Matematica: scienza delle regolarità $\forall$ $\exists$ $\in$ $\mathbb{R}$
Ma generalizzazione, ed in più dimensioni
Strutture astratte indipendenti dalle particolari interpretazioni che le realizzano

$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali
$\mathbb{R}^2$ = piano
$\mathbb{R}^3$ = spazio
$\mathbb{R}^n$ = spazio euclideo n-dimensionale

Il caso finanziario: Ogni cosmo ha x e y in $\mathbb{R}$
Insieme $A = \{x, y \in \mathbb{R} \mid$ condizione su x e $y\}$
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid$ condizione su $x\}$
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid$ condizione su x e $y\}$

Differenza: $A^2 - A^1 = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin A^1\}$
$\forall$: per ogni (quantificatore universale) Esempio: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$
$\exists$: esiste (quantificatore esistenziale)
$\in$: appartiene (appartenenza) Esempio: $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$
$\Rightarrow$: implica (implicazione) Esempio: $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$
$\Leftrightarrow$: se e solo se (doppia implicazione) Esempio: $x = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$ e $x > 0$

Def. di $\mathbb{R}^2$:
Prodotto: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$
Coordinate: $\forall P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\begin{matrix} x = \text{ascissa di } P \\ y = \text{ordinata di } P \end{matrix}$
e viceversa:
$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\exists! P$ di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Vettori: $\forall P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\begin{matrix} x = \text{componente orizzontale} \\ y = \text{componente verticale} \end{matrix}$
e viceversa:
$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\exists!$ vettore $\vec{v}$ di componenti $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ se $\begin{matrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{matrix}$

Nuovi oggetti: numeri reali; rette; piani; spazi
Collezioni: $\mathbb{R}$; r; π; $\mathbb{R}^3$
Relazioni: $\in$ $\subset$ $\parallel$ $\perp$ $\cong$ $\sim$
Insiemi e funzioni: $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2$
Insiemi e funzioni in "figure": $\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, O) = 1\}$; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2$

Assiomi: $\begin{matrix} A(x, y) \\ B(x, y) \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{assiomi di } \mathbb{R}^2 \\ \text{assiomi di } \mathbb{R}^3 \end{matrix}$
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ assiomi di $\mathbb{R}^2$
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ assiomi di $\mathbb{R}^3$
$d(A, B) \geq 0$
$A = B \Leftrightarrow d(A, B) = 0$
$d(A, B) = d(B, A)$
$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$
$\text{Area}(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) \geq 0$
$\text{Area}(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sono allineati con l'origine

Assiomi: non sono utili
Teoremi: sono tutte conseguenze degli assiomi
Dimostrazioni: [ragionamenti che mostrano che una proposizione è conseguenza degli assiomi]

Geometria analitica: rappresentare ed ottenere prop. geometriche mediante equazioni e disequazioni

γ geometrico $\Leftrightarrow$ $\gamma = \{x \text{ oggetto} \mid \mathcal{P}(x)\}$
$\mathcal{P}(x)$: $\mathcal{P}(x, y)$
$\mathcal{P}(x, y, z)$
$\gamma = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{P}(x, y)\}$
$\gamma = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{P}(x, y, z)\}$

Vicolo cieco:
Insiemi: $\gamma = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{P}(x, y)\}$
$\mathcal{P}(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$
$\gamma = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}\}$
$\gamma = \{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\}$

Vettori: $\gamma = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{P}(\vec{v})\}$
$\mathcal{P}(\vec{v}) = \begin{cases} \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \\ \vec{u} \perp \vec{w} \\ \|\vec{u}\| = \|\vec{w}\| \end{cases}$
$\gamma = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \\ \vec{u} \perp \vec{w} \\ \|\vec{u}\| = \|\vec{w}\| \end{cases}\}$
$\gamma = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$

problema: passare da insiemi a condizioni, con $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{vett}(x, y) = \vec{v}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$

Classificazione: che geometrie ci sono? Quante? Come si studiano?

Esempio: $\gamma = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{P}(x, y)\}$
$\mathcal{P}(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$
$\gamma = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}\}$
$\gamma = \{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\}$

Scrivi un'equazione che abbia come soluzioni γ
Scrivi un'equazione che abbia come soluzioni γ e nient'altro

Problema: soluzioni in $\mathbb{C}$ anziché $\mathbb{R}$?
Teorema: $\forall$ polinomio $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ in $\mathbb{C}$ $[x]$, $\exists z \in \mathbb{C}$ tale che $p(z) = 0$
Quanti sono? Come si trovano?

Cosa è un cerchio?
Equazione: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0, 0) \\ r = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} \text{dà una definizione di} \\ \text{una circonferenza} \end{matrix}$
$\begin{cases} (x_0, y_0) = (2, 3) \\ r = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} \text{dà una definizione di} \\ \text{un altra circonferenza} \end{matrix}$
$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0, 0) \\ r = 2 \end{cases}$ $\begin{matrix} \text{dà una definizione di} \\ \text{un altra circonferenza} \end{matrix}$
$\begin{cases} (x_0, y_0) = (2, 3) \\ r = 2 \end{cases}$ $\begin{matrix} \text{dà una definizione di} \\ \text{un altra circonferenza} \end{matrix}$
$\begin{cases} (x_0, y_0) = (a, b) \\ r = r