Indice

Introduzione alle note

Queste note si riferiscono alle lezioni di Matematica per l'analisi e il trattamento di immagini per il corso di Master in matematica applicata di circa 20 ore frontali tenutosi presso l'Università degli Studi di Padova nel A.A. 2002-2003. I prerequisiti per una comprensione adeguata delle note sono i corsi di Analisi Matematica del biennio di ingegneria, matematica o fisica, un corso di introduzione alla Analisi Numerica (con particolare riferimento a elementi di algebra lineare computazionale) ed elementi di Analisi funzionale (spazi di Hilbert ed operatori lineari, nozioni di serie e integrali di Fourier). Tuttavia, si è cercato di rendere la lettura consistente ed agevole e rivolta all'utilizzo degli strumenti matematici, limitandosi a volte ad una descrizione puramente intuitiva, sebbene sempre rigorosa ed accompagnata da riferimenti di approfondimento. Per lo svolgimento di alcuni esercizi al calcolatore si presuppone una conoscenza di base dei linguaggi C/C++ o Matlab e verranno presentati dei tutorial come notebook di Mathematica (Wolfram Research), che garantisce la possibiltà di operare in modo sufficientemente intuitivo e di disporre di una semplice interfaccia grafica per la visualizzazione dei risultati. Lo scopo del corso e delle note è quindi di fornire una panoramica degli strumenti di lavoro in questo settore, una introduzione al loro utilizzo e una conoscenza delle loro potenzialità per le applicazioni.

Un'immagine può venir rappresentata come una funzione matematica, che ad ogni punto associa un corrispondente valore di colore, spesso espresso come combinazione di colori fondamentali. Tale rappresentazione consente quindi una interpretazione puramente matematica ed astratta di una immagine. Il *dominio* di un'immagine, interpretata come funzione matematica, può essere pensato come continuo, ma al fine di poter eseguire una eleborazione numerica occorrerà definire una rappresentazione anche su un dominio discreto. Tali rappresentazioni, continua e discreta, devono essere equivalenti, ossia si deve poter passare dall'una all'altra senza perdita di informazione. Questo garantisce che l'elaborazione che eseguiamo numericamente corrisponda alla fine ad un trattamento dell'immagine anche come funzione definita nel continuo. Un processo di *digitalizzazione* di un segnale f è quindi l'associazione di f ad una successione di dati $\vec{c} = (c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$, rappresentanti f. Tali dati $\vec{c}$ potranno essere trattati numericamente, inviati attraverso un mezzo o trasmessi mediante comunicazioni senza cavo. Tutte queste operazioni richiedono tuttavia due condizioni/principi:

(I) la rappresentazione digitale deve essere stabile: questo significa che *piccole perturbazioni sui dati* sono legate a *piccole perturbazioni della funzione originaria*. Questa è una naturale richiesta di continuità;

(II) robustezza al *rumore* e tolleranza dell'errore: possibili errori importanti sui dati non dovrebbero modificare *troppo* la rappresentazione di una funzione f. Infatti la trasmissione attraverso un mezzo, ma anche semplici operazioni numeriche possono produrre errori e la loro propagazione.

Uno degli esempi più semplici che si possono cosiderare come processo di digitalizzazione è quello di associare a una funzione continua f la sequenza dei suoi *campioni* su un reticolo discreto o insieme di nodi $c_n(f) = f(\tau n)$, dove $\tau > 0$ è il passo di campionamento. Se si assume che f appartenga ad uno *spazio normato* di funzioni, si chiami esso $(B, \|\cdot\|_B)$, e che la sequenza dei dati appartenga ad uno spazio normato di successioni $(Y, \|\cdot\|_Y)$, una relazione di equivalenza e di continuità è data dalla equivalenza delle norme:

$$\|(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}\|_Y \asymp \|f\|_B, \tag{1}$$

ove per "$\asymp$" si intende che esistono due costanti $A, B > 0$, indipendenti da f, tali che

$$A\|(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}\|_Y \leq \|f\|_B \leq B\|(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}\|_Y.$$

Assumiamo che la funzione f venga affetta da un errore

$$\tilde{f} = f + \delta f.$$

Allora da (1) si ha che

$$\|\tilde{f}\|_B \asymp \|(c_n(f) + c_n(\delta f))_{n\in\mathbb{N}}\|_Y,$$

e $\|(c_n(\delta f))_{n\in\mathbb{N}}\|_Y \leq A^{-1}\|\tilde{f} - f\|_B$. Quindi con tale equivalenza di norme si assicura la validità del principio/condizione (I).

Per esempio se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ è una funzione[1] a *banda limitata*, cioè per cui la sua trasformata di Fourier ha supporto compatto[2], allora esiste $\tau_0 > 0$ piccolo a sufficienza tale che per ogni $0 < \tau \leq \tau_0$

$$\|(f(\tau n))_{n\in\mathbb{Z}}\|_{l^p} \asymp \|f\|_{L^p},$$

Questa equivalenza di rappresentazione continua e discreta/numerica/digitale si realizza in particolare per la possibilità di *riprodurre* f dall'insieme dei suoi

---

[1]Per $p \in [1, \infty)$ si ha $L^p(X) = \{f : \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty\}$ lo spazio delle funzioni μ-misurabili su X e p-sommabili che munito della norma $\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$ definisce uno spazio normato. Se X è discreto si scriverà $l^p(X)$ anzichè $L^p(X)$.

[2]Illustreremo nel seguito il concetto di trasformata di Fourier e studieremo quindi le funzioni a banda limitata.

campioni. Infatti per un opportuna successione di funzioni a banda limitata $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{Z}$, si può scrivere:

$$f = \sum_n f(\tau n) f_n .$$

Così il processo di analisi o digitalizzazione (mappa dei coefficienti)

$$f \quad \stackrel{C}{\to} \quad (c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$$

può essere invertito sulla sua immagine da un processo di sintesi o riproduzione (mappa di recupero)

$$(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \quad \stackrel{R}{\to} \quad f \,.$$

L'equivalenza di norme espressa in (1) è equivalente alla continuità (o alla limitatezza) degli operatori lineari di analisi e sintesi rispettivamente.

Quindi, data una immagine e una funzione f che la rappresenti, si può considerare la decomposizione astratta in pacchetti di informazione numerici e discreti:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & f & & & \\ & & \swarrow & \downarrow & \searrow & & \\ \ldots & & c_{k-1}(f) & c_k(f) & c_{k+1}(f) & & \ldots \end{array}$$

magari indipendenti o correlati tra loro. Ma una decomposizione allo scopo di essere "utile" e fedele (ossia che garantisca che le operazioni numeriche equivalgano a operazioni sulla rappresentazione continua) deve essere associata ad una riproduzione/sintesi:

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & & c_{k-1}(f) & c_k(f) & c_{k+1}(f) & & \ldots \\ & & & & & & \\ & & \searrow & \downarrow & \swarrow & & \\ & & & f & & & \end{array}$$

È inoltre piuttosto intuitivo che se i pacchetti di informazione sono totalmente indipendenti allora possibili errori sono individualmente interpretati da ciascun elemento $c_n(f)$ di informazione con possibili errori importanti locali/globali nella consequente sintesi/ricostruzione. D'altra parte, possibili correlazioni tra i pacchetti di informazione possono *distribuire* gli errori su tutto l'insieme dei dati, magari riducendo cattive distorsioni locali, magari compensando completamente un errore prodotto ad un certo punto, recuperandolo in un punto successivo. Questo si realizza e può essere intepretato come una intrinseca ridondanza della rappresentazione numerica/digitale: la ridondanza di informazione è piuttosto comune in natura ed è fortemente raccomandabile ogni volta che errori si possono presentare e il grado di ridondanza dovrebbe quindi dipendere dalla frequenza di tali possibili errori. Basti giusto pensare al DNA umano: è un lungo flusso di informazioni ove solo una minima parte è considerata effettivamente "utile". Il resto è protezione e parte in qualche senso ridondante. Alcune modificazioni possono essere compensate, e, magari, i loro effetti negativi essere controllati o ridotti. Questo corrisponde al principio/condizione (II) e alla seguente formulazione matematica:

per una medesima operazione di sintesi/ricostruzione $R : Y \to B$ definita da un insieme di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esistono molteplici operazioni di analisi/decomposizione $C : B \to Y$ tali che $I_B = R \circ C$.

Questo equivale a dire che possono esistere $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(d_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ distinti tali che

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(f) f_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n(f) f_n$$

Quindi un processo di digitalizzazione ridondante può offrire diverse possibili realizzazioni e si può quindi adattare la scelta di una realizzazione, in dipendenza del particolare uso che se ne vuol fare. A prima vista, la ridondanza può considerarsi in contrasto con il concetto di compressione. Come si vedrà in seguito, in realtà un sistema ridondante di *pattern* (pacchetti di informazione) può aumentare la possibilità di identificazione: è vero che due differenti pattern possono condividere parte del medesimo contenuto di informazione, ma uno può corrispondere meglio alla data funzione: "più grande è il dizionario, tante più frasi si è in grado di costruire".

Il corso e le note descrivono quindi i fondamenti matematici per la costruzione di sistemi di digitalizzazione fedeli (completi), stabili (I) e in alcuni casi ridondanti (II). Verranno mostrate infine applicazioni per la rappresentazione di immagini, la compressione e l'identificazione di immagini a meno di trasformazioni affini (rotazioni, dilatazioni e traslazioni). Le note sono accompagnate da esercizi che si consiglia vivamente di svolgere per una miglior comprensione e per sviluppare una capacità d'uso degli strumenti. Alcuni esercizi suggeriti sono di carattere pratico, essenzialmente implementazioni al computer. Il corso si limita ad una analisi dei segnali in spazi di Hilbert (essenzialmente L^2, l^2) ed è diviso in quattro lezioni.

1. Dopo una breve introduzione sugli spazi di Hilbert, descriveremo il concetto di sviluppo in serie di Fourier, trasformata di Fourier e sua implementazione discreta. L'algoritmo FFT (Fast Fourier Transform).

2. Formula della somma di Poisson. Teoria del campionamento per funzioni a banda-limitata e conversioni digitale-analogico. Stime degli errori di aliasing per funzioni non a banda-limitata. Deduzione di un primo esempio di sistema tempo-frequenza (frame di Gabor) e tempo-scala (ondine-wavelets). Accenni al campionamento irregolare.

3. Frame in spazi di Hilbert. Analisi tempo-frequenza e frame di Gabor, continue e discrete e implementazione dei duali. Applicazioni ai segnali audio e alla compressione di immagini. Accenni sulle ondine.

4. Generalizzazione delle frame di Gabor su geometria circolare: le armoniche circolari discrete. Rappresentazione di immagini secondo frame di armoniche circolari, proprietà rispetto all'azione di rotazioni. Metodi ed algoritmi di calcolo per l'indentificazione di immagini. Discussione del caso applicativo della ricostruzione assistita dal computer di affreschi minutamente frammentati.

M. Fornasier Vienna, gennaio 2003.

Capitolo 1

Serie e trasformate di Fourier

"... il primo tra gli uomini di scienza Europei ..."
scrisse Joseph-Louis Lagrange, descrivendo Joseph Fourier.

Si vuole iniziare questa lezione cercando di mettere in evidenza l'importanza che l'analisi armonica o di Fourier hanno avuto nella storia della matematica moderna e delle sue molteplici attuali applicazioni.

Si possono sintetizzare una varietà di funzioni complicate da pure sinusoidi nello stesso modo con cui si produce un accordo di do maggiore premendo i tasti (do, mi, sol) di un piano. Una versione geometrica di questa idea forma la base del modello antico di Ipparco e Tolomeo per il moto planetario (*Almagets*, II secolo). È però stato Joseph Fourier (http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fourier.html) che sviluppò i moderni metodi di uso delle serie e degli integrali trigonometrici, nello studio del flusso di calore nei solidi (*Analytical Theory of Heat*, 1815). Oggi, l'analisi di Fourier è una branca della matematica piuttosto evoluta e ha sviluppato un importante numero di applicazioni[1].

- Il concetto di funzione, di integrale di Riemann e di Lebesgue, i concetti di convergenza puntuale, uniforme e in media, la teoria degli insiemi di Cantor, la teoria delle distribuzioni di Schwartz sono attribuite da alcuni ricercatori (per esempio S. Bochner, Fourier series came first, Amer. Math. Monthly, 86 (1979), 197-199), in parte come conseguenze dello sforzo di valutare quando una rappresentazione di Fourier è valida e in che senso. Comunque l'analisi di Fourier è un campo molto aperto di investigazione:

[1] i seguenti dati sono ricavati dal libro [13]

le sue estensioni in matematica pura costituiscano una branca molto ricca dell'analisi e ancora oggi anche le possibilità applicative sono lontane dall'esaurirsi:

- l'articolo matematico più citato
  J. W. Cooley and J.W. Tukey, An algorithm for the machine computation of complex Fourier series, Math. Comp., 19 (1965), 297-301.
- Circa 3/4 dei premi Nobel in fisica sono stati assegnati a lavori svolti usando strumenti e concetti di analisi di Fourier.
  F. N. Magill, ed., *The Nobel Prize Winners — Physics*, Vol 1-3, Salem Press. Englewood Cliffs, NJ. 1989.
- Herbert Hauptmann (un matematico) e Jerome Karle hanno condiviso nel 1985 il premio Nobel per la chimica per aver mostrato come usare l'analisi di Fourier per determinare la struttura di grandi molecole dai dati di diffrazione di raggi X.
  W. A. Hendrickson, the 1985 Nobel Prize in Chemistery, Science 231 (1986), 362-364.
- Francis Crick, James Watson e Maurice Wilkins hanno ottenuto il premio Nobel per la medicina e la fisiologia nel 1962 per la scoperta della struttura molecolare del DNA. Questo fu il primo esempio (a cui Huptmann e Karle si sono ispirati) dell'uso dell'analisi di Fourier sui dati provenienti dalla diffrazione di raggi X .
- Il numero enorme di prodotto tecnologici (CD-DVD, TV ad alta definizione, telefoni digitali, strumenti per indagini biomediche (medical imaging) ...) basati sulla teoria del trattamento di segnali digitali, essenzialmente basata sull'analisi di Fourier.

Prima di addentrarci nello studio delle serie ed integrali di Fourier sarà utile richiamare alcune nozioni relative agli spazi di Hilbert astratti. Per le dimostrazioni dei risultati si veda per esempio [9] Capitolo 5.

1.1 Spazi di Hilbert

Definizione 1.1.1. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare $\langle u, v\rangle$ è una applicazione di $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ a valori in $\mathbb{C}$ tale che:*

(i) $\langle au + bv, z\rangle = a\langle u, z\rangle + b\langle v, z\rangle$ *per ogni* $u,v,z \in \mathcal{H}$ *e* $a, b \in \mathbb{C}$.

(ii) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ *per ogni* $u,v \in \mathcal{H}$.

(iii) $\langle u, u\rangle \in \mathbb{R}$, $\langle u, u\rangle \geq 0$ *per ogni* $u \in \mathcal{H}$ *e* $\langle u, u\rangle \neq 0$ *se* $u \neq 0$.

Ricordiamo che un prodotto scalare verifica la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v\rangle| \leq \langle u, u\rangle^{1/2}\langle v, v\rangle^{1/2} \qquad \forall u, v \in \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

e che $\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$ definisce una norma per $\mathcal{H}$.

Definizione 1.1.2. *Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale $\mathcal{H}$ munito di un prodotto scalare $\langle u,v\rangle$ e che è completo rispetto alla norma $\langle u,u\rangle^{1/2}$.*

Salvo indicazioni esplicite, nel corso di questo capitolo con $\mathcal{H}$ si indicherà sempre uno spazio di Hilbert.

Esempio 1.1.3. *Si porongono alcuni esempi:*

- *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Lo spazio vettoriale $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} | \int_\Omega |f|^2 dx < \infty\}$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare*
$$\langle u,v\rangle = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx.$$
- *Sia $\Omega_d \subset \mathbb{Z}^n$. Lo spazio vettoriale $l^2(\Omega_d) = \{f : \Omega_d \to \mathbb{C} | \sum_{k\in\Omega_d} |f(k)|^2 < \infty\}$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare*
$$\langle u,v\rangle = \sum_{k\in\Omega_d} u(k)\overline{v(k)}dx.$$
In particolare se $|\Omega_d| = d < \infty$ allora $l^2(\Omega_d) = \mathbb{C}^d$.

Definizione 1.1.4. *Sia E uno spazio vettoriale topologico. Diremo E' lo spazio duale topologico di E, cioè E'=$\{\varphi$ di E a valori in $\mathbb{C}$ | φ lineare e continua$\}$. Dati due spazi di Hilbert $\mathcal{H},\mathcal{K}$, l'insieme degli operatori lineari $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, cioè $T(au+bv) = aT(v)+bT(v)$, e che sono continui è uno spazio vettoriale che munito della norma $|||T|||_{\mathcal{H}\to\mathcal{K}} \equiv \sup_{u\in\mathcal{H},u\neq 0} \frac{\|Tu\|_\mathcal{K}}{\|u\|_\mathcal{H}}$ è uno spazio normato completo, cioè uno spazio di Banach che indicheremo con $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. In effetti, la continuità dell'operatore T si dimostra essere equivalente al fatto che la quantità $\sup_{u\in\mathcal{H},u\neq 0} \frac{\|Tu\|_\mathcal{K}}{\|u\|_\mathcal{H}}$ sia finita.*

In particolare se $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ porremo $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ e se $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ allora si ha $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K}) = \mathcal{H}'$.

Teorema 1.1.5 (Teorema di rappresentazione di Riesz-Frechet). *Sia $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert. Per ogni $\varphi \in \mathcal{H}'$ esiste una unica $f \in \mathcal{H}$ tale che*
$$\langle\varphi,v\rangle \equiv \varphi(v) = \langle v,f\rangle \qquad \forall v \in \mathcal{H}.$$
Inoltre si ha
$$\|f\| = \|\varphi\|_{\mathcal{H}'} \equiv sup_{\|v\|=1}|\langle\varphi,v\rangle|.$$

Proposizione 1.1.6 (Disuguaglianza di Bessel). *Sia $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un insieme ortonormale in $\mathcal{H}$ e cioè $\langle u_\alpha,u_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ ove $\delta_{\cdot,\cdot}$ è il simbolo di Kronecker. Allora per $x \in \mathcal{H}$:*
$$\sum_{\alpha\in A} |\langle x,u_\alpha\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$
In particolare $\{\alpha|\langle x,u_\alpha\rangle \neq 0\}$ è numerabile.

Teorema 1.1.7 (Fourier). *Sia $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un insieme ortonormale numerabile. Allora sono equivalenti:*

(i) $x = \sum_{\alpha\in A}\langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha$ *per ogni* $x \in \mathcal{H}$.

(ii) (Eguaglianza di Parseval) $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A}|\langle x, u_\alpha\rangle|^2$ *per ogni* $x \in \mathcal{H}$.

(iii) (Completezza) Se $x \in \mathcal{H}$ *e se* $\langle x, u_\alpha\rangle = 0$ *per ogni* α, *allora* $x = 0$.

Reciprocamente, se la successione $\langle x, u_\alpha\rangle$ *è tale che* $\sum_{\alpha\in A}|\langle x, u_\alpha\rangle|^2 < \infty$, *allora la serie* $\sum_{\alpha\in A}\langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha$ *è convergente in* $\mathcal{H}$ *e converge a* x. *Un insieme ortonormale che verifichi una delle precedenti condizioni è detto base ortonormale per lo spazio di Hilbert* $\mathcal{H}$.

Che cosa rappresentano i coefficienti $\{\langle x, u_\alpha\rangle\}_{\alpha\in A}$? In effetti, $\langle x, u_\alpha\rangle$ calcola la "somiglianza" di x a u_α nella distanza definita dalla norma di $\mathcal{H}$. Insomma i coefficienti rappresentano una analisi costitutiva di un elemento x.

Teorema 1.1.8. *Ogni spazio di Hilbert ammette una base ortonormale.*

Definizione 1.1.9. *Uno spazio di Hilbert* $\mathcal{H}$ *è separabile se e soltanto se possiede una base ortonormale numerabile. E in tale caso ogni base ortonormale di* $\mathcal{H}$ *è numerabile.*

1.2 Serie e trasformate di Fourier

Come si è osservato in 1.1.7, l'esistenza di una base ortonormale completa $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$, ossia tale per cui i coefficienti $\{\langle x, u_\alpha\rangle\}_{\alpha\in A}$ rappresentano **tutta e sola** l'informazione relativa all'elemento $x \in \mathcal{H}$, garantisce la riproducibilità dell'elemento x come sovrapposizione degli elementi di base $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Con il linguaggio adottato nell'introduzione alle note, $B = \mathcal{H}$, $Y = l^2(A)$ e si ha immediatamente che la mappa

$$C : \mathcal{H} \to l^2(A), \quad C(x) = \{\langle x, u_\alpha\rangle\}_{\alpha\in A}, \tag{1.2}$$

è un esempio di digitalizzazione stabile e completa ed invertibile dalla mappa di sintesi $R = R_{\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}}$ data da

$$R : l^2(A) \to \mathcal{H}, \quad R(\{c_\alpha\}_{\alpha\in A}) = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha u_\alpha. \tag{1.3}$$

Infatti, per 1.1.7 (i) si ha che $I_{\mathcal{H}} = R \circ C$. La stabilità, secondo il principio (I) e l'equivalenza di norme (1) è data dall'eguaglianza di Parseval 1.1.7 (ii). In tal caso, quindi $A = B = 1$. In particolare, $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, l^2(A))$ e $R \in \mathcal{L}(l^2(A), \mathcal{H})$. Proviamo a calcolare ora $|||C|||_{\mathcal{H}\to l^2(A)}$: la norma di $\vec{c} = (c_\alpha)_{\alpha\in A} \in l^2(A)$ è data da $\| \vec{c} \|_{l^2} = \left(\sum_{\alpha\in A}|c_\alpha|^2\right)^{1/2}$ e quindi

$$|||C|||_{\mathcal{H}\to l^2(A)} = \sup_{x\in\mathcal{H}, x\neq 0} \frac{\|C(x)\|_{l^2}}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathcal{H}, x\neq 0} \frac{\left(\sum_{\alpha\in A}|\langle x, u_\alpha\rangle|^2\right)^{1/2}}{\|x\|}.$$

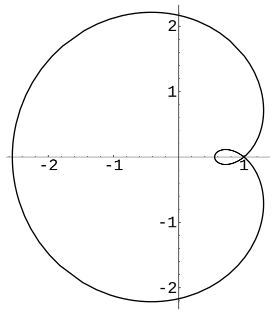


Figura 1.1: Orbita di Marte vista dalla Terra secondo il modello tolemaico

Ma per l'eguaglianza di Parseval 1.1.7 (ii) tale quantità è $|||C|||_{\mathcal{H}\to l^2(A)} = 1$. Per esercizio si provi a calcolare $|||R|||_{l^2(A)\to\mathcal{H}}$.

Esercizio 1.2.1. *Dimostrare che il sistema di digitalizzazione dovuto ad una base ortonormale completa* **non** *è ridondante. Cioè si dimostri che esiste una unica mappa C tale per cui $I_{\mathcal{H}} = R \circ C$, ove R è fissata come in formula (1.3). Cosa succede ora se alla base ortornormale aggiungo un nuovo ulteriore elemento, chimiamolo $u_* \in \mathcal{H}$? Per la mappa di sintesi $R = R_{\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}\cup\{u_*\}}$ esiste ancora una mappa di analisi C tale che $I_{\mathcal{H}} = R \circ C$. È tale mappa unica? È possibile stimare le costanti A, B in questo caso?*

Ma allora la ricerca di basi ortonormali permette di costruire dei sistemi per digitalizzare segnali in maniera stabile e completa, anche se non neccessariamente ridondante. Inoltre data una base ortonormale è sempre possibile costruire un sistema che è anche ridondante.
Un esempio, classico di base ortonormale è proprio quello suggerito da J. Fourier nel 1815 per la risoluzione del problema del calore.

Diamo ora una semplice interpretazione geometrica di come si costruisce una serie di Fourier che si ispira al modello tolemaico della rivoluzione dei pianeti. Se r_P è la distanza media di un pieneta P dal sole in unità astronomiche e $\tau_P > 0$ è il tempo di rivoluzione in anni e se S è un satellite di P che orbita attorno a P con una distanza media r_S e con un tempo di rivoluzione $\tau_S > 0$ allora la traiettoria di S è semplicemente data da $z_S(t) = r_P e^{2\pi it/T_Q} + r_S e^{2\pi it/T_S}$. Analogamente la traiettoria di un secondo pianeta Q visto dal pianeta P sarà data da $z_{P\to Q}(t) = r_Q e^{2\pi it/T_Q} - r_P e^{2\pi it/T_P}$. Se per esempio si considera il pianeta P come la Terra e il pianeta Q Marte si ha che $r_P = 1 = \tau_P$ e $r_Q = 1.55, \tau_Q = 1.88 \approx 2$. La traiettoria di Marte vista dalla Terra si muove nel cielo notturno nella stessa direzione della Luna. Tuttavia ci sono circa tre mesi ogni anno in cui il pianeta si muove in direzione opposta (Fig. 1).

Una serie trigonometrica (o una serie di Fourier) in forma complessa di periodo $\tau > 0$ è allora una serie di funzioni del tipo

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x/\tau} \tag{1.4}$$

Posto

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \tag{1.5}$$

si ha, per le formule di Eulero ($e^w = \cos(w) + i\sin(w)$), che

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi k x/\tau) + b_k \sin(2\pi k x/\tau)) \right) \tag{1.6}$$

Si osservi ora che $\{\frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{2\pi i n x/\tau}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $\{\sqrt{\frac{\tau}{2}}\cos(2\pi k x/\tau)\}_{k\in\mathbb{N}} \bigcup \{\sqrt{\frac{\tau}{2}}\sin(2\pi k x/\tau)\}_{k\in\mathbb{N},k\neq 0}$ sono due sistemi di funzioni ortonormali nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(0,\tau)$. Per esempio (vedi 1.1.3)

$$\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{2\pi i n x/\tau}, \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{2\pi i m x/\tau} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{2\pi i n x/\tau} \overline{e^{2\pi i m x/\tau}} dx = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{2\pi i (n-m) x/\tau} dx =$$

$$= \int_0^1 e^{2\pi i (n-m) x} dx = \delta_{m,n}.$$

Ci si chiede se costituiscano basi ortonormali complete. Si consideri ora la funzione data da

$$f(x) = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

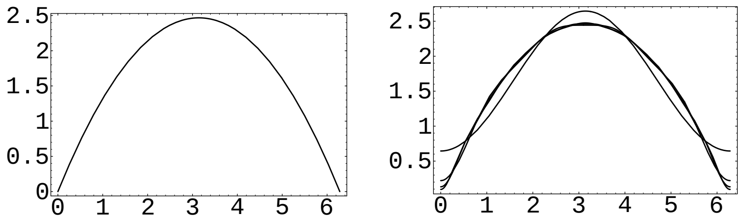


Figura 1.2: $f(x) = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$.

Si osservi che la funzione è simmetrica e che quindi i coefficienti $b_k(f) = \langle f, \sqrt{\frac{\tau}{2}}\sin(2\pi k x/\tau)\rangle$ sono nulli per ogni k. Calcolando (per esercizio! Si integra due volte per parti) invece i coefficienti $a_k(f) = \langle f, \sqrt{\frac{\tau}{2}}\cos(2\pi k x/\tau)\rangle$ si ottiene che la serie trigonometrica (1.6) relativa alla funzione f è data da

$$T_f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}. \tag{1.7}$$

Come si vede da Fig. 1.2 la serie converge alla funzione f.

Teorema 1.2.2 (Convergenza puntuale). *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodica di periodo $\tau > 0$ localmente sommabile. Supponiamo che in $x_0 \in \mathbb{R}$ esistano finiti i limiti $f(x_0)^+$ e $f(x_0^-)$ e che inoltre i rapporti incrementali destro e sinistro*

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0^+)}{h}, \quad \frac{f(x_0-h) - f(x_0^-)}{h},$$

siano limitati per $h > 0$ piccolo. Allora la serie di Fourier T_f di f converge nel punto x_0 alla media dei valori dei limiti destro e sinistro di f in x_0:

$$T_f(x_0) = \frac{1}{\tau} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e^{2\pi i n\xi/\tau}\rangle e^{2\pi i n x/\tau} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

In particolare se $f'(x_0)$ esiste allora $T_f(x_0) = f(x_0)$.

Dimostrazione. Si veda per esempio [3] VI.6. □

Questo fa supporre che 1.1.7 (i) sia verificabile e che quindi il sistema sia completo. Vediamo come si procede per una traccia della dimostrazione (eventualmente da percorrere come esercizio).

Un insieme $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ si dice denso in $\mathcal{H}$ se per ogni $x \in \mathcal{H}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $p \in \mathcal{S}$ tale che $\|x - p\| \leq \varepsilon$. Chiaramente questo equivale a dire che esiste una successione $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tale che $p_n \to x$ per $n \to \infty$. Ma allora se si dimostra che 1.1.7 (ii) è vera per un sottoinsieme denso S allora è vera anche per $\mathcal{H}$. Infatti, la mappa $x \to \|x\|$ è continua in $\mathcal{H}$: se $x_n \to x$ allora deve essere che $\|x_n\| \to \|x\|$. Calcolando $\langle x_n - x, x + x_n\rangle$ ed utilizzando la disuguaglianza di Schwarz si ottiene il limite. Inoltre, per $p \in \mathcal{H}$ fissato, l'operatore $x \to \langle x, p\rangle$ è lineare (vedi 1.1.1 (i)) e continuo (dalla disuguaglianza di Schwarz e Definizione 1.1.4). Ma allora

$$0 = \|p_n\|^2 - \sum_{\alpha\in A} |\langle p_n, u_\alpha\rangle|^2 \to \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in A} |\langle x, u_\alpha\rangle|^2.$$

Per $\mathcal{H} = L^2(0,\tau)$, lo spazio vettoriale delle funzioni a scalino $\mathcal{S}$ è un insieme denso. È allora sufficiente mostrare 1.1.7 (ii) per funzioni del tipo $\chi_{[0,a]}$ per $0 < a < \tau$. Calcolando i coefficienti di Fourier complessi $c_n(\chi_{[0,a]})$ si ottiene che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle \chi_{[0,a]}, \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{2\pi i n x/\tau}\rangle|^2 = \frac{a^2}{\tau} + \frac{\tau}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi n a}{\tau}\right)}{n^2}\right)$$

Dal teorema 1.2.2 e da (1.7) sappiamo qual è il valore della serie all'interno delle parentesi, cioè $f(2\pi a/\tau)$. Da ciò si conclude facilmente che

$$a = \|\chi_{[0,a]}\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle \chi_{[0,a]}, \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{2\pi i n x/\tau}\rangle|^2.$$

Come volevasi.

Ma allora per $f \in L^2(0,\tau)$ si ha che

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{2\pi i n x/\tau} \rangle \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{2\pi i n x/\tau}.$$

Per funzioni $f \in L^2(0,\tau)$ si definisce la trasformata di Fourier $\mathcal{F} : L^2(0,\tau) \to l^2(\mathbb{Z})$ definita da

$$\mathcal{F}f(n) = \langle f, \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{2\pi i n x/\tau} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{(0,\tau)} f(x) e^{-2\pi i n x/\tau} dx. \tag{1.8}$$

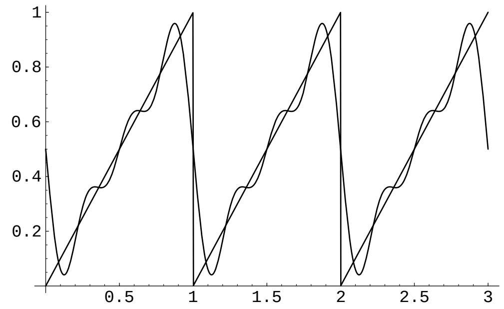


Figura 1.3: Serie di Fourier relativa a $f(x) = x - [x]_-$.

Cosa succede se facciamo tendere $\tau \to \infty$?

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{2\pi i n x/\tau} \rangle \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{2\pi i n x/\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\tau/2}^{-\tau/2} f(\xi) e^{-2\pi i n \xi/\tau} d\xi \right) e^{2\pi i n x/\tau}.$$

L'ultima somma è in effetti una somma di Riemann. Questo fa pensare che se f è una funzione sommabile su $\mathbb{R}$ allora si possa scrivere qualcosa del tipo

$$f(x) = \lim_{\tau\to\infty} f(x)\chi_{[\tau/2,-\tau/2]} =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{2\pi i n x/\tau} \rangle \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{2\pi i n x/\tau} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-2\pi i w \xi} d\xi \right) e^{2\pi i \xi w} dw.$$

Quando e in che senso tale scrittura sia lecita è però da provare e da valutare. In verità si ha il seguente

Teorema 1.2.3 (Trasformata di Fourier). *Si definisce per $f \in L^1(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier, data da:*

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}f(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i w x} dx. \tag{1.9}$$

Inoltre, se anche $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ allora la trasformata di Fourier è invertibile.

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(w) e^{2\pi i w x} dw. \tag{1.10}$$

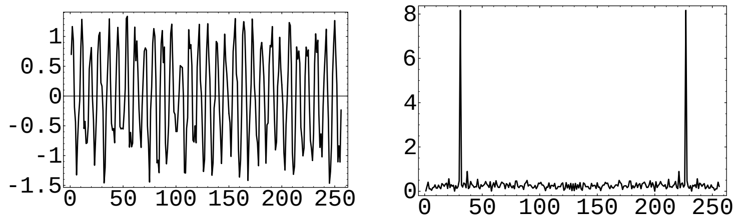


Figura 1.4: Segnale sinusoidale affetto da rumore: sono evidenti due componenti in frequenza

Se $f \in L^1 \bigcap L^2$ *allora* $\mathcal{F} : L^1 \bigcap L^2 \to L^2$ *è un operatore lineare e continuo che si estende in maniera unica su tutto* L^2. *In particolare,* $\mathcal{F}$ *è un isomorfismo isometrico, ossia vale la formula di Plancherel (eguaglianza di Parseval):*

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2. \tag{1.11}$$

Inoltre, se $f, g \in L^2$ *allora* $\langle f, g\rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle$.

Dimostrazione. Le dimostrazioni si possono trovare in [9] Capitolo 8. □

Qual è il significato della trasformata di Fourier? A che cosa serve? La trasformata di Fourier rappresenta il contenuto in frequenza di una funzione/segnale. Ci dice cioè quali sono i costituenti (importanti) oscillanti di un segnale e le loro frequenze distintive di oscillazone. La fortuna dell'analisi di Fourier risiede essenzialmente nel fatto che è in grado di descrivere uno dei comportamenti più frequenti in natura: i fenomeni ondulatori, molti dei quali sono regolati da sovrapposizioni di leggi del tipo

$$y_{\alpha,s_0}(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} e^{2\pi i s_0 t}, & t > 0 \\ 0, \quad t < 0. \end{cases}$$

La trasformata di Fourier di $y_{\alpha,s_0}(t)$ è detta *Lorenziana.* Quando, per esempio, delle molecole sono investite da una radiazione elettromagnetica, vengono indotte sovrapposizioni di oscillazioni smorzate come descritte dalla legge $y_{\alpha,s_0}(t)$. Ciascun costituente della molecola ha proprie oscillazioni distintive ed uniche. Le Lorenziane vengono dette in questo caso lo *spettro molecolare.* Da qui l'idea che è "costata" il premio Nobel a Richard Earnst per la chimica (1991) per lo sviluppo di uno strumento potente per determinare la struttura di molecole organiche complesse. Ma **dove** si trovano i costituenti? Dove sono localizzati gli atomi che caratterizzano una molecola? La trasformata di Fourier è uno strumento potente ma purtroppo ci dice solamente che alcuni costituenti sono presenti, ma non come si realizza la loro geometria in una molecola. Sta poi al chimico comprendere quale possa essere una forma ammissibile della molecola, in base ai possibili legami. Però, purtroppo non vi sono spesso univoche configurazioni. Occorrerebbe quindi uno strumento capace di dare sia l'informazione spaziale sia l'informazione di frequenza. Come vedremo nel seguito uno strumento matematico in grado di svolgere questo servizio è possibile portando la nostra capacità di analisi nello *spazio delle fasi* (spazio/tempo-frequenza).

Vogliamo ora discutere come sia possibile utilizzare nella pratica gli strumenti della analisi di Fourier. Gli esercizi proposti su funzioni semplici, ci mostrano che non è sempre banale poter calcolare espansioni in serie di Fourier. Nè è facile poter calcolare integrali di Fourier, per valutare una trasformata di Fourier. Per funzioni relativamente semplici come $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ il calcolo della trasformata di Fourier è tutt'altro che banale (si veda Esercizio 11 Cap. X.7 [3]). In tal caso, si ha $\mathcal{F}f(w) = \frac{\pi}{a}e^{-|w|a}$. Una funzione complessa $f(z)$ olomorfa (ossia derivabile) su un dominio Ω salvo che in un punto a, detto singolarità, si espande in una serie di potenze detta serie di Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$. Il coefficiente c_{-1} è detto residuo e si scrive $Res(f,a) = c_{-1}$. Si dimostra che se f è olomorfa in un dominio Ω contenente il semipiano $\{Im(z) \geq 0\}$ eccetto per un numero finito di singolarità non reali e se $\lim_{|z|\to\infty, Im(z)\geq 0} f(z) = 0$ allora si ha che per ogni $\alpha > 0$,

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum \{Res(f(\cdot)e^{i\alpha\cdot}, a), Im(a) > 0\}.$$

Analogo risultato per $\alpha < 0$ e per $\{Im(z) < 0\}$, ma cambiando il segno dell'integrale. Il problema si riduce quindi a verificare tutte le ipotesi e al calcolo dei residui. Comunque è una procedura piuttosto laboriosa e non ragionevolmente applicabile in casi molto complessi. Inoltre, cosa si può fare con dati provenienti da sperimentazioni pratiche? Si potrebbero interpolare i dati con funzioni che sono olomorfe nei semipiani superiore ed inferiore, salvo un numero finito di singolarità, calcolare tutti i residui e sperare che la nostra interpolazione sia stata sufficientemente buona da poterci assicurare che anche la trasformata di Fourier sia ragionevolmente compatibile con il comportamento dei dati. Risulta evidente che un simile approccio in casi in cui il numero dei dati sia molto grande (come in tutti i segnali naturali!) non sia attuabile.

Risulta invece più ragionevole tentare una approssimazione su un dominio discreto e cercare una definizione opportuna di trasformata di Fourier discreta che, in qualche senso, possa approssimare bene il comportamento della trasformata di Fourier continua. Inoltre, dovremmo assicuraci che il calcolo della trasformata di Fourier discreta (DFT) possa essere eseguito in tempi ragionevoli: altrimenti non ne sarebbe valso lo sforzo. Cerchiamo ora di definire quindi una trasformata di Fourier discreta e rinviamo la discussione sulla approssimazione della trasformata di Fourier continua alla prossima lezione, ove introdurremo la teoria del campionamento e le opportune stime di errore.

Procederemo, come al solito, con il linguaggio degli spazi di Hilbert. Si consideri il gruppo ciclico $\mathbb{Z}_n = \frac{Z}{nZ}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ delle classi resto modulo n. In pratica si può scrivere

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\},$$

ricordandosi che tali elementi rappresentano i resti dei numeri interi rispetto alla divisione per n. Per esempio, in $\mathbb{Z}_3$ l'elemento $h=4$ corrisponde all'elemento 1 poichè $3 = 3\cdot 1+\mathbf{1}$. Quindi, in particolare, $2+2=1$ in $\mathbb{Z}_3$. Si ha inoltre, $l^2(\mathbb{Z}_n) = \{(c_0,\ldots,c_{n-1})|\sum_{k=0}^{n-1}|c_i|^2<\infty\} = \mathbb{C}^n$. Si provi per induzione (esercizio!) che

$$1+z+z^2+\ldots+z^{n-1} = \begin{cases} n, & z=1 \\ (z^n-1)/(z-1), altrimenti. \end{cases} \tag{1.12}$$

Ma allora non è difficile mostrare che per $z = e^{2\pi i(k-l)/n}$ si ha

$$\langle \frac{1}{\sqrt{n}}(e^{2\pi ikl/n})_{l\in\mathbb{Z}_n}, \frac{1}{\sqrt{n}}(e^{2\pi ilm/n})_{m\in\mathbb{Z}_n}\rangle = \sum_{m=0}^{n-1} e^{2\pi im(k-l)/n} = \delta_{k,l}.$$

Quindi, $\{\frac{1}{\sqrt{n}}(e^{2\pi ikl/n})_{l\in\mathbb{Z}_n}\}_{k\in\mathbb{Z}_n}$ è una base ortonormale completa per lo spazio di dimensione finita $l^2(\mathbb{Z}_n)$. Ma allora si ha immediatamente che, ogni segnale $\mathbf{f}$ di lunghezza n si scrive come:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\langle \mathbf{f}, (e^{2\pi ikl/n})_{l\in\mathbb{Z}_n}\rangle (e^{2\pi ikl/n})_{l\in\mathbb{Z}_n}. \tag{1.13}$$

Inoltre anche

$$\mathcal{F}\mathbf{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{n}}\langle \mathbf{f}, (e^{2\pi ikl/n})_{l\in\mathbb{Z}_n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=0}^{n-1}\mathbf{f}(l)e^{-2\pi ikl/n}, \tag{1.14}$$

è a sua volta un segnale di lunghezza n. L'operatore $\mathcal{F}: l^2(\mathbb{Z}_n) \to l^2(\mathbb{Z}_n)$ è detto trasformata di Fourier discreta o DFT e realizza tutte le proprietà analoghe a quelle del Teorema 1.2.3. Per esempio, si dimostri per esercizio che

$$\|\mathbf{f}\|_{l^2} = \|\mathcal{F}\mathbf{f}\|_{l^2}.$$

Quanto ci costa calcolare questa trasformata? Assumendo che una operazione equivalga ad una somma o ad una moltiplicazione allora il costo computazionale è n somme e moltiplicazioni per n volte e cioè n^2. Costando una operazione complessa quattro volte una singola reale, il costo totale è $C(DFT)(n) = 4n^2$. Oggi un PC è in grado di eseguire 10^7 operazioni/secondo e quindi è in grado di produrre una DFT di un segnale di lunghezza $n = 1000$ in

$$4\cdot 1000^2 \cdot \frac{1}{10^7} = 0.4\,\mathrm{sec}\,.$$

Ma già per un segnale di lunghezza $n = 16384 = 2^{14}$ il costo è di 107 sec. Un semplice segnale audio di pochi secondi, adeguatamente campionato, può superare lunghezza $n = 2^{14}$ senza difficoltà. Questo fa comprendere quanto sia importante poter ridurre ulteriormente questo tempo di calcolo al fine di poter veramente rendere possibile un trattamento di segnali digitali.

1.3 L'algoritmo della Fast Fourier Transform

Allo scopo di comprendere l'algoritmo della Fast Fourier Transform (una maniera molto intelligente di svolgere il conto della DFT con un costo computazionale molto inferiore proposto con grande successo in [4]) occorre approfondire alcune proprietà della DFT. Dato un segnale $\mathbf{f}$ di lunghezza n, diremo operatore di traslazione, operatore definito da

$$T_m\mathbf{f}(k) = \mathbf{f}(k-m), \quad m \in \mathbb{Z}_n. \tag{1.15}$$

e l'operatore di modulazione come

$$M_m\mathbf{f}(k) = e^{2\pi imk/n}\mathbf{f}(k), \quad m \in \mathbb{Z}_n. \tag{1.16}$$

Inoltre definiremo gli operatori di *upsampling* e di duplicazione come

$$U\mathbf{f}(h) = \begin{cases} \mathbf{f}(h/2), & mod(h,2) = 0 \\ 0, & altrimenti, \end{cases} \tag{1.17}$$

$$D\mathbf{f} = \frac{1}{2}(\mathbf{f},\mathbf{f}), \tag{1.18}$$

per $h \in \mathbb{Z}_{2n}$. L'azione della DTF rispetto a questi operatori è data da

$$\mathcal{F} \cdot T_m\mathbf{f}(k) = M_{-m} \cdot \mathcal{F}\mathbf{f}(k), \quad \mathcal{F} \cdot M_m\mathbf{f}(k) = T_m \cdot \mathcal{F}\mathbf{f}(k). \tag{1.19}$$

$$\mathcal{F} \cdot U\mathbf{f}(h) = D \cdot \mathcal{F}\mathbf{f}(h). \tag{1.20}$$

Si consideri ora un vettore di lunghezza $n = 2^2 = 4$ fato da $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$. Vediamo come si possa assemblare $\mathbf{f}$ dai singoli f_i con le operazioni semplici (1.15) e (1.17)

$$
\begin{array}{cccc}
f_0 & f_2 & f_1 & f_3 \\
\downarrow U & \downarrow U & \downarrow U & \downarrow U \\
(f_0,0) & (f_2,0) & (f_1,0) & (f_3,0) \\
\downarrow I & \downarrow T_1 & \downarrow I & \downarrow T_1 \\
(f_0,0) & (0,f_2) & (f_1,0) & (0,f_3) \\
\searrow & \downarrow & \downarrow & \swarrow \\
 & (f_0,f_2) & (f_1,f_3) & \\
 & \downarrow U & \downarrow U & \\
 & (f_0,0,f_2,0) & (f_1,0,f_3,0) & \\
 & \downarrow I & \downarrow T_1 & \\
 & (f_0,0,f_2,0) & (0,f_1,0,f_3) & \\
 & \searrow & \swarrow & \\
 & & \mathbf{f} &
\end{array} \tag{1.21}
$$

Osservato che $\mathcal{F}f_i = f_i$ per ogni $i = 0, ...f_{n-1}$ si ha che applicando la DFT al precedente diagramma e sostituendo a U, T_1 rispettivamente $D, M_{-1}1$ come dato dalle regole di commutazione (1.19) (1.20), si genera un algoritmo ricorsivo di calcolo della $\mathcal{F}\mathbf{f}$.

$$
\begin{array}{cccc}
f_0 & f_2 & f_1 & f_3 \\
\downarrow D & \downarrow D & \downarrow D & \downarrow D \\
(*,*) & (*,*) & (*,*) & (*,*) \\
\downarrow I & \downarrow M_{-1} & \downarrow I & \downarrow M_{-1} \\
(*,*) & (*,*) & (*,*) & (*,*) \\
\searrow & \downarrow & \downarrow & \swarrow \\
 & (*,*) & (*,*) & \\
 & \downarrow D & \downarrow D & \\
 & (*,*,*,*) & (*,*,*,*) & \\
 & \downarrow I & \downarrow M_{-1} & \\
 & (*,*,*,*) & (*,*,*,*) & \\
 & \searrow & \swarrow & \\
 & \multicolumn{2}{c}{\mathcal{F}\mathbf{f}} &
\end{array}
\tag{1.22}
$$

bbiamo usato un asterisco per denotare i vettori componenti degli stati intermedi del processo. Cerchiamo di calcolare quanto costa l'algoritmo: innanzi tutto assumiamo che il costo effettivo del calcolo di I e di D sia ininfluente. Occorre quindi calcolare solamente il costo di ogni singola $M_{-1}1$ che applicata ad un vettore di lunghezza l costa infatti $4(l-1)$. Si assuma $n = 2^m$. Partendo dal basso del diagramma (1.21) viene effettuata una sola M_1 su una lunghezza pari al vettore originario e quindi un costo dato da $2^0(\frac{n}{2^0} - 1)$. Tale costo va sommato a quello dello stadio superiore, dove occorre eseguire $2(\frac{n}{2} - 1)$ operazioni corrispondenti a 2 volte M_1 calcolata su vettori di metà lunghezza dell'originale. E così via, ottenendo che il costo totale è dato da

$$
C(FFT)(n) = 4 \sum_{k=0}^{m-1} 2^k \left(\frac{n}{2^k} - 1\right) =
$$

$$
= 4 \sum_{k=0}^{m-1} \left(2^m - 2^k\right) = 4\left(m2^m - 2^m + 1\right) = 4(n \log_2(n) - n + 1). \tag{1.23}
$$

Quindi un PC odierno è in grado di produrre una FFT di un segnale di lunghezza $n = 16384$ in

$$
4(2^{14}14 - 2^{14} + 1) \cdot \frac{1}{10^7} = 0.084\,\text{sec},
$$

contro i 107 sec che ci si dovrebbe aspettare dalla DFT!

Lo svolgimento completo dell'esercizio seguente, garantisce la piena comprensione della lezione e permette di sviluppare una competenza pratica nell'uso degli strumenti teorici sino a qui illustrati.

Esercizio 1.3.1. *Si implementi in codice C/C++ o Matlab*

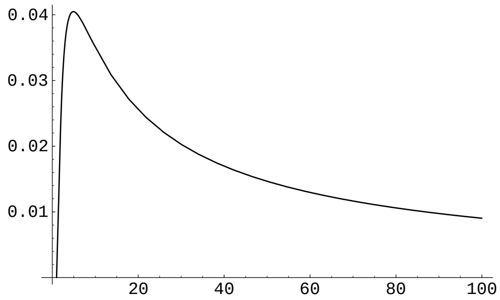


Figura 1.5: Il rapporto $\frac{C(FFT)(n)}{C(DFT)(n)}$ per n crescente

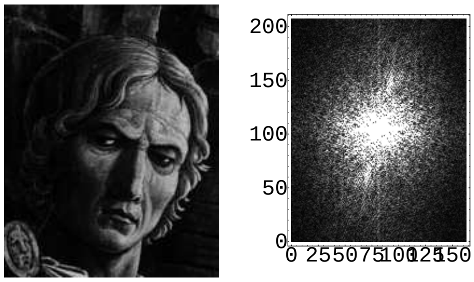


Figura 1.6: Immagine digitale e sua trasformata di Fourier

(DFT) *l'algoritmo di calcolo della DFT, eseguita direttamente;*

(H-DFT) *l'algoritmo di Horner per il calcolo di polinomio; un polinomio* $p(x) = a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1}$ *può anche essere scritto come*

$$p(x) = a_0 + z(...z(a_{n-3} + z(a_{n-2} + z a_{n-1})).$$

Tale schema è più vantaggioso del calcolo diretto del polinomio, **ma** *funziona solo per la valutazione puntuale. Si osservi che, posto* $w = e^{2\pi i/n}$ *e* $z = w^k$ *si ha che*

$$\mathcal{F}\mathbf{f}(k) = \mathbf{f}(0) + \mathbf{f}(1)z + \ldots + \mathbf{f}(n-1)z^{n-1}.$$

Quindi è possibile applicare lo schema di Horner al calcolo **puntuale***(!) della DFT,*

(FFT) *l'algoritmo ricorsivo della FFT, come qui descritto per* $n = 2^m$*. Implementare inoltre l'antitrasformata di Fourier, cioè quell'operatore* $\mathcal{F}^{-1}$ *tale per cui*

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\mathbf{f} = \mathbf{f}.$$

Si confrontino i tempi di calcolo di queste diverse procedure. Utilizzanto l'algoritmo di calcolo della FFT unidimensionale, implementare un algoritmo in *grado di calcolare la FFT di un segnale bidimensionale (una immagine).*

Si è visto che la trasformata di Fourier continua della funzione $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ *è data da* $\mathcal{F}f(w) = \frac{\pi}{a}e^{-|w|a}$. *Considerare quindi il campionamento di passo* $\tau > 0$ *di* f *dato da*

$$\mathbf{f}(h) = f(\tau h), \quad h = -n/2, -(n-1)/2, \dots, n/2-1$$

Calcolare la FFT di $\mathbf{f}$ *per diversi valori di* τ, n *e* a. *Si confronti il risultato con la trasformata di Fourier continua campionata: si assomigliano? La strategia discreta per il calcolo delle trasformate di Fourier è buona?*

Abbiamo illustrato l'algoritmo della FFT per $n = 2^m$. Sia $w = e^{2\pi i/n}$ e si definisca la matrice

$$\mathcal{F}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & \dots & w^{2\cdot(n-1)} \\ 1 & w^3 & \dots & w^{3\cdot(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w^{n-1} & \dots & w^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

La DFT si calcola anche eseguendo

$$\mathcal{F}\mathbf{f} = \mathcal{F} * \mathbf{f},$$

ove per "$*$" si intende il prodotto matrice-vettore. La matrice $\mathcal{F}_n$ si fattorizza come segue:

$$\mathcal{F}_n = \begin{pmatrix} I_{n/2} & Q_{n/2} \\ I_{n/2} & P_{n/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{n/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_{n/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{n/2} \\ L_{n/2} \end{pmatrix},$$

ove $I_{n/2}$ è la matrice identica e

$$Q_{n/2} = diag(1, w, w^2, \dots, w^{n-1}), \quad P_{n/2} = -Q_{n/2},$$

ove $diag(\mathbf{v})$ è la matrice diagonale con diagonale principale $\mathbf{v}$. Inoltre

$$H_{n/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{n/2} = rot(H_{n/2}, 1),$$

ove $rot(M, m)$ è la matrice generata da M per rotazione destra di m colonne: cioè le ultime m colonne prendono il posto delle prime m colonne che si sono spostate di indice verso destra di m volte. Questo implica che il calcolo della $\mathcal{F}_n$ può essere risolto ricorsivamente attraverso il calcolo di matrici $\mathcal{F}_{n/2^k}$ di ordine

$n/2^k$. Tale interpretazione equivale a (1.22). In effetti tale fattorizzazione della matrice (1.24) può essere generalizzata e dipende dalla fattorizzazione di n in termini di numeri primi $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots p_l^{m_l}$. Molte implementazioni della FFT realizzano tali fattorizzazioni della matrice (1.24) per primi piccoli, come $2, 3, 5$ e 7. Si veda [13] per maggiori approfondimenti. Uno dei pacchetti più efficienti e completi per il calcolo della FFT è la *Fastest Fourier Transform in the West* (FFTW[2]) sviluppata da M. Frigo e S. G. Johnson [10, 11]. La caratteristica di questa implementazione è data dalla sua adattabilità: infatti la FFTW non usa un algoritmo fissato per il calcolo della trasformata, ma adatta l'algoritmo della DFT ai dettagli della struttura hardware sottostante allo scopo di raggiungere le migliori prestazioni. Il calcolo ricorsivo cerca di lavorare su piccole strutture di dati che sono in grado di permanere nella *cache*, di più rapido accesso rispetto alla memoria *RAM*. Sfruttando in modo adattativo le caratteristiche hardware l'algoritmo tenta la miglior performance. In effetti, il calcolo della trasformata si spezza in due fasi: la *FFTW planner* costituisce un pre-calcolo in grado di apprendere quale sia il modo più veloce in quel momento per calcolare la trasformata e in seguito il *plan* viene passato alla *FFTW executor* che, in base alle informazioni del *plan* calcola la trasformata attuale. Calcolo di FFT mulidimensionali, reali e complesse e calcolo parallelo (per MPI) delle stesse sono disponibili nel pacchetto. Per maggiori informazioni per l'uso di tale libreria si veda [11]. La libreria è infatti liberamente scaricabile da internet da *http://www.fftw.org/*.

[2]La FFTW è una libreria C/C++, ma può essere richiamata anche da altri linguaggi di programmazione, come il Fortran. Inoltre, la FFT attualmente in uso nelle più recenti versioni di Matlab, dalla 6.1 in poi, monta la FFTW come libreria di calcolo.

Capitolo 2

Teoria del campionamento

Nella lezione precedente abbiamo discusso la costruzione di sistemi di digitalizzazione stabili per basi ortonormali. In particolare, si sono definite le basi di Fourier e si è visto come sia possible rappresentare rispetto a tali basi una varietà di segnali continui e discreti. In particolare, si è mostrato che i segnali discreti possono essere trattati in modo estremamente efficiente usando l'algoritmo della FFT. In questa lezione si vuole discutere la qualità di approssimazione che la rappresentazione discreta offre rispetto alla rappresentazione continua e le relazioni tra le differenti versioni della trasformata di Fourier (1.8,9,14). Avendo utilizzato il medesimo simbolo $\mathcal{F}$ per le differenti definizioni per domini continui limitati, illimitati e discreti, si invita il lettore a prestare attenzione all'interpretazione del simbolo a seconda della funzione a cui è applicato, se una funzione periodica o a supporto limitato, oppure definita su tutto $\mathbb{R}^d$ o discreta. Nel seguito assumeremo di lavorare in dimensione $d \geq 1$. La teoria che abbiamo sviluppato nella precedente lezione si estende infatti al caso multidimensionale in maniera piuttosto naturale. Per $\tau = (\tau_1, ..., \tau_d) \in \mathbb{R}^d_+$ si definisce $det(\tau) = \tau_1 \cdot \ldots \tau_d$ e $\omega = \frac{1}{\tau}$. Si ponga $T^d = (0,1)^d$. Si denoti con (v, w) o $v \cdot w$ il prodotto scalare in $\mathbb{C}^d$.

2.1 Relazioni tra le trasformate di Fourier continua e discreta

Teorema 2.1.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ allora la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x - \omega k)$ converge in $L^1(\omega T^d)$ a una funzione periodica Pf tale che $\|Pf\|_1 \leq \|f\|_1$. Inoltre per $k \in \omega \mathbb{Z}^d$ $\mathcal{F}(Pf)(k)$ (trasforamta di Fourier su ωT^d) è uguale a $(det(\omega))^{-1/2} \mathcal{F} f(k/\omega)$ (trasforamta di Fourier su $\mathbb{R}^d$).*

Dimostrazione. Sia $Q = \prod_{i=1}^d \omega_i[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Si ha $\int_Q \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |f(x - \omega k)| dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{Q + \omega k} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < \infty$. Ma allora per la convergenza dominata applicata alle serie (cfr. [9] Folland, pag. 53) si ottiene che la serie converge in L^1 ad una funzione Pf tale che $\|Pf\|_1 \leq \|f\|_1$. Per la seconda parte dell'asserto si noti che per (1.8):

$$\mathcal{F}(Pf)(h) = \frac{1}{(det(\omega))^{1/2}} \int_Q \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x - \omega k) \right) e^{-2\pi i (h,x)/\omega} dx =$$

$$= \frac{1}{(det(\omega))^{1/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{Q+\omega k} f(x) e^{-2\pi i (h, x+\omega k)/\omega} dx =$$

$$= \frac{1}{(det(\omega))^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i (h,x)/\omega} dx = (1.9)$$

$$= (det(\omega))^{-1/2} \mathcal{F} f(h/\omega).$$

□

Teorema 2.1.2 (Formula della somma di Poisson). *Sia* $f \in C(\mathbb{R}^d)$, $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-d-\varepsilon}$, *e* $|\mathcal{F} f(\hat{x})| \leq C(1 + |\hat{x}|)^{-d-\varepsilon}$ *per un qualche* C, $\varepsilon > 0$. *Sia* $\omega = (\omega_1, ..., \omega_d) \in (0, \infty)^d$. *Allora vale la formula:*

$$(det(\omega))^{1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F} f(\hat{x} - \omega k) = (det(\frac{1}{\omega}))^{1/2} \sum_{n \in Z^d} f(n/\omega) e^{-2\pi i (\hat{x}, n/\omega)}.$$

ove entrambe le parti dell'equazione convergono uniformemente in ωT^d. *In particolare per* $\hat{x} = 0$ *si ha*

$$(det(\omega))^{1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F} f(\omega k) = (det(\frac{1}{\omega}))^{1/2} \sum_{n \in Z^d} f(n/\omega).$$

Dimostrazione. La convergenza assoluta e uniforme delle serie segue dall'applicazione del criterio dell'integrale per la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (1 + |k|)^{-n-\varepsilon}$. Allora $Pf(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x - \omega k)$ è in $C(\omega T^d)$ e quindi in $L^2(\omega T^d)$. Per il teorema di Fourier 1.1.7 e per il precedente teorema 2.1.1 si ha:

$$Pf(x) = \frac{1}{(det(\omega))^{1/2}} \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}(Pf)(h) e^{2\pi i (h,x)/\omega} =$$

$$= \frac{1}{det(\omega)} \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F} f(h/\omega) e^{2\pi i (h,x)/\omega}.$$

Scambiando ora i ruoli di f e $\mathcal{F} f$ e osservando che $\mathcal{F}\mathcal{F} f = f(-x)$ si ottiene quanto voluto. □

Definizione 2.1.3. *Sia* $K \subset\subset \mathbb{R}^d$ *compatto. Porremo*

$$C(K) = \{f \in C(int(K)) | esiste\ \ \tilde{f} \in C(\mathbb{R}^d),\ \ \tilde{f}_{|K} = f\}.$$

Si definisca inoltre:

$$C_0(K) = \{f \in C(K) | f_{|\partial K} = 0\},$$

sottospazio di $C(K)$. $C(K)$ munito della norma $\|\cdot\|_\infty$ definisce uno spazio di Banach.

Remark 2.1.4. *Si noti che, nelle notazioni della precedente definizione, l'operatore J da $C_0(K)$ su $C_c(\mathbb{R}^n)$, definito da $J(f) = f$ su K, $J(f) = 0$ altrove, è un'isometria di $C_0(K)$ sull'immagine $J(C_0(K))$.*

Definizione 2.1.5. *Siano $f \in C(\mathbb{R}^n)$ e $\tau = (\tau_1, ..., \tau_d) \in (0, \infty)^d$. Diremo campionamento di passo τ l'operatore che a f associa $f^c \equiv f_{|\tau\mathbb{Z}^d}$. Se $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, ovviamente f^c risulta nulla fuori da un compatto di $\mathbb{Z}^d$. Inoltre, salvo traslazioni, si può pensare f^c come definita su un toro discreto n-esimo $\tau\mathbb{Z}^d/\tau m Z^d$ isomorfo in effetti a $\mathbb{Z}_m^d$ Il campionamento induce quindi un operatore di $C_c(\mathbb{R}^d)$ in $l^2(\mathbb{Z}_m^d)$, per un qualche $m = (m_1, ..., m_d) \in \mathbb{N}^d \backslash \{0\}$.*

Cerchiamo di studiare alcune proprietà dell'operatore $\cdot^c$.

Remark 2.1.6. *Ci si potrebbe chiedere che relazione intercorra tra $\mathcal{F}\mathbf{f^c}$ (intesa come DFT) e $\mathcal{F}f$ (intesa come in (1.9)). Una risposta è data dal seguente:*

Corollario 2.1.7 (Teorema di Shannon). *Sia $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-d-\varepsilon}$, e $|\hat{f}(\hat{x})| \leq C(1 + |\hat{x}|)^{-d-\varepsilon}$ per un qualche C, $\varepsilon > 0$. Se, per esempio, supp$(f) \subset \prod_{i=1}^d [0, a_i]$, allora vale*

$$\mathcal{F}\mathbf{f^c}(l) = \frac{(det(m))^{1/2}}{(det(a))} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}f(\hat{x} - \omega k) \right]^c (l/a), \tag{2.1}$$

ove il campionamento a sinistra è eseguito con passo $\tau = 1/\omega$ e quello a destra è eseguito con passo $1/a$, in modo tale che $\omega a = m \in \mathbb{N}^d$.

Dimostrazione. Si assuma *supp*$(f) \subset \prod_{i=1}^d [0, a_i]$ e si ponga $a = (a_1, \ldots, a_d)$. Si assuma di aver scelto $a > 0$ in modo tale che $\omega a = m \in \mathbb{N}^d$. Ma allora

$$(det(\frac{1}{w}))^{1/2} \sum_{n \in Z^d} f(n/\omega) e^{-2\pi i (\hat{x}, n/\omega)} = \frac{(det(a))^{1/2}}{(det(m))^{1/2}} \sum_{n \in Z_m^d} f(n/\omega) e^{-2\pi i (\hat{x}a, n)/m}.$$

Se assumiamo che $\hat{x}a = l \in \mathbb{Z}^d$ allora, per 2.1.2 si ha

$$\frac{(det(m))^{1/2}}{(det(a))^{1/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}f(l/a - \omega k) = \frac{(det(a))^{1/2}}{(det(m))^{1/2}} \sum_{n \in Z_m^d} f(n/\omega) e^{-2\pi i (l, n)/m}.$$

Posto $\tau = 1/\omega$, da (1.14) si ha quindi che

$$\mathcal{F}\mathbf{f^c}(l) = \frac{(det(m))^{1/2}}{(det(a))} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}f(l/a - \omega k) = \frac{(det(m))^{1/2}}{(det(a))} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}f(\hat{x} - \omega k) \right]^c (l/a),$$

ove l'ultimo campionamento è effettuato con passo $1/a$. $\square$

2.2 Teoria del campionamento

Lemma 2.2.1. *Poniamo* $sinc(x) \equiv \frac{sin(\pi x)}{\pi x}$, $x \in \mathbb{R}$ *e* $Q = \prod_{i=1}^{d} \omega_i[-1/2, 1/2)$. *Allora vale*

$$\frac{1}{det(\omega)^{1/2}} \int_Q e^{2\pi i(k,\xi)/\omega} e^{2\pi i(\xi,x)} dx = det(\omega)^{1/2} \prod_{i=1}^{d} sinc(w_i x_i - k_i), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Usare Fubini-Tonelli. □

Teorema 2.2.2 (Del campionamento perturbato in L^2**).** *Siano* $Q = \prod_{i=1}^{d} \omega_i[-1/2, 1/2)$ *e* $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *tale che* $f_{|\tau\mathbb{Z}^d} \in l^2$. *Si scriva* $f = \eta + \epsilon$, *ove* $\mathcal{F}\eta = \mathcal{F}f$ *su* Q *e* $\mathcal{F}\eta = 0$ *su* $\mathbb{R}^d \backslash Q$. *Allora vale*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (f^c(\tau k) - \epsilon^c(\tau k)) \prod_{i=1}^{d} sinc(\tau_i^{-1} x_i - k_i) + \epsilon(x), \quad in \quad L^2(\mathbb{R}^d). \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Si scriva $f = \eta + \epsilon$, ove $\mathcal{F}\eta = \mathcal{F}f$ su $Q = \prod_{i=1}^{d} \omega_i[-1/2, 1/2)$. Consideriamo $P[\mathcal{F}\eta](\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}\eta(\xi - \omega k)$. Sappiamo che $P[\mathcal{F}\eta] \in L^2(\omega T^d)$ e quindi:

$$P[\mathcal{F}\eta](\xi) = \frac{1}{det(\omega)^{1/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}(P[\mathcal{F}\eta])(k) e^{2\pi i(k,\xi)/\omega},$$

con

$$\mathcal{F}(P[\mathcal{F}\eta])(k) = \frac{1}{det(\omega)^{1/2}} \int_{\omega T^d} P[\mathcal{F}\eta](x) e^{-2\pi i(k,x)/\omega} dx.$$

Ovviamente si ha che $P[\mathcal{F}\eta]_{|Q} = \mathcal{F}\eta$. Ma allora si vede subito che $\mathcal{F}(P[\mathcal{F}\eta])(k) = \frac{1}{det(\omega)^{1/2}} (f^c(-k/\omega) - \epsilon^c(-k/\omega))$, in quanto $\mathcal{F}\eta$ è non nulla solo su un compatto e quindi $\mathcal{F}\eta \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Ma allora sostituto $P[\mathcal{F}\eta]$ a $\mathcal{F}\eta$ su Q ed estendendo a 0 fuori da Q:

$$f(x) = \frac{1}{det(\omega)^{1/2}} \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}(P[\mathcal{F}\eta])(k) e^{2\pi i(k,\xi)/\omega} \right)(x) + \epsilon(x) =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}(P[\mathcal{F}\eta])(k) \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{det(\omega)^{1/2}} e^{2\pi i(k,\xi)/\omega} \right)(x) + \epsilon(x) =$$

(2.2.1)

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (f^c(\tau k) - \epsilon^c(\tau k)) \prod_{i=1}^{d} sinc(\tau_i^{-1} x_i - k_i) + \epsilon(x),$$

ove tali uguaglianze valgono in L^2. □

Definizione 2.2.3. *Per* $Q = \prod_{i=1}^{d} \omega_i[-1/2, 1/2)$, *porremo*

$$L_Q^2(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : supp(\mathcal{F}f) \subset Q\}.$$

Diremo inoltre che $f \in L_Q^2(\mathbb{R}^d)$ *è una funzione di banda* ω*-limitata.*

Corollario 2.2.4 (Whittacker-Shannon). *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ è una funzione di banda ω-limitata esiste $\tau_0 > 0$ tale che per ogni $0 < \tau \leq \tau_0$*

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(\tau k) \prod_{i=1}^{d} sinc(\tau_i^{-1} x_i - k_i). \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Si usi il Teorema 2.2.2 osservando che $\varepsilon = 0$ e $\tau_0 = \omega^{-1}$. □

Proposizione 2.2.5. *Se $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ allora la sua trasformata $\mathcal{F}f$ su $\mathbb{R}^d$ non è a supporto compatto.*

Remark 2.2.6. *Il teorema di Whittacker-Shannon ci garantisce la completa riproducibilità di una funzione a banda ω-limitata a partire dai suoi campioni. Tuttavia dalla precedente proposizione si deduce che per le funzioni di $C_c(\mathbb{R}^d)$ non c'è speranza di poter applicare il teorema del campionamento e di poter ricostruire la funzione continua direttamente dai suoi campioni! Queste considerazioni assieme al Corollario 2.1.7 dicono inoltre che l'applicazione dell'operatore di campionamento seguito dalla applicazione della DFT*

$$\begin{array}{ccccc} & .^c & & \mathcal{F} & \\ C_c & \to & l^2(\mathbb{Z}_m^d) & \to & l^2(\mathbb{Z}_m^d) \\ f & \to & \mathbf{f^c} & \to & \mathcal{F}\mathbf{f^c} \end{array}$$

equivale a eseguire una trasformata di Fourier continua, una periodicizzazione e un campionamento

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathcal{F} & & P & & .^c & \\ C_c & \to & L^2(\mathbb{R}^d) & \to & L^2(\omega T^d) & \to & l^2(\mathbb{Z}^d) \\ f & \to & \mathcal{F}f & \to & P[\mathcal{F}f] & \to & (P[\mathcal{F}f])^c \end{array}$$

Inoltre **SE** *$\mathcal{F}f$ è una funzione che decade in modo sufficientemente rapido si ha che*

$$\mathcal{F}f(w) \approx P[\mathcal{F}f](w), \quad \forall w \in Q$$

e che quindi, per 2.2.4 è pensabile che

$$\mathcal{F}f(w) \approx \sum_{l \in \mathbb{Z}^d, l/a \in Q} (P[\mathcal{F}f])^c(l/a) \prod_{i=1}^{d} sinc(a_i w_i - l_i) = \frac{det(a))}{(det(m))^{1/2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d, l/a \in Q} \mathcal{F}\mathbf{f^c}(l) \prod_{i=1}^{d} sinc(a_i w_i - l_i).$$

QUINDI *se f è una funzione a supporto compatto la cui trasformata di Fourier decade piuttosto rapidamente (e questo è garantito non appena la funzione f è sufficientemente regolare, ossia derivabile a sufficienza!) allora la sua trasformata di Fourier può essere calcolata con buona approssimazione applicando una DFT ai campioni di f e la formula del Teorema 2.2.4. Quindi per funzioni complicate, ove sia difficile applicare tecniche di calcolo come quelle dei residui, si può tentare una approssimazione mediante le trasformate di Fourier discrete.*

Assumiamo di seguito che $l^2(\tau\mathbb{Z}^d)$ sia munito del prodotto scalare $\langle f, g \rangle_{l^2} := det(\tau) \sum_{k \in \mathcal{Z}^d} f(\tau k)\overline{g(\tau k)}$.

Teorema 2.2.7 (Prodotti scalari). *Si assumano $f, g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tali che $f_{|\tau\mathbb{Z}^d}, g_{|\tau\mathbb{Z}^d} \in l^2$. Allora si approssima il prodotto scalare di f e g come :*

$$|\langle f, g\rangle_{L^2} - \langle f_{|\tau Z^d}, g_{|\tau Z^d}\rangle_{l^2}| \leq$$
$$\leq \|\varepsilon_f\|_{l^2}\|g\|_{l^2} + \|\varepsilon_g\|_{l^2}\|f\|_{l^2} + \|\varepsilon_f\|_{l^2}\|\varepsilon_g\|_{l^2} + \|\varepsilon_f\|_{L^2}\|\varepsilon_f\|_{L^2}. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Per il Teorema 2.2.2 si ha

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (f(\tau k) - \varepsilon_f(\tau k)) \prod_{i=1}^{d} sinc(\tau_i^{-1}x_i - k_i) + \varepsilon_f(x) \right) \times$$
$$\times \overline{\left(\sum_{h\in\mathbb{Z}^d} (g(\tau h) - \varepsilon_g(\tau h)) \prod_{i=1}^{d} sinc(\tau_i^{-1}x_i - h_i) + \varepsilon_g(x) \right)} dx. \tag{2.5}$$

Dal momento che le funzioni del tipo η_* appartengono a sottospazi ortogonali di L^2 con rispetto alle funzioni del tipo ε_*, si ha:

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \sum_{h,k\in\mathbb{Z}^d} (f(\tau k) - \varepsilon_f(\tau k))\overline{(g(\tau h) - \varepsilon_g(\tau h))}\times$$
$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{d} sinc(\tau_i^{-1}x_i - k_i) sinc(\tau_i^{-1}x_i - h_i)dx \right) + \langle \varepsilon_f, \varepsilon_g\rangle_{L^2} =$$

dalla ortogonalità dei *sinc*

$$= det(\tau) \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (f(\tau k) - \varepsilon_f(\tau k))\overline{(g(\tau k) - \varepsilon_g(\tau k))} + \langle \varepsilon_f, \varepsilon_g\rangle_{L^2} =$$

$$= \langle f_{|\tau Z^d}, g_{|\tau Z^d}\rangle_{l^2} + \langle f_{|\tau Z^d}, (\varepsilon_g)_{|\tau Z^d}\rangle_{l^2} + \langle (\varepsilon_f)_{|\tau Z^d}, g_{|\tau Z^d}\rangle_{l^2} + \langle (\varepsilon_f)_{|\tau Z^d}, (\varepsilon_g)_{|\tau Z^d}\rangle_{l^2} + \langle \varepsilon_f, \varepsilon_g\rangle_{L^2}$$

Quindi usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha la seguente disuguaglianza.

$$|\langle f, g\rangle_{L^2} - \langle f_{|\tau Z^d}, g_{|\tau Z^d}\rangle_{l^2}| \leq$$
$$\leq \|\varepsilon_f\|_{l^2}\|g\|_{l^2} + \|\varepsilon_g\|_{l^2}\|f\|_{l^2} + \|\varepsilon_f\|_{l^2}\|\varepsilon_g\|_{l^2} + \|\varepsilon_f\|_{L^2}\|\varepsilon_f\|_{L^2}.$$

□

Remark 2.2.8. *Si noti che per funzioni f, g a banda ω-limitata si ha che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} fg \;\; dx = det(\tau) \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f^c(\tau k) g^c(\tau k).$$

Remark 2.2.9. *Risulta anche evidente ora che se $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ allora in generale si avrà:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} fg \;\; dx \neq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f^c(k) g^c(k).$$

L'unica speranza di limitare gli errori dovuti al campionamento sui prodotti scalari è di scegliere f, g in modo che le code delle trasformate abbiano "energia" (= integrate quadrato) minimo. Per una trattazione più dettagliata ed approfondita di veda [7, 14].

In questa sezione si è studiato in particolare il sistema di digitalizzazione per campionamento. Si è in particolare dimostrato che per ogni $f \in L^2_Q$ la mappa di analisi $C : L^2_Q \to l^2$ data da $C(f) = \{f(\tau k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ può essere invertita dalla mappa di sintesi $R : l^2 \to L^2_Q$ definita da $R(\vec{c}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k \prod_{i=1}^d sinc(\tau_i^{-1}x_i - k_i)$. Infatti, per 2.2.4 si ha $I = R \circ C$. Inoltre 2.2.8 assicura che il sistema è stabile. Il sistema è ridondante?

Proposizione 2.2.10. *L'operatore di traslazione è dato da $T_x g(t) = g(t-x)$ per ogni g su $\mathbb{R}^d$. Data una funzione a banda limitata $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tale che $\mathcal{F}g \neq 0$ on $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ compatto, allora esiste $\tau > 0$ tale che per ogni $f \in L^2_\Omega(\mathbb{R}^d)$*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k(f) T_{\tau k} g, \tag{2.6}$$

per opportuni coefficienti $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}^d} \in l^2$.

Dimostrazione. È noto che $\{\tau^{d/2}e^{2\pi i\tau kx}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ è ONB per $L^2([-1/(2\tau), 1/(2\tau)]^d)$. Per $\tau > 0$ piccolo a sufficienza si ha $\Omega \subset [-1/(2\tau), 1/(2\tau)]^d$. Esiste $g_1 \in L^1$ funzione a banda limitata tale che $\hat{g}_1 \cdot \hat{g} \equiv 1$ su Ω.Quindi per $f \in L^2_\Omega(\mathbb{R}^d)$ e per $\tau > 0$ piccolo a sufficienza si ha

$$\hat{f}(w) = [\left(\hat{f}\hat{g}_1\right)\hat{g}](w) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \tau^d \langle \hat{f}\hat{g}_1, e^{2\pi i\tau kx}\rangle e^{2\pi i\tau kw}\hat{g}(w). \tag{2.7}$$

Applicando la trasformata di Fourier inversa si ha

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \tau^d (f \star g_1)(\tau k) T_{\tau k} g, \tag{2.8}$$

ove $\star$ è il simbolo della convoluzione:

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy.$$

Si può dimostrare che

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \tau^d |(f \star g_1)(\tau k)|^2 = \|f \star g_1\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \|g_1\|_1^2. \tag{2.9}$$

Quindi posto $c_k(f) = \tau^d (f \star g_1)(\tau k)$ si ha:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 \leq \left(\tau^d \|g_1\|_1^2\right) \|f\|_2^2. \tag{2.10}$$

In particolare, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, T_{\tau k} g\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle \hat{f}, e^{2\pi i\tau kw}\hat{g}\rangle|^2 \leq \tau^{-d}\|f\|_2^2 \|\hat{g}\|_\infty^2$. □

Il seguente esercizio è difficile: richiede una comprensione approfondita di tutta la lezione e uno sforzo personale per realizzare l'uso concreto degli strumenti matematici illustrati.

Esercizio 2.2.11. *Si implementi in C/C++ o Matlab il sistema di digitalizzazione descritto dalla precedente proposizione. In particolare si trovi*

- *una funzione g come richiesta dalle ipotesi;*
- *una funzione g_1 e la si calcoli numericamente;*
- *un modo per calcolare efficientemente i coefficienti $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}^d} \in l^2$ per una funzione f a banda ω-limitata;*
- *fare alcuni esempi di digitalizzazione per funzioni f a banda ω-limitata e mostrare la loro sintesi mediante le formule (2.3) e (2.6). Che differenze ci sono tra le due?*

2.3 Sistemi ortogonali per $L^2(\mathbb{R}^d)$: frame di Gabor

Nella precedente lezione abbiamo costruito sistemi e basi ortogonali per funzioni definite su insiemi limitati di $\mathbb{R}^d$. Abbiamo visto come tale costruzione ci ha permesso di dedurre l'estensione della trasformata di Fourier su tutto $\mathbb{R}^d$, come descritto nel Teorema 1.2.3. Non abbiamo però mai costruito un sistema ortogonale per tutto $L^2(\mathbb{R}^d)$. Nel seguito costruiamo quindi sistemi ortogonali per tutto $L^2(\mathbb{R}^d)$. Si osservi che anche per funzioni di $L^2(\mathbb{R}^d)$ valgono le proprietà descritte in (1.15-16,19). Infatti, si definiscono gli operatori di traslazione e modulazione come:

$$T_x f(t) = f(t-x), \quad M_w f(t) = e^{2\pi i w t} f(t). \tag{2.11}$$

e vale

$$\mathcal{F}T_x = M_{-x}\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}M_w = T_w\mathcal{F}. \tag{2.12}$$

Inoltre se la convoluzione di $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ è la funzione di $L^2(\mathbb{R}^d)$ definita da

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy. \tag{2.13}$$

si ha che

$$\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g). \tag{2.14}$$

Si dimostri per esercizio che esiste una analoga forma di convoluzione per segnali discreti e che vale (2.14) anche in tal caso, utilizzando la DFT.

Si consideri ora $Q = \prod_{i=1}^d \omega_i[-1/2, 1/2)$. Certamente $\{\omega j + Q\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$ definisce un ricoprimento disgiunto di $\mathbb{R}^d$, e cioè $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}^d}(\omega j + Q)$. Ma allora ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ si scrive come

$$f = \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{F}f \cdot \chi_{\omega j+Q}\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}f \cdot \chi_{\omega j+Q}\right). \tag{2.15}$$

Ciascuna funzione $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f \cdot \chi_{\omega j+Q})$ è a banda limitata e $supp((\mathcal{F}f \cdot \chi_{\omega j+Q})) \subset \omega j + Q$. Ma allora $supp(T_{\omega j}(\mathcal{F}f \cdot \chi_{\omega j+Q})) \subset Q$. Da (2.12) si ha quindi che

$$M_{-\omega j}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f \cdot \chi_{\omega j+Q}) = M_{-\omega j}f_j,$$

è una funzione a banda ω-limitata, ove si è posto $f_j = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f \cdot \chi_{\omega j+Q})$. Dal Teorema 2.2.4 si ha subito quindi che

$$M_{-\omega j}f_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f_j(\tau k)\prod_{i=1}^{d} sinc(\tau_i^{-1}x_i - k_i).$$

Ma allora si ha

$$f_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f_j(\tau k)M_{\omega j}\prod_{i=1}^{d} sinc(\tau_i^{-1}x_i - k_i). \tag{2.16}$$

Combinando (2.15) e (2.16) si ottiene subito che

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f_j(\tau k)M_{\omega j}\prod_{i=1}^{d} sinc(\tau_i^{-1}x_i - k_i). \tag{2.17}$$

Inoltre, posto $g(x) = \prod_{i=1}^d \frac{\sin(\pi x_i/\tau)}{\pi x_i/\tau_i} = \prod_{i=1}^d sinc(x_i/\tau_i)$ la formula (2.17) si riscrive:

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f_j(\tau k)M_{\omega j}T_{\tau k}g. \tag{2.18}$$

Esercizio 2.3.1. *Si dimostri che il sistema* $\{\frac{1}{(det(\tau))^{1/2}}M_{\omega j}T_{\tau k}g\}_{j,k\in\mathbb{Z}^d}$ *è una base ortonormale per* $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Si noti che Proposizione 2.2.10 ci dice anche che esistono molte g per cui i termini f_j possono essere riprodotti da formule come (2.16). Ma per tali g il sistema non è più in generale ortonormale e, soprattutto, è in generale **ridondante**. Un sistema ridondante del tipo $\{M_{\omega j}T_{\tau k}g\}_{j,k\in\mathbb{Z}^d}$ è detto *frame di Gabor*.

Esercizio 2.3.2. *Si ripercorra la costruzione della formula (2.18) per una* g *come in Proposizione 2.2.10. Si usi quindi l'Esercizio 2.2.11 per calcolare numericamente i coefficienti* $\{f_j(\tau k)\}_{j,k}$.

Capitolo 3

Analisi tempo-frequenza: frame di Gabor

Come si è mostrato nella lezione precedente, è possibile costruire dei sistemi ortonormali per $L^2(\mathbb{R}^d)$ generati per modulazione e traslazione della funzione $g(x) = \prod_{i=1}^{d} sinc(x_i/\tau_i)$.

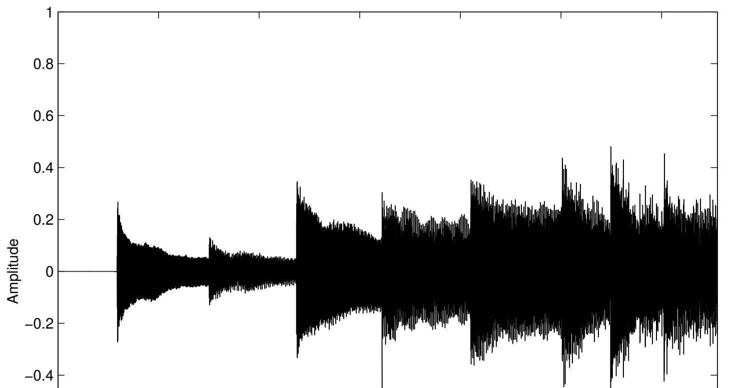


Figura 3.1: Un segnale test

I coefficienti di una espansione relativa ad una tale base ortonormale possono essere visti come il campionamento della seguente trasformata (detta trasformata di Gabor o SFTF - Short Time Fourier Transform) su un reticolo $d \times d$ dimensionale:

$$V_g(f)(b,w) = \langle f, M_w T_b g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{-2\pi i w \cdot t} \overline{g(t-b)} dt \tag{3.1}$$

Infatti, per $\tau > 0$ fissato e $\omega = 1/\tau$ si ha

$$f = \frac{1}{det(\tau)} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}^d} V_g(f)(\tau k, \omega j) M_{\omega j} T_{\tau k} g \tag{3.2}$$

Un segnale f è mappato sul piano tempo-frequenza attraverso tale trasformazione, realizzata valutando il prodotto scalare in L^2 di f rispetto ad una funzione analizzatrice g modificata per applicazione di una traslazione e una modulazione. La figura 3.1 mostra un segnale test e figura 3.2 mostra la corrispondente STFT, definita sul piano tempo-frequenza. Il risultante *spettrogramma* assomiglia ad uno spartito musicale, dove ad un dato tempo si può riferire un insieme di frequenze simultanee (le note se ci si riferisce alla musica). Per tale interpretazione espansioni di segnali per mezzo di sistemi del tipo $M_{\omega j} T_{\tau k} g$ costituiscono uno strumento importante per l'analisi (tempo-frequenza) di suoni. Come si è discusso nella sezione 2.3 possono esistere numerose g capaci di generare espansioni come in (2.18). Normalmente tali espansioni, non avendo unici coefficienti (mappe di analisi) sono ridondanti. A questo punto diventa necessaria una formalizzazione matematica per quei sistemi $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che generano digitalizzazioni stabili e ridondanti.

3.1 Frame per spazi di Hilbert

La teoria delle frame è stata introdotta da Daffin e Shaeffer nel 1952 nello studio di espansioni non armoniche. Più tardi sono state riscoperte nell'analisi di Gabor e wavelets [1] e hanno trovato molte interessanti applicazioni. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile.

Definizione 3.1.1. *Una sequenza $\{g_n\}_{n \in \mathcal{N}} \subset \mathcal{H}$ è una frame per $\mathcal{H}$ se esistono due costanti $A, B > 0$ tali che*

$$A \cdot \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathcal{N}} |\langle f, g_n \rangle|^2 \leq B \cdot \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{3.3}$$

Si osservi che tale condizione (3.3) rappresenta una forma più debole della eguaglianza di Parseval 1.1.7 ii). Inoltre garantisce che il sistema di digitalizzazione $C_g : f \to \langle f, g_n \rangle$ è stabile. Ci si chiede se tale sistema è fedele, ossia se esiste una mappa di sintesi R che inverta la mappa C.

In effetti questa inversione di attua attraverso un operatore, detto *operatore di frame* definito da $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$Sf = \sum_{n \in \mathcal{N}} \langle f, g_n \rangle g_n. \tag{3.4}$$

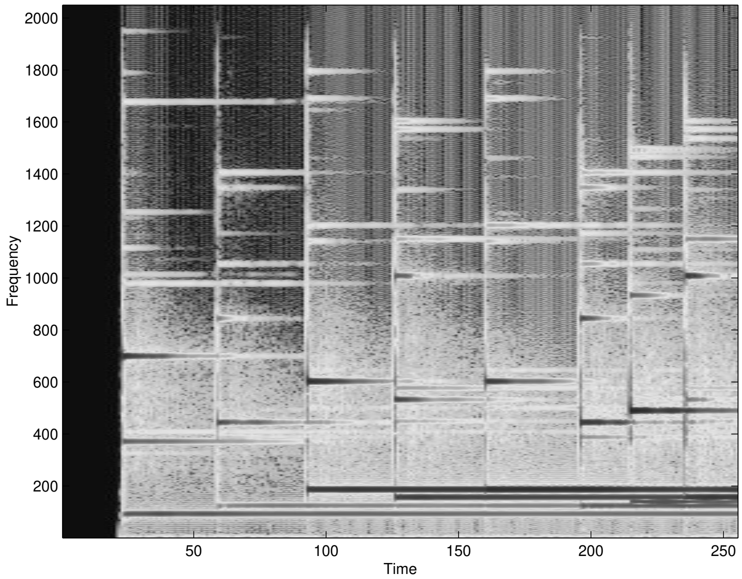


Figura 3.2: Spettrogramma o $|STFT|^2$ del segnale test

In particolare, (3.3) implica che S è positivo, autoaggiunto e invertibile. Così si ha che

$$f = SS^{-1}f = \sum_{n\in\mathcal{N}} \langle f, S^{-1}g_n\rangle g_n = S^{-1}Sf = \sum_{n\in\mathcal{N}} \langle f, g_n\rangle S^{-1}g_n. \tag{3.5}$$

Il sistema $\{\tilde{g}_n = S^{-1}g_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ è ancora una frame detta *duale canonica* di $\{g_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ con corrispondente operatore di frame S^{-1}. Dal momento che una frame è tipicamente ridondante, nel senso che non esiste un unica mappa dei coefficienti $\{c_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ tale che

$$f = \sum_{n\in\mathcal{N}} c_n(f)g_n,$$

esistono quindi molti possibili duali $\{\tilde{g}_n\}_{n\in\mathcal{N}} \subset \mathcal{H}$ per cui

$$f = \sum_{n\in\mathcal{N}} \langle f, \tilde{g}_n\rangle g_n.$$

In particolare la mappa $R_{\tilde{g}} : \vec{c} \to \sum_{n\in\mathcal{N}} c_n(f)\tilde{g}_n$ è tale che $I = R_{\tilde{g}} \circ C_g$, cioè è una inversa a sinistra della mappa C_g. Si noti inoltre che $S = R_g \circ C_g$.

Quando $\tilde{g}_n = S^{-1}g_n$ allora $R_{\tilde{g}}$ è un inverso sinistro di C_g e vale che

$$|||C_g \circ R_{\tilde{g}} - I|||_{l^2\to l^2}$$

è minima. In tal caso $R_{\tilde{g}}$ è detto l'operatore pseudo-inverso di C_g secondo Moore-Penrose. Quindi per calcolare il duale canonico si può

- invertire l'operatore di frame S;
- calcolare l'operatore pseudo-inverso di C_g.

Nel caso particolare in cui $A = B$ la frame è detta stretta e si ha che $\tilde{g}_n = S^{-1}g_n = A^{-1}g_n$. Ovviamente una base ortonormale è una frame stretta con $A = B = 1$.

Esercizio 3.1.2. *Se $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una frame stretta con $A = B = 1$ e se $\|g_n\| = 1$ per ogni n allora $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base ortonormale.*

Si può dimostrare che un sistema finito $\mathcal{G}_n = \{g_0, ..., g_{n-1}\}$ è sempre una frame per $\mathcal{H} = span\{\mathcal{G}_n\} = \{\sum_{i=0}^{n} c_i g_i : c_i \in \mathbb{C}\}$.

Esempio 3.1.3. *Si consideri $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, $f = (-1, 3)$ e $g_0 = (1, -1)$, $g_1 = (0, 1)$, $g_2 = (1, 1)$. I coefficienti sono dati da*

$$\{c_n\}_{n=0,1,2} = \{-4, 3, 2\}$$

e la frame duale canonica $\tilde{g} = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}), (0, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})\}$ che dà la ricostruzione di f come:

$$f = \sum_{i=0}^{2} c_n \tilde{g}_n = (-2, \frac{4}{3}) + (0, 1) + (1, \frac{2}{3}) = (-1, 3).$$

Per esercizio si trovi un altro possibile duale $\tilde{g}$, ma non canonico.

Come si calcola una frame duale canonica di una frame di dimensione finita? Si consideri una base ortonormale $\{e_i\}_{i=0}^{m-1}$, $m \leq n$, di $\mathcal{H}$ e si consideri la matrice $\mathcal{G}_{m\times n} = (\langle g_k, e_i\rangle)_{i=0,...,m-1,k=0,...n-1}$. In particolare si ha che per ogni $f \in \mathcal{H}$ e considerato $\vec{f} = (\langle f, e_i\rangle)_{i=0,...,m-1}$ si ha che

$$C_g f = \mathcal{G}^T_{m\times n} * \vec{f}\ . \tag{3.6}$$

La procedura cosiddetta SVD (Singular Value Decomposition) applicata ad una matrice $M \in \mathbb{C}^{n\times m}$ è un elemento importante dell'algebra lineare numerica. L'idea di base è di poter scrivere la matrice M nella forma $M = U^* * D * V$ ove D è una matrice diagonale e U, V sono matrici le cui righe sono ortonormali e U^* è la trasposta Hermetiana di U. Gli elementi non nulli di D sono noti come valori singolari di M. Il rapporto tra il il più grande valore singolare e il più piccolo rappresenta il numero di condizionamento di M. Ma allora una inversa a sinistra di M si può scrivere come

$$M^\dagger = V^T * D^{-1} * U.$$

Infatti $M^\dagger * M = (U^* * D * V) * \left(V^T * D^{-1} * U\right) = I$. Si ha che $M^\dagger$ è proprio la matrice dell'operatore pseudo-inverso dell'operatore rappresentato da M. Si noti inoltre che

$$M^\dagger * M = M^T * (M^\dagger)^T = M^T * (M^T)^\dagger.$$

Quindi per una matrice $N \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $n \geq m$ si definisce $N^\dagger = (N^T)^\dagger$ e si ha $N * N^\dagger = I$.

Esercizio 3.1.4. *Si provi che le colonne della matrice* $\left(\mathcal{G}^\dagger_{m\times n}\right)^T$ *rappresentano in coefficienti* $\{\langle \tilde{g}_k, e_i\rangle\}_{i=0,\dots,m-1}$ *del duale canonico di* $\mathcal{G}_n$*. Se prendo un insieme di coefficienti* $\vec{c} = (c_k)_{k=0,\dots,n-1}$ *si ha che* $\left(\mathcal{G}^\dagger_{m\times n}\right)^T * \vec{c}$ *restituisce un vettore di lunghezza* m*. In particolare si ha che*

$$R_{\tilde{g}}\ \vec{c} = \left(\left(\mathcal{G}^\dagger_{m\times n}\right)^T * \vec{c}\right)^T \cdot \{e_i\}_{i=0}^{m-1}. \tag{3.7}$$

Quindi, combinando (3.6) e (3.7) si ha che

$$f = R_g \circ C_{\tilde{g}} f = \left(\left(\mathcal{G}^\dagger_{m\times n}\right)^T * \mathcal{G}^T_{m\times n} * \vec{f}\right)^T \cdot \{e_i\}_{i=0}^{m-1} =$$

$$= \left(\vec{f}^T * \mathcal{G}_{m\times n} * \mathcal{G}^\dagger_{m\times n}\right) \cdot \{e_i\}_{i=0}^{m-1} \tag{3.8}$$

Inoltre, si ha che

$$R_g\ \vec{c} = \left(\mathcal{G}_{m\times n} * \vec{c}\right)^T \cdot \{e_i\}_{i=0}^{m-1}.$$

Quindi posto $\mathcal{S}_g = \mathcal{G}_{m\times n} * \mathcal{G}^T_{m\times n}$ si ha

$$Sf = R_g \circ C_g f = \left(\mathcal{G}_{m\times n} * \mathcal{G}^T_{m\times n} * \vec{f}\right)^T \cdot \{e_i\}_{i=0}^{m-1} = \left(\mathcal{S}_g * \vec{f}\right)^T \cdot \{e_i\}_{i=0}^{m-1}.$$

Ma allora si può calcolare il duale canonico anche come

$$\tilde{g}_k = \left(\mathcal{S}_g^{-1} * \vec{g}_k\right)^T \cdot \{e_i\}_{i=0}^{m-1}.$$

3.2 Frame di Gabor

Se $a, b > 0$ e se un sistema $\{M_{aj}T_{bk}g\}_{j,k\in\mathbb{Z}^d}$ è *frame di Gabor* per tutto $L^2(\mathbb{R}^d)$ allora deve essere

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{j,k} |\langle f, M_{aj}T_{bk}g\rangle|^2 \leq B\|f\|_2^2, \tag{3.9}$$

e si può dimostrare che necessariamente $a \cdot b \leq 1$. In particolare si ha che l'operatore di frame

$$S_g f = \sum_{j,k} \langle f, M_{aj}T_{bk}g\rangle M_{aj}T_{bk}g,$$

commuta con gli operatori di modulazione e traslazione nel senso che

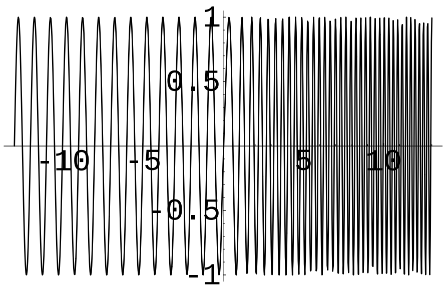
$$S_g M_{aj} T_{bk} = M_{aj} T_{bk} S_g.$$

Questo implica che il duale canonico $S_g^{-1} M_{aj} T_{bk} g = M_{aj} T_{bk} S_g^{-1} g$. Si ponga $\tilde{g} = S_g^{-1} g$ e si ha

$$f = \sum_{j,k} \langle f, M_{aj} T_{bk} \tilde{g} \rangle M_{aj} T_{bk} g. \tag{3.10}$$

Si osservi in particolare che $\langle f, M_{aj} T_{bk} \tilde{g} \rangle = V_{\tilde{g}}(f)(bk, aj)$.

Esercizio 3.2.1. *Si provi che se $\mathcal{G}(g, a, b) = \{M_{aj} T_{bk} g\}_{j,k}$ è una frame di Gabor allora $\mathcal{G}(\mathcal{F}g, b, a) = \{M_{bj} T_{ak} \mathcal{F}g\}_{j,k}$ è frame di Gabor con duale canonico generato da $\mathcal{F}\tilde{g}$.*



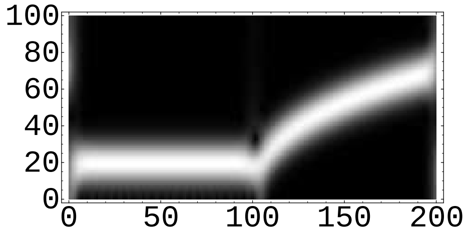


Figura 3.3: Spettrogramma o $|STFT|^2$ del segnale test a sinistra

Teorema 3.2.2. *Se $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ è una funzione molto ben localizzata nello spazio tempo-frequenza, allora esistono $a, b > 0$ sufficientemente piccoli tali che $\mathcal{G}(g, a, b) = \{M_{aj} T_{bk} g\}_{j,k}$ e $\mathcal{G}(\mathcal{F}g, b, a) = \{M_{bj} T_{ak} \mathcal{F}g\}_{j,k}$ sono frame di Gabor. In particolare se $g(x) = e^{-\pi |x|^2}$ è la Gaussiana si ha che $\mathcal{G}(g, a, b)$ è frame di Gabor per ogni $a, b > 0$ tali che $a \cdot b < 1$.*

Come al solito il calcolo dei coefficienti di una espansione (infinita) come in (3.10) costituisce un problema: soprattutto non è chiaro come si possa calcolare il duale, ossia l'inverso di S_g. Ancora una volta conviene spostarsi su un dominio discreto e in dimensione finita ed applicare le considerazioni relative alle frame in dimensione finita della precedente sezione.

Sia $d = 1$ e si consideri $a, b, L \in \mathbb{N}$ tali che $a|L$ e $b|L$ e $a \cdot b \leq L$. Si pongano $N = L/a$ e $M = L/b$. Allora si definisce un sistema di Gabor discreto come

$$\mathbf{g}_{m,n} = M_{\frac{mb}{L}} T_{an} \mathbf{g}, \quad m = 0, ..., M-1, \quad n = 0, ..., N-1, \tag{3.11}$$

ove $\mathbf{g} \in \mathbb{Z}_L$. Si noti che $N \cdot M \geq L$. Ma allora si cercano frame per $l^2(\mathbb{Z}_L)$ del tipo $\mathcal{G}(\mathbf{g}, a, b) = \{\mathbf{g}_{m,n}\}_{m=0,...,M-1, n=0,...,N-1}$. Considerata $\{e_i\}_{i=0}^{L-1}$ la base canonica di $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z}_L)$ si può definire la matrice

$$\mathcal{G}_{L\times N\cdot M} = \left(\mathbf{g}_{mod(k,M),\frac{k-mod(k,M)}{M}}\right)_{k=0,\ldots,N\cdot M-1}, \tag{3.12}$$

le cui colonne sono rappresentate dai valori di $\mathcal{G}(\mathbf{g}, a, b) = \{\mathbf{g}_{m,n}\}_{m=0,\ldots,M-1,n=0,\ldots,N-1}$. Come si è mostrato nella precedente sezione la matrice relativa all'operatore di frame è data da

$$\mathcal{S}_g = \mathcal{G}_{L\times N\cdot M} * \mathcal{G}^T_{L\times N\cdot M}. \tag{3.13}$$

Infatti si ha che $\mathcal{S}_g : l^2(\mathbb{Z}_L) \to l^2(\mathbb{Z}_L)$. Allora un sistema come in (3.11) è una frame di Gabor discreta se la matrice $\mathcal{S}_g$ è invertibile, ossia quando $det(\mathcal{S}_g) \neq 0$.

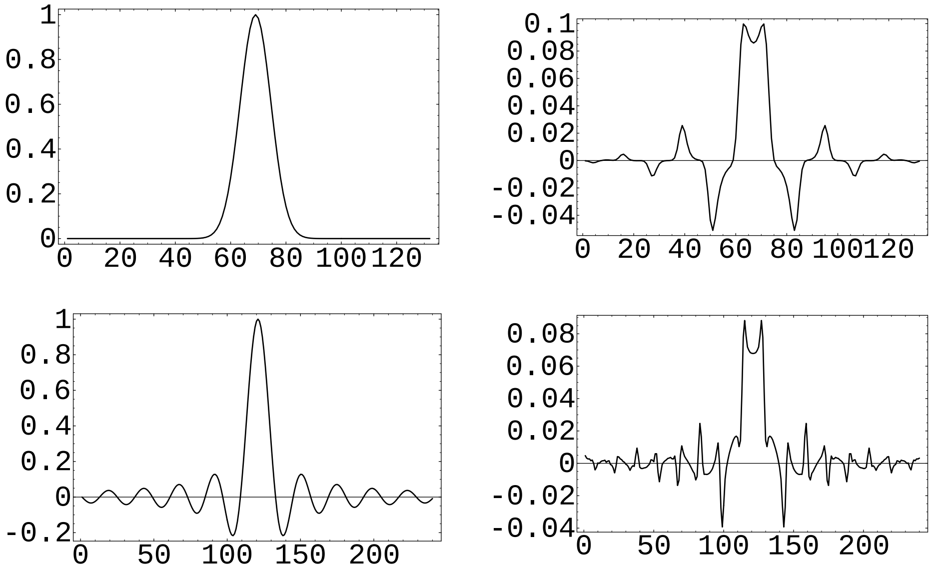


Figura 3.4: Atomi di Gabor e corrispondenti duali. In alto è rappresentata a sinistra la Gaussiana e a destra il corrispondente duale per $L = 132$, $a = b = 11$, con ridondanza $L/(ab) = 1.09$. In basso è rappresentato il seno cardinale e il rispettivo duale per $L = 240$, $a = b = 15$, con ridondanza $L/(ab) = 1.06$.

Esercizio 3.2.3. *Posto che il prodotto riga-colonna matriciale equivale al calcolo di un prodotto scalare e posto che il prodotto scalare di una funzione per un'altra traslata equivale ad una convoluzione:*

$$\langle \mathbf{f}, T_{ak}\mathbf{g}\rangle = \mathbf{f} \star \mathbf{g}(ak),$$

si osservi che, per (2.13-14) si ha

$$\langle \mathbf{f}, T_{ak}\mathbf{g}\rangle = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\mathbf{f} \cdot \mathcal{F}\mathbf{g})(ak).$$

Si usi la FFT per calcolare rapidamente l'operatore di frame (3.13) e si calcoli la complessità dell'algoritmo in dipendenza di L, a, b.

Una volta calcolato l'operatore di frame, l'applicazione di una inversione numerica della matrice $\mathcal{S}_g$ permette il calcolo del duale. Come l'operatore anche la sua matrice $\mathcal{S}_g$ è simmetrica, positiva ed invertibile. Inoltre la matrice è sparsa, nulla fuori da alcune specifiche diagonali ed è circolante. La struttura della matrice permette un calcolo estremamente rapido dei prodotti matrice-vettore, ma si rimanda a [5, 6] per maggiori dettagli. In casi reali, come nel trattamento di un segnale audio di alcuni secondi, sicuramente le dimensioni di tali matrici può essere anche del tipo 10000×10000.

Risulta quindi necessario l'uso di metodi iterativi per l'inversione della matrice come, per esempio quello del gradiente coniugato (CG).

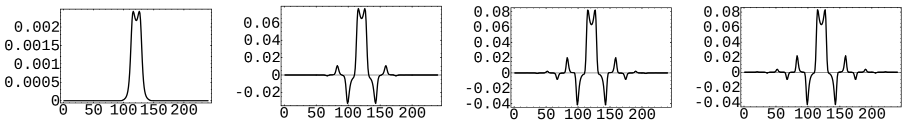


Figura 3.5: Calcolo iterativo di un duale mediante CG

Si noti che tanto più ci si avvicina alla soglia critica $a \cdot b \approx L$ tanto peggiora il numero di condizionamento della matrice $\mathcal{S}_g$. In molti casi l'applicazione diretta del semplice CG fallisce non riuscendo a risolvere il sistema. L'uso di opportuni precondizionatori, e quindi del PCG, diventa quindi necessario. Ad esempio il calcolo del duale in figura 3.5 viene effettuato con 139 iterazioni ed un errore residuo inferiore a 10^{-7}, essendo il numero di condizionamento della matrice circa 9. In seguito al precondizionamento il numero di condizionamento della matrice scende a 2 comportando che il medesimo calcolo viene eseguito in 75 iterazioni.

L'analisi dei segnali mediante frame di Gabor è quindi un esempio importante di applicazione dove strumenti tra i più importanti dell'analisi numerica vengono impiegati.

3.3 Compressione di un segnale

Una volta costruita una frame di Gabor $\mathcal{G}(\mathbf{g}, a, b)$ ed un suo corrispondente duale $\mathcal{G}(\tilde{\mathbf{g}}, a, b)$ ogni segnale $\mathbf{f}$ di lunghezza L può essere (de)composto come segue:

$$\mathbf{f} = \sum_{m,n} \langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{g}}_{m,n} \rangle \mathbf{g}_{m,n}. \tag{3.14}$$

Il numero di coefficienti è pari a $N \cdot M \geq L$ e quindi rappresenta una digitalizzazione ridondante. In altre parole il numero di elementi di informazione che si

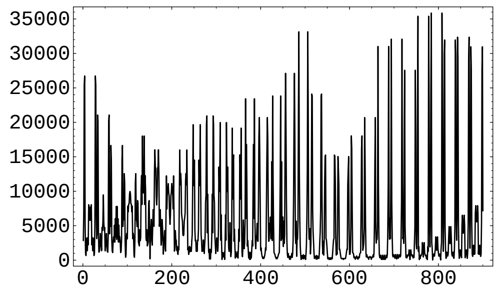


Figura 3.6: Coefficienti $|\langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{g}}_{m,n} \rangle|^2$.

stanno utilizzando è più grande rispetto al numero di campioni che costituiscono il segnale stesso. Questo a priori sembrerebbe aver complicato solamente la rappresentazione persino peggiorando la quantità di dati da trattare. In realtà, sebbene due elementi della rappresentazione condividano una certa parte di informazione (da cui la ridondanza), può succedere che uno dei due stia in effetti rappresentando meglio (rispetto all'altro) il segnale. Per cui la ridondanza aumenta la possibilità di identificazione: *più il dizionario è grande più frasi sono in grado di comporre.*

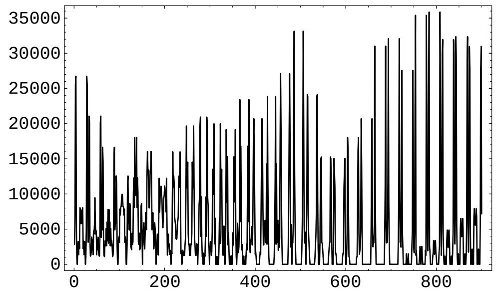


Figura 3.7: Coefficienti $|\langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{g}}_{m,n} \rangle|^2$ superiori ad una soglia fissata.

Inoltre come si può vedere da figura 3.6 i coefficienti della espansione (3.14) non sono tutti importanti allo stesso modo. Ve ne sono di molto rilevanti e ve ne sono di molto poco rilevanti. Ci si può quindi aspettare che eliminando quegli elementi della espansione i cui coefficienti sono al di sotto di una soglia di accettabilità si possa ridurre di molto l'informazione necessaria a rappresentare comunque bene il segnale. Figura 3.7 mostra infatti solo i coefficienti che sono superiori ad una data soglia.

Figura 3.8 descrive un segnale audio compresso al 58% e i rispettivi spettrogrammi. Come si può osservare dallo spettrogramma, la riduzione, sebbene sostanziale a livello di informazione utilizzata, non cambia molto la effettiva rappresentazione del segnale stesso.

All'indirizzo http://www.math.unipd.it/∼mfornasi/Master/Gabor.tar.gz è possibile scaricare un pacchetto contenente un tutorial come notebook di Mathematica (Wolfram Research) che implementa quanto descritto in questa lezione. Si suggerisce di utilizzarlo e in seguito di realizzare il seguente esercizio.

Esercizio 3.3.1. *Si mostri che se* $\{g_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{g_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sono due frame per* $L^2(\mathbb{R})$ *(o per* $l^2(\mathbb{Z}_N)$ *risp.) con rispettivi duali* $\{\tilde{g}_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{\tilde{g}_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ *allora* $\{g_{n,m}(x_1,x_2) = g_n^1(x_1)\cdot g_m^2(x_2)\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ *è una frame (prodotto tensore) per* $L^2(\mathbb{R}^2)$ *(o per* $l^2(\mathbb{Z}_N^2)$ *risp.) con duale* $\{\tilde{g}_{n,m}(x_1,x_2) = \tilde{g}_n^1(x_1)\cdot\tilde{g}_m^2(x_2)\}_{n,m\in\mathbb{N}}$.

Si usi questo risultato per costruire frame di Gabor per segnali bidimensionali in $l^2(\mathbb{Z}_N^2)$ *ed implementare (in C/C++ oppure Matlab) un algoritmo di compressione di immagini digitali.*

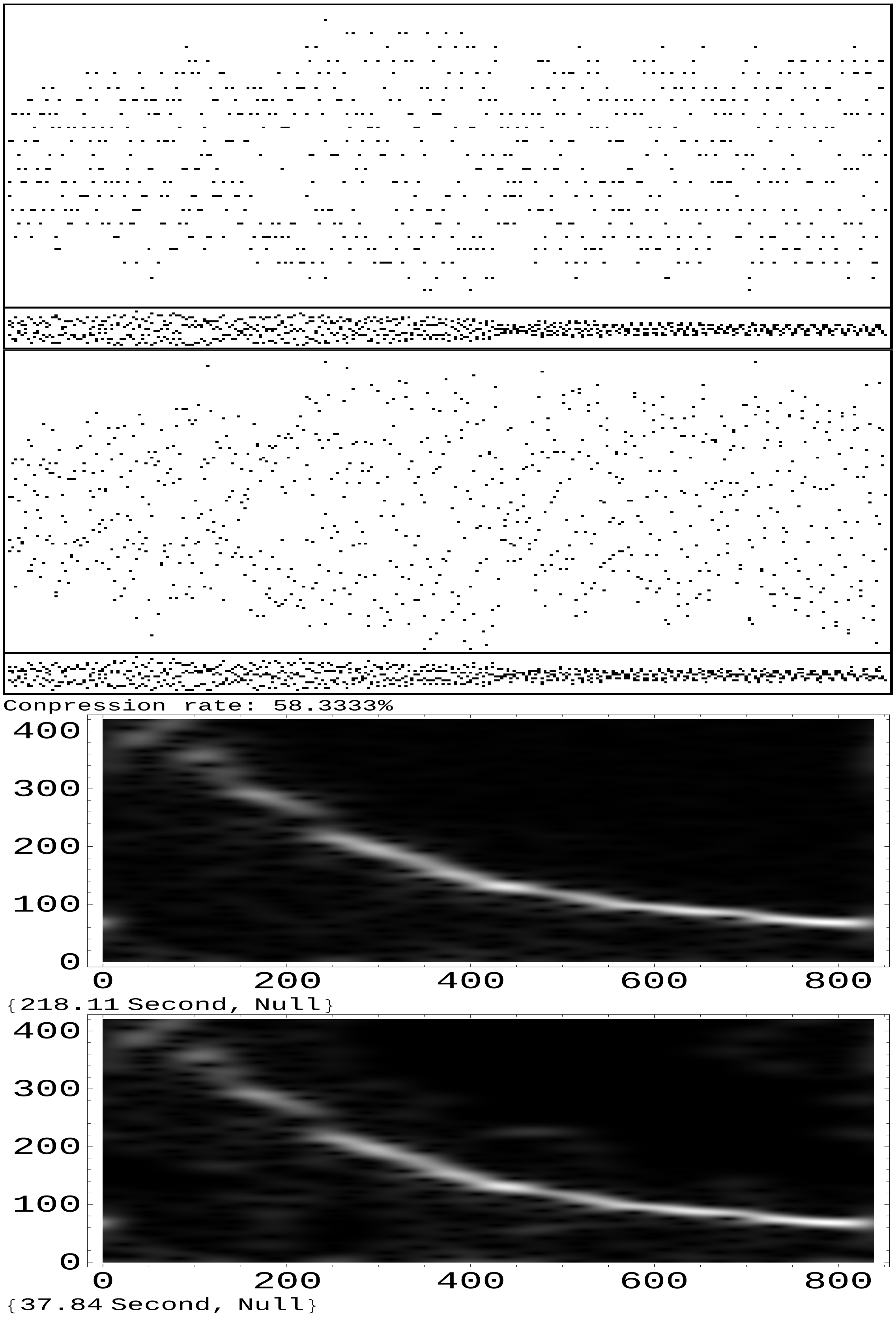


Figura 3.8: Coefficienti $|\langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{g}}_{m,n} \rangle|^2$ superiori ad una soglia fissata.

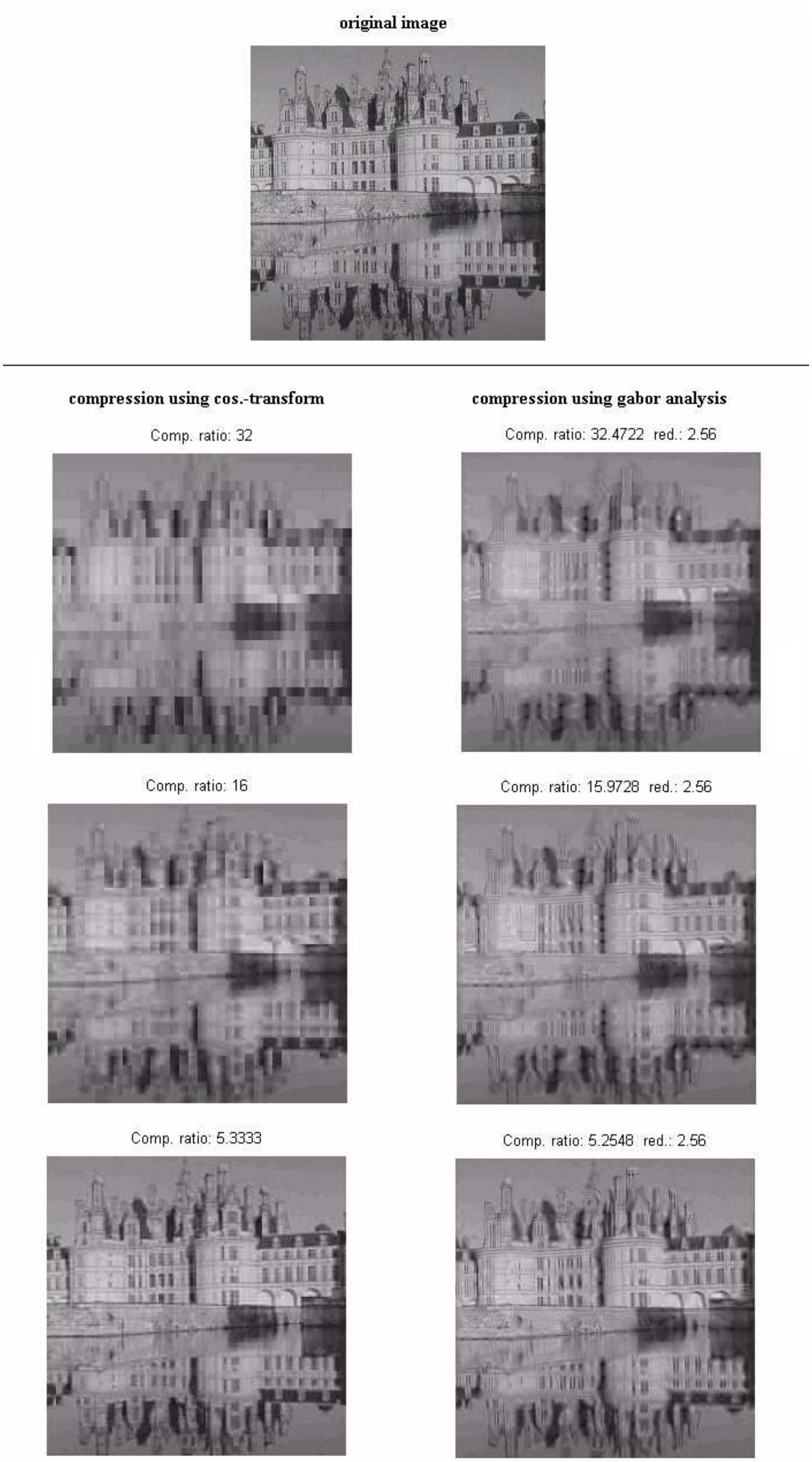


Figura 3.9: Confronto di un algoritmo di compressione mediante frame di Gabor e JPEG

Capitolo 4

2D pattern matching: armoniche circolari

La presente lezione si propone di illustrare un metodo per rappresentare e confrontare immagini digitali identificate matematicamente con funzioni dello spazio $l^2(\Omega)$, Ω cerchio di $\mathbb{Z}^2$, a meno di rotazioni.
I coefficienti di un particolare sviluppo di Fourier delle immagini, inizialmente considerate su dominio continuo, secondo una base costituita da autofunzioni di ogni operatore di rotazione, definiscono, infatti, un insieme di "pseudo-invarianti" che caratterizzano l'immagine indipendentemente dal suo orientamento. Tale sviluppo, identificato da un' equazione che coinvolge i cosiddetti coefficienti di Bessel di prima specie J_m, si mantiene, per una sua buona parte, rappresentazione efficace anche restringendo il dominio al reticolo $\mathbb{Z}^2$, determinando un carattere di invarianza per rotazioni anche di un'immagine campionata. Mediante l'opportuna definizione di un coefficiente di *matching*, viene suggerita una particolare applicazione di tale metodo al problema della ricostruzione virtuale di affreschi minutamente frammentati, dei quali si disponga di un congruo numero di parti e di un'immagine antecedente alla distruzione.

4.1 Descrizione del problema

Lo sviluppo tecnologico, caratterizzato negli ultimi anni in modo particolare dal crescente utilizzo dei calcolatori elettronici e dal potenziamento delle loro possibilità, ha fornito nuovi strumenti per la risoluzione di questioni che, per la loro complessità, erano considerate insormontabili, aprendo, così, nuove frontiere e problematiche. Uno dei campi di applicazione è stato quello connesso alla rappresentazione, al trattamento e alla trasmissione delle immagini. È noto, infatti, il notevole impatto che l'informazione visiva riesce ad ottenere, costituendo motivo di forte interesse. Nuovo impulso è stato dato anche alla matematica al fine di occuparsi di problemi concretamente legati alle immagini con le più moderne teorie dei segnali [1, 5, 6].

Uno degli strumenti che, sempre di più, è affiancato al calcolatore è lo *scanner*, dispositivo usato al fine di digitalizzare immagini, per poterle rappresentare e trattare con facilità con i moderni programmi di grafica. Il campionanamento effettuato dagli scanner è, generalmente, su reticoli a geometria quadrata: in tale contesto, un'immagine campionata e ruotata non può, in generale, coincidere, salvo interpolazioni e quindi errori, all'immagine stessa ruotata e campionata, tranne per le rotazioni di angoli multipli di $\frac{\pi}{2}$, che rispettano la geometria del reticolo di campionamento. Di conseguenza, si evidenzia il problema di un confronto di immagini digitali a meno di rotazioni.

Richiedere un tale confronto presuppone una ricerca di quei contenuti di informazione che siano invarianti rispetto all'orientamento. In particolare, si esige che solo una parte dell'informazione possa venire utilizzata allo scopo del confronto. Infatti, il fatto di voler lavorare con una geometria circolare, differente da quella intrinseca del supporto, imporrà necessariamente di operare con approssimazioni e con uno spazio di informazione ridotto e, soprattutto, sulla restrizione ad un dominio isotropo. Nel caso di figure geometriche piane sono stati studiati innumerevoli invarianti, quali, ad esempio, le aree, i perimetri, i momenti angolari, etc; volendo mantenere, invece, una certa generalità, la classe di modelli per il confronto si dovrà supporre non facilmente descrivibile come quella delle figure piane e si dovrà, quindi, richiedere un metodo di riconoscimento più generale.
Un metodo capace di un confronto di questo tipo ha innumerevoli possibilità di applicazione. Una particolare di esse è la ricostruzione virtuale di affreschi frammentati in piccole parti, delle quali sia stato conservato un congruo numero, assieme ad un'immagine dell'opera antecedente alla distruzione [8]. Infatti, non è possibile stabilire quale debba essere a priori l'orientamento di un frammento rispetto ad uno prefissato sull'immagine dell'affresco.

Il problema della ricostruzione virtuale è similare al problema di un "puzzle". Intervengono però delle ulteriori complicazioni dovute al fatto che i frammenti in genere non costituiscono la totalità, le loro dimensioni sono piccole relativamente alla superficie intera dell'affresco e i bordi non rappresentano un'informazione sufficientemente precisa ed univoca. I dati che permettono di individuare un frammento dovranno allora essere basati esclusivamente sul contenuto pittorico e la valutazione dovrà essere indipendente dalla eventuale disposizione di altri frammenti, che potrà costituire fattore discriminante solo successivamente, escludendo posizioni che potrebbero dare luogo a sovrapposizioni. Con tali premesse, questo problema offre un luogo adatto all'applicazione di un metodo di confronto come sopra descritto.

Facciamo riferimento, ad esempio, agli affreschi contenuti nella Chiesa degli Eremitani in Padova che furono gravemente danneggiati l' 11 marzo 1944 a causa di un bombardamento. Parte di questa meravigliosa opera del Mantegna,

del Guariento e di altri illustri artisti, è stata frantumata in migliaia di pezzi, producendo uno dei danni culturalmente più gravi subiti dall'Italia nella seconda guerra mondiale.
Recentemente, con lo sviluppo tecnologico e la percezione di nuove possibilità, sono accresciuti il desiderio e la speranza di vedere ricostruiti questi inestimabili affreschi.

Cercheremo ora di illustrare i dettagli di un modello matematico basato su frame locali di cosiddette armoniche circolari (una variante delle frame di Gabor, ma a geometria circolare) che rappresenti le immagini e ne consenta il confronto a meno di rotazioni e concluderemo con la definizione di un opportuno coefficiente di *matching* (corrispondenza) che ne permetta l'eventuale diretta applicazione numerica al caso specifico degli affreschi.

4.2 La rappresentazione matematica

L'idea del metodo consiste nello sviluppare le immagini, considerate come funzioni di $L^2(\Omega)$ ove Ω risulta essere un cerchio di $\mathbb{R}^2$, secondo una successione ortonormale costituita da invarianti per operatori di rotazione. In questo modo l'immagine risulta identificata dai coefficienti dello sviluppo che saranno invarianti per rotazioni, a meno di prodotto per un autovalore di modulo unitario del tipo $e^{im\theta}$. Un opportuno confronto dei coefficienti potrebbe permettere la definizione della classe di immagini che siano congrue (sovrapponibili) a meno di una rotazione ad una data.

Dopo aver stabilito l'esistenza di tale sviluppo su di un dominio continuo, le maggiori difficoltà alla applicazione del metodo alle funzioni campionate sono dovute per lo più al fenomeno dell' *aliasing*: più funzioni possono ammettere un medesimo campionamento (restrizione ad un reticolo discreto) e, quindi, rappresentare degli "alias" di uno stesso oggetto. Nel nostro caso si verifica una perdita di ortonormalità della base, che potrebbe, nel discreto, non avere più il significato che nel continuo ci è garantito. Infatti, l'incertezza che si ha sulle funzioni necessariamente si propaga anche sui loro prodotti scalari in l^2 come si è descritto nel Teorema 2.2.7. In particolare, si rischia di non poter più fruttare la proprietà di essere autofunzioni di operatori di rotazione. Allo scopo di operare su immagini digitalizzate e, quindi, definite su reticoli discreti, occorrerà cautelarsi e verificare in quali condizioni sia da cosiderare lecito il passaggio dal continuo al discreto.
Di seguito si ponga $\hat{f}(w) := \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}f(\frac{w}{2\pi})$.

Data, infatti, una funzione continua f e considerata la sua restrizione (campionamento) sul reticolo $\mathbb{Z}^2$, diciamola f^c, l'incertezza sulla possiblità di poter ricostruire in modo diretto ed univoco f a partire da f^c è strettamente legata alla sua trasformata di Fourier (modificata) $\hat{f}$. Se supponiamo unitario il passo di campionamento, allora l'incertezza sulla rappresentazione di f da parte del campionamento f^c, dipende dalla "coda" di $\hat{f}$, ossia la funzione $\widehat{\epsilon_f}$ che coincide con $\hat{f}$ fuori di $[-\pi,\pi)^2$ ed è nulla su $[-\pi,\pi)^2$. Le funzioni che ammettono trasformata di Fourier con supporto (banda) limitato in $[-\pi,\pi)^2$ sono invece ben descritte, in quanto direttemente ricostruibili, dai propri campioni. Come conseguenza, anche i prodotti scalari in l^2 saranno affetti da un'incertezza che dipenderà dalle code delle trasformate di Fourier delle funzioni in gioco. In particolare, si può dimostrare (Teorema 2.2.7) che la radice quadrata dell' "energia" (integrale quadrato) delle code risulta essere il parametro di giudizio caratteristico di tale incertezza.

Ricordando che per funzioni definite su compatti la trasformata di Fourier è restrizione di una funzione intera ad $\mathbb{R}^2$, e, quindi, non a supporto compatto, si deduce che qualunque sviluppo venisse scelto, non potrebbe, in generale, mantenere la propria ortonormalità nel discreto. L'unica possibilità per il campionamento di rispettare il prodotto scalare è di scegliere una base che limiti le incertezze, almeno per una buona parte delle funzioni che la compongono. La nostra ricerca si dovà limitare a quelle basi che possano essere costituite da autofunzioni per operatori di rotazione. Dal Lemma 4.6.1 riportato in Appendice si deduce che una generica base debba essere del tipo $d_{m,n}(r,\theta) = e^{im\theta}R_{m,n}(r), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, ove $(R_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione ortonormale nello spazio $L^2_{r^{1/2}}$ delle funzioni f tali che $r^{1/2}f(r) \in L^2$. Per questo tipo di funzioni si riescono a dare delle stime (Appendice, Teoremi 4.6.5 e 4.6.7) dell'andamento delle loro trasformate di Fourier, che non sono abbastanza fini per garantire, in generale, che, restringendo il dominio al discreto, venga mantenuta l'ortonormalità e l'invarianza per rotazioni, compatibilmente al teorema del campionamento. Infatti se R_α è un operatore di rotazione di angolo α (Appendice) allora per ogni f si ha

$$\langle R_\alpha f, d_{m,n}(r,\theta)\rangle = \langle f, R_{-\alpha} d_{m,n}(r,\theta)\rangle = e^{im\alpha}\langle f, d_{m,n}(r,\theta)\rangle.$$

Quindi una buona rappresentazione dei prodotti scalari anche nel discreto (Teorema 2.2.7) assicura una estensione della invarianza per rotazione anche per funzioni campionate.

Il Corollario 4.5.8 suggerisce una particolare classe di basi, per cui la trasformata di Fourier si riesce a scrivere in forma esplicita e conseguentemente fornisce uno strumento di indagine diretto.

Proseguiamo il nostro studio, allora, sulla particolare classe di queste basi, identificata da opportuni insiemi numerabili di reali positivi $(\rho_{m,n})_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$, che soddisfino all'equazione:

$$(*) \quad \rho_{m,n_1} J'_m(\rho_{m,n_1}) J_m(\rho_{m,n_2}) = \rho_{m,n_2} J'_m(\rho_{m,n_2}) J_m(\rho_{m,n_1}),$$

ove J_m, è il coefficinte di Bessel di ordine m, mediante la relazione:

$$d_{m,n}(r,\theta) = g_{m,n} e^{im\theta} J_m(\rho_{m,n} r),$$

$g_{m,n}$ costante di normalizzazione. In particolare, la condizione (*) è strettamente connessa al fatto che il Laplaciano si comporti come un operatore autoaggiunto (hermetiano), rispetto al prodotto scalare in L^2, sullo spazio vettoriale generato dalle soluzioni di un problema agli autovalori analogo a quello descritto in Appendice, con la condizione che le derivate di una soluzione nella direzione normale al bordo siano proporzionali alla stessa. Come ulteriore giustificazione, quindi, per la scelta di tali basi, si ricordi che il Laplaciano è essenzialmente l'unico operatore differenziale a coefficienti costanti che commuti con gli operatori di rotazione e che il suo spettro, quando è autoaggiunto, caratterizza una successione di autospazi ortogonali che risultano, così, invarianti per rotazioni. Una condizione necessaria e sufficiente affinchè si verifichi (*) è che valga:

$$(**) \quad \rho_{m,n} J'_m(\rho_{m,n}) + \sigma J_m(\rho_{m,n}) = 0,$$

per ogni m ed n e σ costante fissata. Questa seconda equazione mista ammette un'infinità numerabile di zeri reali positivi (Appendice, proposizione 4.5.3) la quale rende $d_{m,n}(r,\theta) = g_{m,n} e^{im\theta} J_m(\rho_{m,n} r)$ una successione ortonormale che, al tendere di $\sigma \to \infty$, diviene anche base completa di L^2.

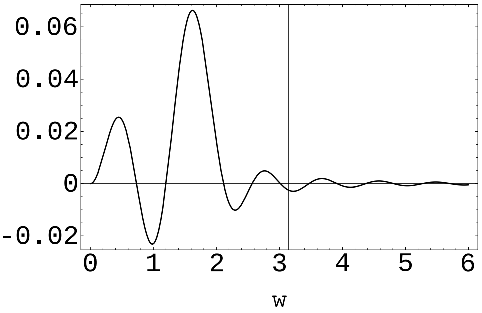


Figura 4.1: Parte radiale della TdF di $d_{1,5,7}$ per una particolare scelta di $\rho_{1,5}$

Ci si deve chiedere ora come queste particolari funzioni si comportino nei confronti dell'aliasing. Il fatto che si considerino come definite su un cerchio e, quindi, essenzialmente a supporto compatto, ci porterebbe a concludere che, in generale, non v'è speranza di mantenere l'ortonormalità e l'invarianza per rotazioni. Allo scopo di salvaguardare lo sviluppo si potrebbero usare le cosiddette "funzioni finestra" che convolute con una funzione a supporto compatto la approssimano e la rendono più sicura rispetto all'aliasing, limitando le code delle trasformate: tale soluzione però risulta non necessaria e addirittura sconveniente, una volta osservata una peculiarità delle trasforamate di Fourier delle $(d_{m,n})_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$. Esse non sono a supporto compatto, ma sono pressoché nulle fuori da un compatto, come mostriamo di seguito.
Sia $(d_{m,n})_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$ una generica base come descritta da (*) (o anche da (**)). Allo scopo di cosiderarla su domini di raggio arbitrario, si ponga per $a > 0$:

$$d_{m,n,a}(r,\theta) \equiv \frac{1}{a} d_{m,n}(\frac{r}{a}, \theta).$$

Dai risultati riportati in Appendice, si ha che $|\widehat{d_{m,n,a}}(\rho,\varphi)|$ ammette un massimo assoluto per $\rho = \rho_{m,n}/a$. Inoltre, $|\widehat{d_{m,n,a}}(\rho,\varphi)|$ decade all'infinito almeno

come $\rho^{-3/2}$ (Appendice) e, dunque, piuttosto rapidamente (Fig. 4.1).
In base a queste osservazioni, allo scopo di limitare l'intervento di aliasing e la perdita di ortonormalità, si potrebbe pensare di scegliere tra le $(d_{m,n,a})_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$, quelle che ammettono il picco caratteristico della trasformata tutto contenuto in $[0,\pi)$ e cioè con $\rho_{m,n+1}/a < \pi$. Alcune stime e delle dirette integrazioni numeriche confermano questa idea. Infatti, in questo modo, si limita l' "energia" delle code e, conseguentemente, le incertezze sui prodotti scalari.
Ci si potrebbe chiedere, ora, se, tra questi possibili sviluppi, ve ne sia uno che meglio si adatta a mantenere una legalità nel passaggio dal continuo al discreto. A questo proposito, si osservi che la distribuzione dei valori $(\rho_{m,n})_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$, non dipende dalla particolare base scelta, in quanto $\rho_{m,n} \in [j_{m,n}, j_{m,n+1}]$, ove $(j_{m,n})_n$ sono gli zeri positivi di J_m, come si prova studiando il comportamento della funzione $\frac{J_m(x)}{xJ'_m(x)}$ (Appendice). Semplici osservazioni sulle distribuzioni possibili mostrano, tuttavia, che il numero massimo di valori $(\rho_{m,n})_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$ che cadono nell'intervallo $[0, a\pi)$ è raggiunto scegliendo come base le armoniche circolari $(e_{m,n,a})_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$, cioè quella per cui $\rho_{m,n} = j_{m,n}$. In particolare il fatto che $|\widehat{e_{m,n,a}}(\rho,\varphi)|$ decada più rapidamente, e cioè come $\rho^{-5/2}$ (Appendice), suggerisce che il numero di elementi della base per cui la perdita di ortonormalità è limitata sotto una certa incertezza sia maggiore per le $(e_{m,n,a})_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$. Questa potrebbe, quindi, costituire una buona scelta per ottenere una massima rappresentazione dell'immagine digitale, senza però dover subire la gravosa perdita di ortonormalità e di invarianza per rotazioni.
Una diretta integrazione numerica sullo spettro delle $(e_{m,n,a})_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$ mostra come l'errore sui prodotti scalari si evidenzi non appena $j_{m,n+1}/a$ oltrepassi la frequenza limite di π.

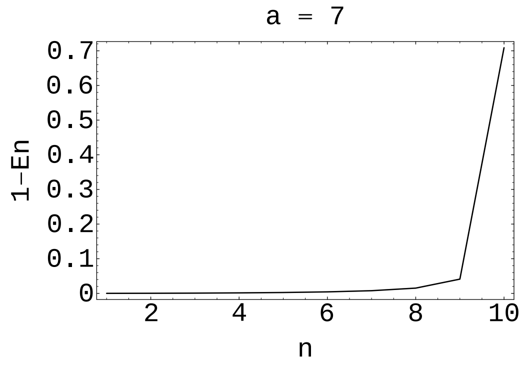


Figura 4.2: Energia della coda della Tdf di $e_{1,n,7}$ al variare di n

Un'interessante analisi visuale mostra come, in questo caso, la perdita di ortonormalità coincida con la perdita della simmetria circolare della trasformata di Fourier. La peculiare forma a *torre* della trasformata di Fourier, caratterizzata da un picco e da un rapido decadimento, si inviluppa a causa della tassellatura periodica che la trasformata di Fourier discreta determina sul dominio, comportando la sovrapposizione delle code, come descritto dal teorema di Shannon e dalla formula della somma di Poisson.

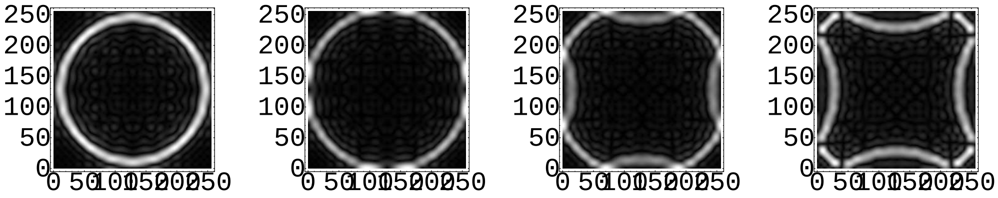


Figura 4.3: $Re(\widehat{e_{5,n,7}})$ per valori di n crescenti

Risulta allora chiaro che limitare l'incertezza sui prodotti scalari dovuta al campionamento equivale a mantenere la frequenza di picco caratteristica entro il limite di π e a conservare la simmetria circolare.

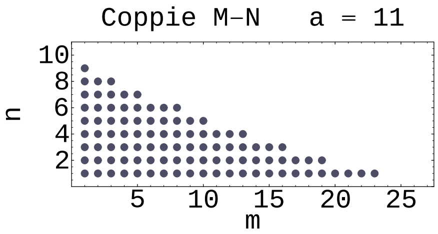


Figura 4.4: Spazio delle coppie (m, n) per cui $\|\widehat{\epsilon}_{e_{m,n,11}}\|_2$ è limitato da 0.3

Tale equivalenza, può essere ulteriormente illustrata con un esempio: tra le armoniche circolari quelle per cui

$$\|\widehat{\epsilon}_{e_{m,n,a}}\|_2 \leq 0.3,$$

si ottiene una rappresentazione dell'insieme delle armoniche circolari per cui l'incertezza sui prodotti scalari è limitata da 0.3 per $a = 11$ come un insieme di coppie (m, n), $m > 0$, come in Fig. 4.4.
Calcolando, invece, l'insieme delle coppie (m, n), $m > 0$, tali per cui $j_{m,n+1}/a < \pi$ si ottiene una rappresentazione come in Fig. 4.5 e tali rappresentazioni sono pressoché equivalenti. Studiando i risultati numerici, si deduce che lo spazio su cui effettuare i confronti tra le immagini può essere approssimativamente ben rappresentato dall'insieme:

$$SpMN_a = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : 0 \leq |m| \leq 2a, \;\; 0 < n \leq -m/2 + a\}.$$

Il fatto di essersi ristretti precedentemente al caso $m > 0$ e, ora, di aver introdotto il modulo nella definizione di $SpMN_a$ è giustificato da:

$$e_{-m,n,a} = (-1)^m \overline{e_{m,n,a}},$$

conseguenza della nota equazione per i coefficienti di Bessel:

$$J_{-m}(r) = (-1)^m J_m(r).$$

Le rappresentazione delle Figg. 4.4 e 4.5 sono quindi sufficienti a descrivere tutto $SpMN_a$.

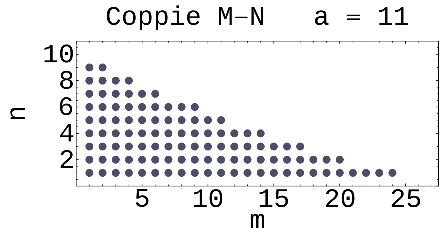


Figura 4.5: Spazio delle coppie (m, n) per cui $j_{m,n}/a < \pi$

Si noti che tale spazio ha dimensione circa pari a due volte il quadrato del raggio a del frammento. Di conseguenza il numero di elementi utili della base è direttamente proporzionale all'area del cerchio, per cui l'informazione rappresentata cresce ovviamente con il crescere del raggio.

4.3 La definizione del matching e la proposta di applicazione al problema di un affresco

Allo scopo di poter localizzare le immagini di frammenti di un affresco su di una sua rappresentazione fotografica, applichiamo i risultati presentati nei precedenti paragrafi, cercando di trovare un criterio per stabilire se un'immagine è congrua ad un'altra a meno di rotazione, ricordando come sia impossibile risalire a priori all'orientamento che in origine doveva avere avuto un frammento, rispetto all'affresco, prima della distruzione.
Ossevato che le immagini digitali vengono ben rappresentate da matrici bidimensionali, si considerino campionate tutte le funzioni che seguono e le si identifichi con la matrice del loro campionamento. In base alle cosiderazioni fatte, un'immagine supportata su di un cerchio discreto di raggio $a > 0$ può essere proiettata su uno spazio di dimensione finita, identificato dall'insieme $SpMN_a$. Tale spazio ha la proprietà di avere come base (quasi) ortonormale alcuni invarianti rispetto ad operatori di rotazione. In particolare se $\alpha \in [0, 2\pi)$ e R_α è l'operatore di rotazione associato, si ha:

$$R_\alpha e_{m,n,a} = e^{im\alpha} e_{m,n,a}, \forall (m, n) \in SpMN_a.$$

La scelta di tale spazio ci garantisce che il passaggio dal continuo al discreto sia quasi esente da errori. Se $\widetilde{F}_{SpMN_a}$ rappresenta la proiezione su $SpMN_a$ di un cerchio, diciamolo $\widetilde{F}$, estratto dall'immagine di un frammento e F_{SpMN_a} la proiezione del suo ruotato di $-\alpha$, diciamolo F, in modo da rispettare l'orientamento originale, si ha:

$$\widetilde{F}_{SpMN_a} \approx \sum_{(m,n)\in SpMN_a} e^{im\alpha} f_{m,n} e_{m,n,a},$$

ove $f_{m,n} = (F_{SpMN_a}, e_{m,n,a})$ e $(\cdot,\cdot)$ è il prodotto scalare in $l^2(\mathbb{Z}^2)$. Ma, riscrivendo la precedente:

$$\widetilde{F}_{SpMN_a} \approx \sum_{0\leq |m| \leq 2a} f_m,$$

ove $f_m = \sum_{0<n\leq -m/2+a} e^{im\alpha} f_{m,n} e_{m,n,a}$. Se $g_{i,j}$ rappresentasse la proiezione su $SpMN_a$ di un cerchio estratto attorno ad una qualche posizione (i,j) dell'immagine dell'affresco G potremmo analogamente scrivere:

$$g_{i,j} \approx \sum_{0\leq |m| \leq 2a} g_m^{i,j},$$

ove $g_m^{i,j} = \sum_{0<n\leq -m/2+a} g_{m,n}^{i,j} e_{m,n,a}$, $g_{m,n}^{i,j} = (g_{i,j}, e_{m,n,a})$.

Ci si propone di poter confrontare i due sviluppi e di definire un coefficiente di *matching* invariante per rotazioni e per fattori scalari. Premettiamo, però, alcuni risultati noti e delle importanti osservazioni.

Di seguito supporremo che le operazioni eseguite sulle matrici agiscano puntualmente, salvo differenti indicazioni esplicite. Si consideri, ora, estesa a zero la f_m fuori del suo dominio in modo tale che essa sia rappresentata da una matrice delle stesse dimensioni di G e di traslarne il supporto in modo opportuno. Posto $\star$ l'operatore di convoluzione per quanto osservato sulla ortonormalità della base si hanno le seguenti uguaglianze e approssimazioni:

$$(f_m \star \overline{G})(i,j) = (f_m, g^{i,j}) \approx (f_m, g_m^{i,j}) \approx \sum_{0<n\leq -m/2+a} e^{im\alpha} f_{m,n} \overline{(g_{m,n}^{i,j})}.$$

Per una proprietà notevole della convoluzione si ha anche:

$$\mathcal{F}^{-1}[(\mathcal{F}[f_m]\mathcal{F}[\overline{G}])](i,j) = c(f_m \star \overline{G})(i,j),$$

ove $\mathcal{F}[\cdot]$ è la trasformata di Fourier discreta e $c > 0$ una qualche costante che dipende dalla definizione di $\mathcal{F}[\cdot]$ (in genere potremmo supporre $c = 1$). Questa tecnica è molto usata per trasportare un'immagine lungo la superficie di un'altra ed eseguire il confronto con la parte sottostante.

Allo scopo di specificare il metodo al caso concreto, si osservi che le immagini dei frammenti e dell'affresco, divise per canale (RGB), possono essere considerate come funzioni a valori reali. Si deve, quindi, notare che i termini con $m < 0$ dello spazio $SpMN_a$ sono, per immagini reali, ridondanti ed essenzialmente ricavabili dalla proiezione sulla parte di $SpMN_a$ per cui $m > 0$. Vale, infatti:

$$(h, e_{-m,n,a}) = (-1)^m \overline{(h, e_{m,n,a})},$$

per ogni funzione h a valori reali definita sul cerchio. Eviteremo, quindi, di considerare le $e_{-m,n,a}$, ottenendo di ridurre a metà lo spazio su cui fare i confronti e conseguentemente, come vedremo, i tempi di calcolo. Alcuni risultati numerici rivelano, inoltre, che, mediamente, le proiezioni sullo spazio generato da $e_{0,n,a}$ sono le più importanti in termini di peso, rispetto a tutte le altre. Pur costituendo $e_{0,n,a}$ l'unica vera e propria componente invariante per rotazioni dello sviluppo, definiremo un coefficiente di *matching* che non terrà conto dei contributi dati dalle proiezioni su $e_{0,n,a}$. Infatti, rischieremmo di far pesare troppo una componente rispetto a tutte le altre, comunque decisive ed importanti. Osservato questo, diamo ora la seguente

Definizione 4.3.1. *Sia $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e $z, w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.*
Si consideri l'operatore binario non commutativo e non associativo $\oplus_k$ definito da:

$$z \oplus_k w = z + w(\frac{z}{|z|})^{1-k}.$$

Diremo somma circolare di ordine $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ di $z_1, ..., z_m \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ l'operatore definito da:

$$\begin{cases} \bigoplus_{k=1}^{m} z_k = z_1, & m = 1 \\ \bigoplus_{k=1}^{m} z_k = (\bigoplus_{k=1}^{m-1} z_k) \oplus_m z_m & m > 1 \end{cases}.$$

Siamo ora pronti a definire il matching:

Definizione 4.3.2. *Nelle notazioni sin qui portate, si definisce la matrice di matching tra F e G*

$$M_G^F = \frac{1}{\sum_{0<m\leq 2a} \|f_m\|_2^2} \bigoplus_{m=1}^{2a} (\frac{\|f_m\|_2}{(\|g_m^{i,j}\|_2)_{i,j}} \mathcal{F}^{-1}[(\mathcal{F}[f_m]\mathcal{F}[\overline{G}])],$$

ove $\|f_m\|_2$ è la norma di f_m in $l^2(\mathbb{Z}^2)$ e $(\|g_m^{i,j}\|_2)_{i,j}$ è la matrice delle norme in $l^2(\mathbb{Z}^2)$ degli $g_m^{i,j}$.

Per ogni (i, j) punto dell'immagine G, la matrice di matching restituisce il coefficiente di matching dato da $0 < |M_G^F(i, j)| \leq 1$, indice della corrispondenza con il frammento a meno di rotazioni. Supponendo, infatti, che esista $(\bar{i}, \bar{j})$ posizione in G, tale che:

$$g_{\bar{i},\bar{j}} = F_{SpMN_a},$$

si ottiene:

$$\mathcal{F}^{-1}[(\mathcal{F}[f_m]\mathcal{F}[\overline{G}])](\bar{i}, \bar{j}) \approx e^{im\alpha}\|f_m\|_2^2,$$

per ogni $0 < m \leq 2a$.. Ma allora si ha:

$$M_G^F(\bar{i}, \bar{j}) \approx \frac{1}{\sum_{0<m\leq 2a} \|f_m\|_2^2} \bigoplus_{m=1}^{2a} e^{im\alpha}\|f_m\|_2^2 = e^{i\alpha}.$$

Si deduce che condizione necessaria affinché una posizione $(\bar{i}, \bar{j})$ sia quella originaria del frammento è che:

$$\begin{cases} |M_G^F(\bar{i}, \bar{j})| \approx 1 \\ Arg(M_G^F(\bar{i}, \bar{j})) \approx \alpha \end{cases}$$

Questo fatto, che non costituisce condizione sufficiente, non è comunque facile a verificarsi, in quanto si dovrebbe avere

$$|(f_m, g_m^{i,j})| \approx c\|f_m\|_2^2,$$

per ogni $0 < m \leq 2a$ e per un qualche $c > 0$ costante. Se a è abbastanza grande, lo spazio generato, ad esempio, dalle funzioni $(e_{1,n,a})_{(1,n)\in SpMN_a}$ ha dimensione $a-1$ e due vettori presi casualmente in un tale spazio hanno una probabilità molto bassa di essere proporzionali. La condizione diventa, dunque, anche molto stringente, non appena $a >> 0$.

Il metodo proposto è stato implementato con linguaggi C e C++, su varie piattaforme ed è stato applicato nel caso degli affreschi della Chiesa degli Eremitani in Padova, offrendo dei risultati notevoli in termini di capacità di riconoscimento. Si rimanda per maggiori dettagli ad una più completa argomentazione [8].

Figura 4.6: Alcuni frammenti ricomposti

4.4 Un'ipotesi di parallelizzazione

Le immagini sono uno degli insiemi di dati più gravosi da un punto di vista dell'eleborazione, richiedendo enormi risorse sia in termini di velocità sia in termini di memoria. I tempi di calcolo sono uno dei fattori importanti di cui tenere conto nei problemi che coinvolgono le immagini.

Allo scopo di parallelizzare il calcolo e conseguentemente di ridurre i tempi di elaborazione, è importante evidenziare quali siano le operazioni effettuabili in modo indipendente e quali invece no. Il fatto che $\oplus_k$ non sia, in generale, commutativo e associativo impone un ordine nel calcolo della matrice di matching, almeno per la definizione che si è data in 4.3.2. La somma circolare di ordine k è, quindi, subordinata alla somma circolare di ordine $k-1$ dei termini precedenti. Invece il calcolo di ogni singolo termine non è vincolato da quello degli altri. Si deve inoltre osservare che i tempi di esecuzione di una convoluzione del tipo $\mathcal{F}^{-1}[(\mathcal{F}[f_m]\mathcal{F}[\overline{G}])]$ e il calcolo della matrice delle norme, sono in generale preponderanti rispetto al calcolo delle somme e della trasmissione dei dati, per cui una parallelizzazione in questo senso permetterebbe di diminuire l'attesa di un fattore che possiamo supporre prossimo a $2a$, nel caso si disponga di un pari numero di esecutori. In particolare si potrebbe incaricare il processore che calcola il termine per $m = 1$ di raccogliere i risultati provenienti dagli altri ed eseguire le somme. Questa idea si può generalizzare ad un numero $N < 2a$ di processori che sia divisore intero di $2a$. Ciascuno di essi sarà incaricato del calcolo di $\frac{2a}{N}$ termini della somma, ed uno, in particolare, di raccogliere i risultati in ordine ed eseguire le somme. In questo caso, però, le attese per lo scambio dei risultati tra esecutori rischiano di aumentare. Allo scopo di diminuire i tempi si potrebbero distribuire i termini da calcolare in modo che, nel momento in cui tutti gli esecutori hanno finito di operare un termine, si rendano disponibili i prossimi $\frac{2a}{N}$ termini della somma nell'ordine opportuno, eseguendo, per così dire, un calcolo per righe. In questo caso verranno effettuate $(2a - \frac{2a}{N})$ trasmissioni e dunque supporremo ancora che il grado di parallelizzazione si approssimi a N. Si deduce che nel caso limite di $N = 2a$ la parallelizzazione sia massima, ma con il maggiore dispendio di tempo in trasmissione. Nel caso si disponga di una macchina parallela, come ad esempio il Cray T3E del CINECA, si potrebbero valutare i tempi medi effettivi e calcolare quale possa essere la soluzione ottimale in termini del numero processori. Precedenti esperimenti fatti sul Cray, hanno mostrato che i tempi di trasmissione crescono mediamente in modo lineare con la quantità di informazione scambiata. Questo potrebbe far supporre che la scelta per $N = 2a$, sia, in effetti, comunque la migliore.

4.5 APPENDICE

La presente Appendice raccoglie brevemente i risultati citati nel corso della lezione.

Lemma 4.5.1. *Sia $\alpha \in [0, 2\pi[$ e sia R_α operatore di rotazione associato ad α dalla relazione*

$$R_\alpha[u(r,\theta)] \equiv u(r, \theta + \alpha),$$

ove u è definita su $\mathbb{R}^2$ in coordinate polari. Allora u è autofunzione per R_α, per *ogni* $\alpha \in [0, 2\pi[$ *se e soltanto se* u *è del tipo:*

$$u(r,\theta) \equiv e^{i(\theta m)} R(r),$$

per un qualche $m \in \mathbb{Z}$*, e una* R *funzione di* $[0, \infty[$ *a valori in* $\mathbb{C}$.

Si consideri la nota descrizione del Laplaciano in coordinate polari:

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2.$$

Proposizione 4.5.2. *Ci proponiamo di risolvere il problema agli autovalori dato da:*

$$(*) \begin{cases} (\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2) f_m(r,\varphi) = -\lambda_m f_m(r,\varphi), \\ f_{m|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

ove Ω *è un cerchio di* $\mathbb{R}^2$*. A tale scopo consideriamo* $f_m(r,\varphi) = R_m(r)\Phi_m(\varphi)$ *a variabili separate e sostituendo* f_m *quale proposta soluzione di (*) si ottiene:*

$$r^2 \frac{R_m''(r)}{R_m(r)} + r\frac{R_m'(r)}{R_m(r)} - \lambda_m r^2 = c = -\frac{\Phi_m''(\varphi)}{\Phi_m(\varphi)}.$$

Si prova che la costante di separazione c *è del tipo* $c = m^2$ *con* $m \in \mathbb{Z}$*. Si trova che*

$$\Phi_m(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} e^{im\varphi},$$

e che R_m *è soluzione dell'equazione:*

$$(**)(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + (\lambda_m - \frac{m^2}{r^2}))R_m = 0.$$

È facile accorgersi della relazione che intercorre tra la precedente equazione (**) e l'equazione di Bessel e possiamo trovare la soluzione generica per (**) data da:

$$R_m(r) = A_m J_m(\lambda_m^{1/2} r) + B_m Y_m(\lambda_m^{1/2} r),$$

ove J_m *e* Y_m *sono le funzioni di Bessel di ordine* m*, di prima e seconda specie rispettivamente. Osserviamo ora che* $Y_m(\lambda_m^{1/2} r)$ *ha una singolarità in* 0 *e che* $rY_m^2(\lambda_m^{1/2} r)$*non è sommabile e, quindi, affinchè* R_m *soddisfi alla richiesta* $f_m \in L^2(\Omega)$ *deve essere* $B_m = 0$*. Le condizioni al bordo di annullamento impongono inoltre che* $J_m(\lambda_m^{1/2}) = 0$ *e conseguentemente che* $\lambda_m^{1/2}$ *sia zero della funzione di Bessel* J_m*. Come si può dimostrare* J_m *ammette una infinità numerabile di zeri semplici reali.*

L'effetto di tale condizione è:

$$\lambda_{m,n} = (j_{m,n})^2,$$

ove $m \in \mathbb{Z}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *e* $j_{m,n}$ *è l'n-esimo zero della funzione di Bessel* J_m*. Questa condizione permette di ottenere gli autovalori e le autofunzioni del laplaciano sul cerchio in condizioni di Dirichlet come:*

$$e_{m,n} = c_{m,n} J_m(j_{m,n} r) e^{im\varphi}, \ \ m \in \mathbb{Z}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

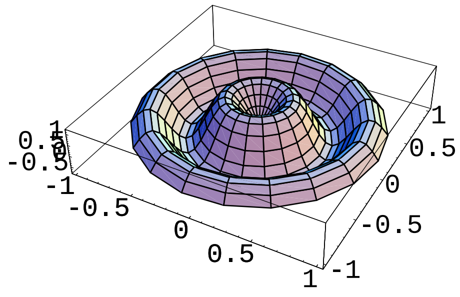


Figura 4.7: Parte reale dell'armonica circolare di ordine (1,2)

La costante $c_{m,n}$ *viene introdotta come normalizzazione rispetto al prodotto scalare in* L^2 *e si prova che:*

$$c_{m,n} = \pi^{-\frac{1}{2}} [\frac{dJ_m(s)}{ds}|_{s=j_{m,n}}]^{-1}.$$

La successione $(e_{m,n})_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ *definisce una base completa per* $L^2(\Omega)$ *che sappiamo essere costituita da invarianti rispetto agli operatori di rotazione. Chiameremo tali funzioni armoniche circolari. Inoltre, non è difficile dimostrare che il sistema* $(e^k_{m,n})_{m,k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ *definito da*

$$e^k_{m,n}(x) = e_{m,n}(x - k)$$

è una frame per $L^2(\mathbb{R}^2)$. *Tale sistema generalizza le frame di Gabor bidimensionali, ma su una geometria circolare.*

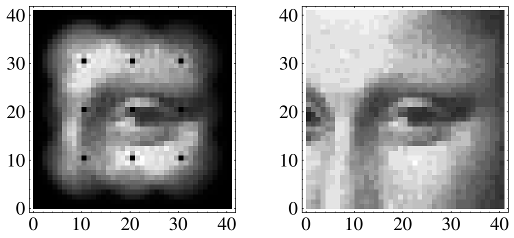


Figura 4.8: L'occhio della Gioconda ricostruito con la frame $(e^k_{m,n})_{m,k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$.

L'intervento degli zeri $j_{m,n}$ *della funzione di Bessel* J_m *è dovuto alla particolare scelta della condizione di annullamento al bordo. Questa condizione può essere sostituita dalla condizione più generale che le derivate parziali nella direzione della normale positiva siano proporzionali alla funzione stessa. In particolare, nel nostro caso tale richiesta è soddisfatta se e soltanto se*

$$\lambda_m^{1/2} J'_m(\lambda_m^{1/2}) + \sigma J_m(\lambda_m^{1/2}) = 0,$$

per ogni m. Con tale condizione il Laplaciano si mantiene autoaggiunto e come soluzione del problema agli autovalori si ottiene un insieme ortonormale del tipo $d_{m,n}(r,\theta) = g_{m,n}e^{im\theta}J_m(\rho_{m,n}r)$ dove $\rho_{m,n}$ sarà una radice dell'equazione $rJ'_m(r)+\sigma J_m(r) = 0$ e $g_{m,n}$ una opportuna costante di normalizzazione. Questa classe di basi è detta di Dini di cui fanno parte quelle che abbiamo chiamato armoniche circolari.

Proposizione 4.5.3. *Per ogni σ costante fissata e $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, esiste uno ed un solo zero dell'equazione $rJ'_m(r) + \sigma J_m(r) = 0$ nell'intervallo $[j_{m,n}, j_{m,n+1}]$.*

Definizione 4.5.4. *Sia f una funzione di $[0,+\infty)$ in $\mathbb{C}$. Diremo trasformata di Hankel di ordine m della funzione f, ogni qual volta sia definita, la funzione:*

$$H^m(f)(\rho) = \int_0^{+\infty} rf(r)J_m(\rho r)dr.$$

Teorema 4.5.5. *(Riduzione della Trasformata di Fourier) Siano $m \in \mathbb{Z}$ $F_m \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $F_m(r,\theta) = f(r)e^{im\theta}$ con f funzione di $[0,+\infty)$ a valori in $\mathbb{C}$. Allora vale l'uguaglianza:*

$$\widehat{F_m}(\rho,\varphi) \equiv (-i)^m e^{im\varphi}H^m(f)(\rho).$$

Sia $(d_{m,n})_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$ una generica base di Dini. Allo scopo di cosiderarla su domini di raggio arbitrario, si ponga per $a > 0$:

$$d_{m,n,a}(r,\theta) \equiv \frac{1}{a}d_{m,n}(\frac{r}{a},\theta).$$

Proposizione 4.5.6. *Siano $a > 0$ e $(d_{m,n,a})_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$ una base di Dini definita su B(0,a). Allora*

$$\widehat{d_{m,n,a}}(\rho,\varphi) = e^{im\varphi}(-i)^m a g_{m,n}\frac{\rho_{m,n}J_{m-1}(\rho_{m,n})J_m(a\rho) - (\rho a)J_{m-1}(\rho a)J_m(\rho_{m,n})}{(a\rho)^2 - \rho_{m,n}^2}.$$

Teorema 4.5.7. *Sia f una funzione definita su $[0,+\infty)$ a valori in $\mathbb{C}$, tale che $r^{\frac{2-k+1}{2}}f(r) \in L^k([0,+\infty))$, $k = 1,2$, e tale che $f(r) = 0$ per $r > \alpha > 0$. Sia F la funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{C}$ definita da:*

$$F(r,\theta) = f(r).$$

Vale allora la stima:

$$|H^m(f)(\rho)| \leq \frac{\|F\|_2^2}{2\pi}[\frac{\alpha^2}{2}(J_m^2(\alpha\rho) - J_{m-1}(\alpha\rho)J_{m+1}(\alpha\rho))].$$

Corollario 4.5.8. *Nelle ipotesi e premesse del precendente teorema si ha che la stima è raggiunta ad un dato $\rho = \rho_0$ se e soltanto se*

$$f(r) = \begin{cases} AJ_m(r\rho_0), & r \leq \alpha \\ 0, & r > \alpha \end{cases} \quad e$$

$$H^m(f)(\rho) = A\alpha \frac{\rho_0 J_m(\rho\alpha) J_{m-1}(\rho_0\alpha) - \rho J_m(\rho_0\alpha) J_{m-1}(\rho\alpha)}{\rho^2 - \rho_0^2},$$

ove A è una costante non nulla. In particolare, calcolando il limite per $\rho \mapsto \rho_0$ si ha

$$H^m(f)(\rho_0) = \frac{\|F\|_2^2 \alpha^2}{4\pi} [J_m^2(\alpha\rho_0) + J_{m+1}^2(\alpha\rho_0)] - \frac{\|F\|_2^2 m\alpha}{2\pi\rho_0} J_m(\alpha\rho_0) J_{m+1}(\alpha\rho_0).$$

Bibliografia

[1] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.

[2] G. De Marco, *Analisi Due/1*, Decibel-Zanichelli, 1994 e successive ristampe.

[3] G. De Marco, *Analisi Due/2*, Decibel-Zanichelli, 1994 e successive ristampe.

[4] J. W. Cooley and J.W. Tukey, An algorithm for the machine computation of complex Fourier series, Math. Comp., 19 (1965), 297-301.

[5] H. G. Feichtinger, T. Strohmer (Eds.), *Gabor Analysis and Algorithms*, Birkhäuser, 1998.

[6] H. G. Feichtinger, T. Strohmer (Eds.), *Advances in Gabor Analysis*, Birkhäuser, 2003.

[7] M. Fornasier, Function spaces inclusions and rate of convergence of Riemann-type sums in numerical integration, to appear on Num. Func. Anal. Opt.

[8] M. Fornasier, D. Toniolo, Compactly supported circular harmonics: fast, robust and efficient 2D pattern recognition, technical report DFPD 02/EI/32, Dept. Physics "G. Galilei", University of Padova, 2002 (submitted).

[9] G. B. Folland, *Real Analysis. Modern techniques and their applications. 2nd ed.*, Pure and Applied Math. A Wiley-Interscience Series of Texts, Monog., and Tract., New York, 1999.

[10] M. Frigo, S. Johnson, The Fastest Fourier Transform in the West, MIT-LCS-TR-728, September 1997.

[11] M. Frigo, S. Johnson, FFTW user's manual - 2.1.3, November 1999, http://www.fftw.org/.

[12] K. Gröchenig, *Foundation of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser Verlag, 2001.

[13] D. W. Kammler, *A First Course in Fourier Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2000.

[14] A. Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1977.