

**Università degli Studi di Padova**  
**sede di Vicenza**  
**Esame di Matematica A del 11 gennaio 2005**

**GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE**

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \frac{1}{1 + \cos x} - \frac{1}{1 + \cos x}$$

- (a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie, e periodicità di  $f$ .
- (b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di  $f$ .
- (c) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di  $f$  ristretta a  $(-\pi, \pi)$ .
- (d) Disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .

(2) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{3^{n+1}n \log(1+n) - 3^n n \sin\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

(a) Studiare il segno della successione

$$b_n = 3^{n+1}n \log(1+n) - 3^n n \sin\left(\frac{3}{n}\right)$$

per  $n$  tendente a  $+\infty$ .

- (b) Discutere la convergenza assoluta della serie data.
- (c) Discutere la convergenza semplice della serie data. (Suggerimento: usare il punto (a))

(3) Per ogni  $\alpha \neq -1$  si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'' - \alpha y = \cos(x).$$

- (a) Determinare le soluzioni per ogni  $\alpha \neq -1$ .
- (b) Dire se esistono soluzioni  $y(x)$ , tali che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$ . In caso affermativo, determinarle.
- (c) Fissato  $\alpha = 0$ , dire se esistono soluzioni limite. In caso affermativo, determinarle.
- (d) (*facoltativo*) Determinare le soluzioni per  $\alpha = -1$ .