziale in $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, prim'ordine (u', v'), di 2° grado.

---

② curve con $k_n \equiv 0$: LINEE ASINTOTICHE
sse vettore tangente è isotropo per II
esistono nei punti iperbolici (2 linee asintotiche)
e nei punti parabolici (1 linea asintotica)
non esistono nei punti ellittici.

Nota: lungo le curve asintotiche si ha $k_n \equiv 0$,
quindi $H = \begin{pmatrix} 0 & & \\ * & 0 & \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}$

e allora $E = V$ (Frenet = Darboux)
($\underset{k_g v_2}{v_1'} = \underset{ke_2}{e_1'} \Rightarrow e_2 = v_2$
domanda $n_\gamma = e_2$ dove sta rispetto a TX?)

equazione differenziale:

$\mathrm{II}(v_1, v_1) = 0$

$(u', v')\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0$

$l u'^2 + 2m u'v' + n v'^2 = 0$

lungo le curve asintotiche otteniamo:

$$K = \det(\mathcal{L}) = \underset{\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}}{\det(\mathrm{II})} = -\mathrm{II}(v_1, v_2)^2 = -\tau^2 \leqslant 0$$

---

③ curve con $k_g = 0$ e UNITARIE: linee geodetiche di X

sse $k = k_n$, tutta la curvatura cilindrica è normale alla sup. X,
sse $\gamma'' = k \cdot e_2$ è normale alla superficie
(Frenet e Darboux sono in posizione fissata con $e_2 = v_3$)
« tutta la curvatura k_g di γ è dovuta al VINCOLO di stare sulla superficie X »
(sono "rette" per chi sta sulla superficie,
cioè "curve senza accelerazione")

Problema: come caratterizzare le geodetiche in modo differenziale?

Metodi possibili:

① estrinseco: se la sp è data da $F(x,y,z) = 0$
allora normale alla sp è data da $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = n_X$
e $\gamma = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\gamma'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ geodetica sse

$\gamma'' \parallel n_X$ sse $\dfrac{x''}{F_x} = \dfrac{y''}{F_y} = \dfrac{z''}{F_z}$

equazioni diff del 2° ORDINE

$\boxed{\text{② intrinseco, geometrico}}$

③ variazionale, cercare curve sulla superficie che LOCALMENTE minimizzano la lunghezza tra punti vicini

④ calcolo differenziale INTRINSECO della superficie

martedì 17 marzo 2026.