

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria

Prof. F. Albertini e M. Motta

Prova di autovalutazione di Matematica A, parte A

Vicenza, 15 novembre 2007.

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(e^{2x} - 5e^x + 6) - |x|$$

- (a) Determinare il dominio di f , eventuali simmetrie e periodicità (non è richiesto lo studio del segno).
- (b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f .
- (c) Studiare la continuità e la derivabilità di f ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f .
- (d) Calcolare i limiti di f' , se significativi.
- (e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio. (Non è richiesto lo studio di f'')

Esercizio 2 Si consideri il seguente polinomio

$$P(z) = z^3 + (4 + 3i)z^2 + (12i + 3)z + 9i$$

- (a) Verificare che $z = -1$ è radice di $P(z)$
- (b) Determinarne le altre radici.
- (c) Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme $A \subseteq \mathbb{C}$ di tutti i numeri complessi che soddisfano la seguente disequazione:

$$\left| \frac{P(z)}{(z+1)(z+3)} \right| \leq |z + \operatorname{Im}(z) + 3i|.$$

Esercizio 3

(a) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{8}{x^6} - \frac{\log(1+x)}{x^7}}{\frac{\sin^2(x)}{x^8} - 2 \log^6\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

(b) Calcolare per ogni valore reale del parametro α il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2e^{3x} - 6 \tan(x) + \alpha x^2 - 2}{6 \arcsin(x + x^3) - 6x - 6x^3}.$$

(c) Determinare il valore del parametro reale α per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2e^{3x} - 6 \tan(x) + \alpha x^2 - 2}{6 \arcsin(x + x^3) - 6x - 6x^3} & \text{per } x < 0 \\ \frac{\frac{8}{x^6} - \frac{\log(1+x)}{x^7}}{\frac{\sin^2(x)}{x^8} - 2 \log^6\left(1 + \frac{1}{x}\right)} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

risulta prolungabile per continuità in $x = 0$.