

Complementi sugli integrali impropri.

Il teorema del confronto asintotico

Siano f e $g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0, \forall x \geq a$.

i) se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0, L \in \mathbb{R}$,

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente se e solo se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ è convergente.

ii) Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,

se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ è convergente allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente.

iii) Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$,

se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ è divergente allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è divergente.

Una condizione necessaria di integrabilità:

Sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente.

Se esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ allora deve essere $L = 0$.

Confronto asintotico con $\frac{1}{x^p}$ con $x \rightarrow +\infty$

Sia $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0, \forall x \geq 1$ e $\int_1^x f(t)dt$ esiste $\forall x \geq 1$.

i) Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = L \geq 0, (L \in \mathbb{R})$, per qualche $p > 1$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente.

ii) Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = L > 0$ (oppure $+\infty$), per qualche $p \leq 1$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è divergente.

Scala di funzioni integrabile in $[2, +\infty)$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx$ è integrabile

1) per $\alpha = 1$ e $\beta > 1$,

oppure

2) per $\alpha > 1$ e $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Confronto asintotico con $\frac{1}{x^p}$ con $x \rightarrow 0^+$

Sia $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ e tale che $\int_x^1 f(t)dt$ esiste $\forall x \in (0, 1]$.

i) Se $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p f(x) = L \geq 0, (L \in \mathbb{R})$, per qualche $p < 1$ allora $\int_0^1 f(x)dx$ è convergente.

ii) Se $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p f(x) = L > 0$ (oppure $+\infty$), per qualche $p \geq 1$ allora $\int_0^1 f(x)dx$ è divergente.

1) Si consideri la funzione

$$g(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2} \left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right).$$

a) Calcolare l'ordine d'infinitesimo (rispetto a $1/x$) di $g(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$.

b) Dire se $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ converge.

c) In caso affermativo, calcolare $\int_1^{+\infty} g(x) dx$.

2) Dato l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1 + 1/x^2} \arctan \frac{1}{x} dx,$$

a) si determinino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che risulti convergente;

b) lo si calcoli per $\alpha = -2$.