Università degli Studi di Padova
sede di Vicenza
Esame di Matematica A, di Matematica 1 e di Analisi 1 del 5 settembre 2005

GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - \sin x \log \left| \frac{\sin x}{e} \right|$$

(a) Determinare il dominio, eventuali periodicità e simmetrie e studiare il segno di f . Calcolare i limiti agli estremi del dominio di f. (Sugg. Studiare f nel più piccolo intervallo possibile..)

(b) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Determinare eventuali attacchi di f'.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f (in tutto $\mathbf{R}$). Non è richiesto lo studio di f''.

Soluzione:(a) Il dominio di f è $D = \mathbf{R} \setminus \{\sin x \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{x \in \mathbf{R} : \ x = k\pi, \ k \in \mathbf{N}\}$. La funzione è 2π–periodica e $f(x) - 1$ è dispari, quindi basta studiarla nell'intervallo $D \cap [0, \pi] =]0, \pi[$. $\forall x \in]0, \pi[$ la funzione $\sin x > 0$, quindi $f(x) = 1 - \sin x \log \left[\frac{\sin x}{e}\right]$ e poichè $0 < \frac{\sin x}{e} \leq \frac{1}{e}$, si ha che $\log \left[\frac{\sin x}{e}\right] \leq \log \left[\frac{1}{e}\right] = -1$ per cui $\sin x \log \left[\frac{\sin x}{e}\right] > 0$ e $f(x) > 1 > 0 \ \ \forall x \in]0, \pi[$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = 1,$$

e f si estende per continuità a tutto $\mathbf{R}$.
(b) $\forall x \in]0, \pi[$ la funzione $\sin x > 0$, quindi $f(x) = 1 - \sin x \log \left[\frac{\sin x}{e}\right]$ e

$$f'(x) = -\cos x \left[\log \left[\frac{\sin x}{e}\right] + \sin x \frac{e}{\sin x} \frac{1}{e}\right] = -\cos x \left[\log \left[\frac{\sin x}{e}\right] + 1\right].$$

Per quanto già osservato, $\log \left[\frac{\sin x}{e}\right] \leq -1$, dunque

$$\log \left[\frac{\sin x}{e}\right] + 1 \leq 0 \qquad \forall x \in]0, \pi[$$

e $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\cos x \geq 0$, cioè $x \in]0, \pi/2]$. Perciò f è monotona crescente in $]0, \pi/2]$ e decrescente in $]\pi/2, \pi[$ e assume un massimo relativo in $x = \pi/2$. Per la periodicità e le simmetrie di f, per $k \in \mathbf{Z}$ i punti $\pi/2 + 2k\pi$ sono di massimo assoluto, mentre i punti $-\pi/2 + 2k\pi$ sono di minimo assoluto. Gli attacchi di f' in 0^+ e in π^- sono

$$\lim_{x \to 0^+} = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pi^-} f'(x) = -\infty,$$

quindi nei punti $k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ f non è derivabile e ha tangente verticale.

(2) Calcolare al variare del parametro $a > 0$ il seguente limite:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a + ex^3\left(1 - e^{1/x}\right)}{x\sin x - ex^3 \sin(1/x)}.$$

Soluzione: Poichè $1 - e^{1/x}$ è asintotica a $-1/x$, in breve, $1 - e^{1/x} \sim -1/x$, per $x \to +\infty$, il numeratore soddisfa

$$x^a + ex^3\left(1 - e^{1/x}\right) \sim x^a - ex^2 \sim \begin{cases} -ex^2 & se \quad a < 2 \\ (1-e)x^2 & se \quad a = 2 \\ x^a & se \quad a > 2 \end{cases}$$

mentre $x \sin x = o(x^2)$ e $-ex^3 \sin(1/x) \sim -ex^2$, per cui

$$x\sin x - ex^3 \sin(1/x) \sim -ex^2.$$

Il limite richiesto vale allora

$$L = \begin{cases} 1 & se \quad a < 2 \\ \frac{(1-e)}{-e} & se \quad a = 2 \\ -\infty & se \quad a > 2. \end{cases}$$

(3) Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \arccos\left|x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \, dx.$$

Soluzione: Il dominio della funzione integranda è

$$D = \left\{x \in \mathbf{R} : \ \left|x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \leq 1\right\} = \left\{x \in \mathbf{R} : \ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\},$$

e quindi $D \subset [0, \sqrt{2}]$. Inoltre, dalla definizione di modulo si ha

$$\int_0^{\sqrt{2}} \arccos\left|x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \, dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x\right) \, dx + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \arccos\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \, dx.$$

Operando le sostituzioni $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - x$ e $y = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$ rispettivamente nel primo e nel secondo integrale, si ottiene

$$I = 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \arccos y \, dy = 2\left(y \arccos y \Big|_0^{\sqrt{2}/2} + \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

dove la penultima uguaglianza si ha integrando per parti.