Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti

Appello del 1 luglio 2014

Dire se è vero o falso (giustificare le risposte. Bisogna necessariamente rispondere ai quesiti):

a) Se $U \subseteq W$ allora $U \cap W = U$.

b) Se A è una matrice quadrata con $\det A = 0$ allora 0 è autovalore di A.

c) Due rette che hanno distanza non nulla tra loro sono necessariamente sghembe.

* * *

Esercizio 1. Siano $w_1 = 2 + i$ e $w_2 = 6 + 5i$.

a) Trovare un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - w_1| = 2$.

b) Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - w_1| = 2$ e $|z - w_2| = 2\sqrt{5}$.

c) Determinare, se esiste, un numero intero n tale che $w_1^n = w_2$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$ si considerino i sottospazi

$$U =< (1, 2, 1, 3), (3, 1, 4, 6) >, \qquad W_a =< (1, 2, 3, 0), (0, 1 - a, -a, a) > .$$

a) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la somma $U + W_a$ è diretta.

b) Per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$, scrivere equazioni per il sottospazio $U + W_a$.

c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare, se esiste un sottospazio non nullo T tale che $T \oplus (U + W_a) = \mathbb{R}^4$.

d) Scelto un valore $\bar{a} \in \mathbb{R}$ tale che la somma $U + W_{\bar{a}}$ non sia diretta, determinare $(U + W_{\bar{a}}) \cap W_a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ le funzioni lineari definite da

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + y - z); \qquad g(u, v) = (u + v, 2u - v, u + v)$$

a) Scrivere le matrici rispetto alle basi canoniche di f, g ed $h = g \circ f$.

b) Determinare una base di $\ker h$ ed una di $\operatorname{Im} h$. La funzione h è iniettiva? È suriettiva?

c) Per ogni $\mathbf{w} \in (1, 1, 1)+ < (0, 1, 1) >$, calcolare $g^{-1}(\mathbf{w})$.

d) Determinare, se esiste, una funzione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi \circ f$ sia la funzione identità.

e) Determinare, se esiste, una funzione lineare $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ \psi$ sia la funzione identità.

Voltare pagina

Esercizio 4. Sia $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determinare autovalori ed autovettori di A. La matrice è diagonalizzabile? In tal caso, determinare una matrice invertibile H tale che $H^{-1}AH$ sia diagonale.

b) Determinare, se possibile, una base ortonormale di autovettori di A.

c) Scrivere, se possibile, il vettore $\mathbf{v} = (2, -2, -1)$ come somma di due autovettori di A. Tale scrittura è unica?

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ z = -1 \end{cases}; \qquad r_2 : \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \qquad r_3 : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

a) Scelte a piacere due tra queste rette, verificare che sono sghembe e calcolarne la distanza.

b) Determinare, se esiste, una retta s incidente r_1 ed r_2 e parallela ad r_3.

c) Determinare, se esiste, una retta ℓ che sia incidente tutte e tre le rette date ed avente distanza $\sqrt{6}$ dal piano $\pi : x - 2y + z = 6$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti

Appello del 1 luglio 2014

Dire se è vero o falso (giustificare le risposte. Bisogna necessariamente rispondere ai quesiti):

a) Se $U \cap W = W$ allora $W \subseteq U$.

b) Se A è una matrice quadrata con $\det A = 0$ allora tutti gli autovalori di A sono uguali a 0.

c) Due rette che hanno distanza nulla tra loro sono necessariamente incidenti.

* * *

Esercizio 1. Siano $w_1 = -2 - i$ e $w_2 = -6 - 5i$.

a) Trovare un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - w_1| = 2$.

b) Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - w_1| = 2$ e $|z - w_2| = 2\sqrt{5}$.

c) Determinare, se esiste, un numero intero n tale che $w_1^n = w_2$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$ si considerino i sottospazi

$$U =< (2,1,1,3),(1,3,4,6) >, \qquad W_a =< (2,1,3,0),(1-a,0,-a,a) > .$$

a) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la somma $U + W_a$ è diretta.

b) Per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$, scrivere equazioni per il sottospazio $U + W_a$.

c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare, se esiste un sottospazio non nullo T tale che $T \oplus (U + W_a) = \mathbb{R}^4$.

d) Scelto un valore $\bar{a} \in \mathbb{R}$ tale che la somma $U + W_{\bar{a}}$ non sia diretta, determinare $(U + W_{\bar{a}}) \cap W_a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ le funzioni lineari definite da

$$f(x,y,z) = (2x + y - z, x + y - z); \qquad g(u,v) = (u + v, 2u - v, u + v)$$

a) Scrivere le matrici rispetto alle basi canoniche di f, g ed $h = g \circ f$.

b) Determinare una base di $\ker h$ ed una di $\operatorname{Im} h$. La funzione h è iniettiva? È suriettiva?

c) Per ogni $\mathbf{w} \in (1,0,0) + < (0,1,1) >$, calcolare $g^{-1}(\mathbf{w})$.

d) Determinare, se esiste, una funzione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi \circ f$ sia la funzione identità.

e) Determinare, se esiste, una funzione lineare $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ \psi$ sia la funzione identità.

Voltare pagina

Esercizio 4. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Determinare autovalori ed autovettori di A. La matrice è diagonalizzabile?

b) Determinare, se possibile, una base ortonormale di autovettori di A.

c) Scrivere, se possibile, il vettore $\mathbf{v} = (1, 3, -1)$ come somma di due autovettori di A. Tale scrittura è unica?

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y = -1 \\ z = -1 \end{cases} ; \qquad r_2 : \begin{cases} 2y + z - 3x = 0 \\ z = 0 \end{cases} ; \qquad r_3 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x = 1 \end{cases} .$$

a) Scelte a piacere due tra queste rette, verificare che sono sghembe e calcolarne la distanza.

b) Determinare, se esiste, una retta s incidente r_1 ed r_2 e parallela ad r_3.

c) Determinare, se esiste, una retta ℓ che sia incidente tutte e tre le rette date ed avente distanza $\sqrt{6}$ dal piano $\pi : x - 2y + z = 6$.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti

Appello del 1 luglio 2014

Dire se è vero o falso (giustificare le risposte. Bisogna necessariamente rispondere ai quesiti):

a) Se $U \subseteq W$ allora $U + W = U$.

b) Se A è una matrice quadrata con $\det A \neq 0$ allora 0 non è autovalore di A.

c) Due rette che hanno distanza nulla tra loro sono necessariamente uguali.

* * *

Esercizio 1. Siano $w_1 = -2 + i$ e $w_2 = -6 + 5i$.

a) Trovare un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - w_1| = 2$.

b) Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - w_1| = 2$ e $|z - w_2| = 2\sqrt{5}$.

c) Determinare, se esiste, un numero intero n tale che $w_1^n = w_2$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$ si considerino i sottospazi

$$U =< (1, 2, 1, 3), (4, 1, 3, 6) >, \qquad W_a =< (3, 2, 1, 0), (a, a - 1, 0, -a) > .$$

a) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la somma $U + W_a$ è diretta.

b) Per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$, scrivere equazioni per il sottospazio $U + W_a$.

c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare, se esiste un sottospazio non nullo T tale che $T \oplus (U + W_a) = \mathbb{R}^4$.

d) Scelto un valore $\bar{a} \in \mathbb{R}$ tale che la somma $U + W_{\bar{a}}$ non sia diretta, determinare $(U + W_{\bar{a}}) \cap W_a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ le funzioni lineari definite da

$$f(x, y, z) = (x - y - z, x - y - 2z); \qquad g(u, v) = (u - v, 2u + v, u - v)$$

a) Scrivere le matrici rispetto alle basi canoniche di f, g ed $h = g \circ f$.

b) Determinare una base di $\ker h$ ed una di $\operatorname{Im} h$. La funzione h è iniettiva? È suriettiva?

c) Per ogni $\mathbf{w} \in (1, -1, -1)+ < (0, 1, 1) >$, calcolare $g^{-1}(\mathbf{w})$.

d) Determinare, se esiste, una funzione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi \circ f$ sia la funzione identità.

e) Determinare, se esiste, una funzione lineare $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ \psi$ sia la funzione identità.

Voltare pagina

Esercizio 4. Sia $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Determinare autovalori ed autovettori di A. La matrice è diagonalizzabile?

b) Determinare, se possibile, una base ortonormale di autovettori di A.

c) Scrivere, se possibile, il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ come somma di due autovettori di A. Tale scrittura è unica?

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x = 1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} 2x - y = -1 \\ z = -1 \end{cases}.$$

a) Scelte a piacere due tra queste rette, verificare che sono sghembe e calcolarne la distanza.

b) Determinare, se esiste, una retta s incidente r_1 ed r_2 e parallela ad r_3.

c) Determinare, se esiste, una retta ℓ che sia incidente tutte e tre le rette date ed avente distanza $\sqrt{6}$ dal piano $\pi : x - 2y + z = 6$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Chiarellotto, Garuti

Appello del 1 luglio 2014

Dire se è vero o falso (giustificare le risposte. Bisogna necessariamente rispondere ai quesiti):

a) Se $U \subseteq W$ allora $U + W = W$.

b) Se A è una matrice quadrata con $\det A = 1$ allora 1 è autovalore di A.

c) Due rette sghembe hanno necessariamente distanza non nulla tra loro.

* * *

Esercizio 1. Siano $w_1 = 2 - i$ e $w_2 = 6 - 5i$.

a) Trovare un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - w_1| = 2$.

b) Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - w_1| = 2$ e $|z - w_2| = 2\sqrt{5}$.

c) Determinare, se esiste, un numero intero n tale che $w_1^n = w_2$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$ si considerino i sottospazi

$$U =< (1, 1, 2, 3), (3, 4, 1, 6) >, \qquad W_a =< (1, 3, 2, 0), (0, a, a - 1, -a) > .$$

a) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la somma $U + W_a$ è diretta.

b) Per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$, scrivere equazioni per il sottospazio $U + W_a$.

c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare, se esiste un sottospazio non nullo T tale che $T \oplus (U + W_a) = \mathbb{R}^4$.

d) Scelto un valore $\bar{a} \in \mathbb{R}$ tale che la somma $U + W_{\bar{a}}$ non sia diretta, determinare $(U + W_{\bar{a}}) \cap W_a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ le funzioni lineari definite da

$$f(x, y, z) = (x - y + z, 2x - y + z); \qquad g(u, v) = (u + 2v, 2u - 2v, u + 2v)$$

a) Scrivere le matrici rispetto alle basi canoniche di f, g ed $h = g \circ f$.

b) Determinare una base di $\ker h$ ed una di $\operatorname{Im} h$. La funzione h è iniettiva? È suriettiva?

c) Per ogni $\mathbf{w} \in (1, 2, 2)+ < (0, 1, 1) >$, calcolare $g^{-1}(\mathbf{w})$.

d) Determinare, se esiste, una funzione lineare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi \circ f$ sia la funzione identità.

e) Determinare, se esiste, una funzione lineare $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ \psi$ sia la funzione identità.

Voltare pagina

Esercizio 4. Sia $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determinare autovalori ed autovettori di A. La matrice è diagonalizzabile?

b) Determinare, se possibile, una base ortonormale di autovettori di A.

c) Scrivere, se possibile, il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, -3)$ come somma di due autovettori di A. Tale scrittura è unica?

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \qquad r_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x = 1 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ z = -1 \end{cases}.$$

a) Scelte a piacere due tra queste rette, verificare che sono sghembe e calcolarne la distanza.

b) Determinare, se esiste, una retta s incidente r_1 ed r_2 e parallela ad r_3.

c) Determinare, se esiste, una retta ℓ che sia incidente tutte e tre le rette date ed avente distanza $\sqrt{6}$ dal piano $\pi : x - 2y + z = 6$.