CALCOLO DIFFERENZIALE INTRINSECO
(GAUSS, CODAZZI-MAINARDI, T. Fondam. Superficie):

X, Y campi vettoriali:
sappiamo usare X, Y come "vettori applicati" come "derivate direzionali"

$X(Y)$
$X : \mathcal{E}^\infty \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$
$f \longmapsto X(f)$

$\mathbb{R}$-linear $X(\alpha f + g) = \alpha X(f) + X(g)$
Leibnitz $X(fg) = X(f)g + fX(g)$
$(fX+Y)(-) = fX(-) + Y(-)$
Lie $[X,Y] = XY - YX$
$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$

Se X, Y campi tangenti a una superficie S
allora $X(Y)$ non è necessariamente tangente a S

e possiamo decomporre $X(Y)$ in parte tangente e parte normale a S:

$$X(Y) = \underbrace{\nabla_X(Y)}_{\text{tangente}} + \underbrace{(X(Y)\cdot n)\, n}_{\text{normale}} \qquad \begin{array}{l} Y\cdot n = 0 \\ X(Y\cdot n) = 0 \end{array}$$

$$= \nabla_X(Y) - (Y\cdot X(n))\cdot n$$

v qualsiasi
n versore
proiezione di v su n
è $(v\cdot n)\, n$

$$= \nabla_X(Y) - (Y\cdot d_n(X))\, n$$
$$= \nabla_X(Y) + (Y\cdot L(X))\, n$$
$$= \nabla_X(Y) + \mathrm{II}(X,Y)\, n$$

da cui $\boxed{\nabla_X(Y) = X(Y) - \mathrm{II}(X,Y)\, n}$

"derivata COVARIANTE in direzione X"
è la "parte tangente della derivata direzionale rispetto a X"

$\nabla_X : \mathcal{E}^\infty \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$

ha le stesse proprietà di una derivazione, cioè

$\mathbb{R}$-linear Leibnitz sull'argomento
$\nabla_X(\alpha f + g) = \alpha \nabla_X(f) + \nabla_X(g)$
$\mathbb{R}$
$\nabla_X(fg) =$

lineare sull'operatore: $\boxed{\nabla_{fX+Y}(-) = f\nabla_X(-) + \nabla_Y(-)}$

NOTA: $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X,Y] = X(Y) - Y(X)$

$$\boxed{\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X \neq \nabla_{[X,Y]} = [\nabla_X, \nabla_Y]}$$

Se $TX = \langle \partial_i \rangle$
allora conoscere $\nabla_{\partial_i}(\partial_j)$ permette di ricostruire tutti i calcoli:

$$\nabla_X(Y) = \nabla_{\sum_i f_i \partial_i}\left(\sum_j g_j \partial_j\right)$$
$$= \sum_i f_i \nabla_{\partial_i}\left(\sum_j g_j \partial_j\right)$$
$$= \sum_i f_i \sum_j \nabla_{\partial_i}(g_j \partial_j)$$
$$= \sum_i f_i \sum_j \partial_i(g_j)\partial_j + g_j \nabla_{\partial_i}(\partial_j)$$
$$= \sum_i \sum_j \left(f_i \partial_i(g_j)\partial_j + g_j \nabla_{\partial_i}(\partial_j)\right)$$

$\nabla_\partial(fX) = \partial(f)X + f\nabla_\partial(X)$

Definizione:

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k\, \partial_k$$

$(\Gamma_{ij}^k)_{i,j,k}$ = matrice di ∇_{∂_i} nella base $\partial_1 \dots \partial_n$
SIMBOLI di CHRISTOFFEL.

$\boxed{\Gamma_i = \text{matrice } (\Gamma_{ij}^k)_{j,k}}$

Come calcolare i simboli Γ_{ij}^k per vedere che DIPENDONO SOLO dalla p.iff della superficie:

osservazione: $\nabla_{\partial_i}(\partial_j) - \nabla_{\partial_j}(\partial_i) = [\partial_i, \partial_j] = 0$
quindi $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

$$\partial_k(g_{ij}) = \partial_k(\partial_i\cdot\partial_j) = \partial_k(\partial_i)\cdot\partial_j + \partial_i\cdot\partial_k(\partial_j)$$
$$= \nabla_{\partial_k}(\partial_i)\cdot\partial_j + \partial_i\cdot\nabla_{\partial_k}(\partial_j)$$
$$= \sum_\ell \Gamma_{ki}^\ell\, \partial_\ell\cdot\partial_j + \partial_i\cdot\sum_\ell \Gamma_{kj}^\ell\, \partial_\ell$$
$$= \sum_\ell \Gamma_{ki}^\ell\, g_{\ell j} + \sum_\ell \Gamma_{kj}^\ell\, g_{i\ell}$$

$$\partial_i(g_{jk}) = \quad = \boxed{\textstyle\sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell\, g_{\ell k}} + \sum_\ell \Gamma_{ik}^\ell\, g_{j\ell}$$

$$\partial_j(g_{ki}) = \quad = \sum_\ell \Gamma_{jk}^\ell\, g_{\ell i} + \boxed{\textstyle\sum_\ell \Gamma_{ji}^\ell\, g_{k\ell}}$$

$$\boxed{\partial_i(g_{jk}) + \partial_j(g_{ki}) - \partial_k(g_{ij}) = 2\left(\sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell\, g_{k\ell}\right)}$$

se indice i FISSATO (vogliamo vedere $\Gamma_i = (\Gamma_{ij}^\ell)_{j,\ell}$)
gli indici variabili restano j, k otteniamo:

$$\boxed{\underbrace{\partial_i(G)}_{\text{matrice simmetrica}} + \underbrace{\left(\partial_j(g_{ki}) - \partial_k(g_{ij})\right)_{j,k}}_{\text{matrice antisimmetrica}} = 2G\Gamma_i}$$

Scrivere nel caso delle superficie:
$G = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ $\quad \Gamma_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix}$ $\quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$

possiamo usare
$G = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \overbrace{\Gamma_{12}^1 \quad \Gamma_{22}^1}^{\Gamma_2} \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \quad \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$
Γ_1

e

$$2G\Gamma_1 = \begin{pmatrix} e_u & f_u \\ f_u & g_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_v & e_v \\ f_u & f_u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_v & f_u \\ e_v & f_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_u & e_v \\ 2f_v - e_v & g_u \end{pmatrix}$$
$$2G\Gamma_2 = \begin{pmatrix} e_v & f_v \\ f_v & g_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_v & f_v \\ g_u & g_u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_v & g_u \\ f_v & g_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_v & 2f_v - g_u \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$$

Equazioni strutturali della superficie:

data σ parametrizzazione di S,
usiamo (σ_u, σ_v, n) come base mobile:

$$\begin{cases} (\sigma_u, \sigma_v, n)_u = (\sigma_u\ \sigma_v\ n)\begin{pmatrix} \Gamma_1 & \begin{matrix} -a \\ -c \end{matrix} \\ \begin{matrix} \ell & m \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \geq \mathcal{W}_1 \\ (\sigma_u, \sigma_v, n)_v = (\sigma_u\ \sigma_v\ n)\begin{pmatrix} \Gamma_2 & \begin{matrix} -b \\ -d \end{matrix} \\ \begin{matrix} m & n \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \geq \mathcal{W}_2 \end{cases}$$

componente covariante di $\sigma_u(\sigma_u)$ $\sigma_u(\sigma_v)$ (dipendono solo dalla Iff)

base coassiale: $n_u = \sigma_u(n) = dn(\sigma_u) = -\mathcal{L}(\sigma_u)$
$\mathcal{L}(\sigma_u, \sigma_v) = (\sigma_u\ \sigma_v)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

per la terza riga: $(\sigma_u)_u\cdot n = \ell \qquad (\sigma_v)_v\cdot n = m$

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_u(B) = B\mathcal{W}_1 \\ \sigma_v(B) = B\mathcal{W}_2 \end{cases}}$$

$\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ dipendono da Iff, IIff, come da Iff e $\mathcal{L}$

Teorema di esistenza/unicità per superficie:

dato $G = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ con $e, g,\ eg - f^2 > 0$
e $G_{II} = \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$
allora esiste una superficie S con parametrizzazione avente G come Iff e G_{II} come IIff sse il sistema di eq. diff. parziali

$$\begin{cases} \partial_1(B) = B\mathcal{W}_1 \\ \partial_2(B) = B\mathcal{W}_2 \end{cases}$$

ha soluzione, quindi sse valgono le condizioni di integrabilità: $\partial_2\partial_1 B = \partial_2\partial_1 B$

$$\partial_2(B\mathcal{W}_1) = \partial_1(B\mathcal{W}_2)$$
$$\partial_2(B)\mathcal{W}_1 + B\partial_2(\mathcal{W}_1) = \partial_1(B)\mathcal{W}_2 + B\partial_1(\mathcal{W}_2)$$
$$B\mathcal{W}_1\mathcal{W}_1 + B\partial_2(\mathcal{W}_1) = B\mathcal{W}_1\mathcal{W}_2 + B\partial_1(\mathcal{W}_1)$$
$$\boxed{\mathcal{W}_2\mathcal{W}_1 - \mathcal{W}_1\mathcal{W}_2 = \partial_1(\mathcal{W}_2) - \partial_2(\mathcal{W}_1)}$$

svolgendo queste uguaglianze sulla sottomatrice 2x2 con Γ_i, e sulla terza riga/colonna si ottengono condizioni distinte:
- GAUSS (parte tangenziale) DIPENDONO SOLO DA G e Γ.
- CODAZZI-MAINARDI (parte normale) (alla dimostrazione del teorema egregium)

Altre espressioni: $[\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1] = \partial_1(\mathcal{W}_2) - \partial_2(\mathcal{W}_1)$
(equivalenti) $(\mathcal{W}_2 + \partial_2)\mathcal{W}_1 = (\mathcal{W}_1 + \partial_2)\mathcal{W}_2$

Viceversa, dato G, matrice simmetrica >0
e G_{II} matrice simmetrica,
troviamo $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$,

esiste σ tale che $\begin{cases} (\sigma_u\ \sigma_v\ n)_u = (\sigma_u\ \sigma_v\ n)\mathcal{W}_1 \\ (\sigma_u\ \sigma_v\ n)_v = (\quad\quad)\mathcal{W}_2 \end{cases}$?

Nota: se $\exists F(x,y)$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = g(x,y) \end{cases}$$

allora $\boxed{\frac{\partial}{\partial y} f} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}F = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}F = \boxed{\frac{\partial}{\partial x} g}$

questa è condizione NECESSARIA affinché esista la $F(x,y)$ che soddisfa a quel sistema.

Il teorema di analisi dice che questa condizione, assieme alla regolarità dei dati, è anche sufficiente per avere soluzioni locali $F(x,y)$ al sistema di eq. diff. parziali!

$$\partial_1\mathcal{W}_2 - \partial_2\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2\mathcal{W}_1 - \mathcal{W}_1\mathcal{W}_2$$

$$\partial_1\begin{pmatrix} \Gamma_2 & \begin{matrix} -a \\ -d \end{matrix} \\ \begin{matrix} m & n \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} - \partial_2\begin{pmatrix} \Gamma_1 & \begin{matrix} -a \\ -c \end{matrix} \\ \begin{matrix} \ell & m \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_2 & \begin{matrix} -b \\ -d \end{matrix} \\ \begin{matrix} m & n \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_1 & \begin{matrix} -a \\ -c \end{matrix} \\ \begin{matrix} \ell & m \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \begin{matrix} -a \\ -c \end{matrix} \\ \begin{matrix} \ell & m \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_2 & \begin{matrix} -b \\ -d \end{matrix} \\ \begin{matrix} m & n \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo i blocchi $\begin{pmatrix} \boxed{\text{GAUSS}} & \square \\ \square & 0 \end{pmatrix}$ equivalenti per simmetria, CODAZZI-MAINARDI

GAUSS: $\partial_1\Gamma_2 - \partial_2\Gamma_1 = \Gamma_2\Gamma_1 + \begin{pmatrix} -b \\ -d \end{pmatrix}(\ell\ m) - \Gamma_1\Gamma_2 - \begin{pmatrix} -a \\ -c \end{pmatrix}(m\ n)$

notazione
$L = G^{-1}G_{II}$
$G\,L = G_{II}$
$G\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}G =$

$$\partial_1\Gamma_2 - \partial_2\Gamma_1 + [\Gamma_1, \Gamma_2] = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}(m\ n) - \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}(\ell\ m)$$
$$= \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}(b\ d)G - \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}(a\ c)G$$
$$= \begin{pmatrix} ab - ba & ad - bc \\ bc - ad & cd - cd \end{pmatrix}G$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{pmatrix}G = K\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}G,$$

dipende dalla pff $\Rightarrow$ anche K (ALTRA DIMOSTRAZIONE del Teorema Egregium di GAUSS)

CODAZZI-MAINARDI:

$\partial_1(m\ n) - \partial_2(\ell\ m) = (m\ n)\Gamma_1 - (\ell\ m)\Gamma_2$, cioè
$(\partial_1 - \Gamma_1^t)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = (\partial_2 - \Gamma_2^t)\begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix}$

oppure
$-\partial_1\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} + \partial_2\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = -\Gamma_2\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \Gamma_1\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, cioè
$(\partial_1 + \Gamma_1)\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = (\partial_2 + \Gamma_2)\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

martedì 14 marzo 2026 – fine della parte differenziale

Resterebbe da capire il significato geometrico di queste condizioni (qui scritte in termini di matrici in una fissata base, bisognerebbe riscrivere tutto in termini più "geometrici" senza scelta delle basi):

Si può fare sviluppando le parti $\begin{cases} \text{tangenziale} \\ \text{normale} \end{cases}$
dell'uguaglianza

$$XY(Z) - YX(Z) = [X,Y](Z)$$

da cui si trovano rispettivamente delle condizioni da chiamare $\begin{cases} \text{di Gauss} \\ \text{di Codazzi-Mainardi,} \end{cases}$

in cui poi sostituendo al posto di X, Y, Z
i vettori $\partial_1 = \sigma_u$, $\partial_2 = \sigma_v$ della base scelta si ottengono
le condizioni matriciali $\begin{cases} \text{di Gauss} \\ \text{di Codazzi-Mainardi} \end{cases}$ (per chi è curioso, vedere le dispense!).