

Università degli Studi di Padova
sede di Vicenza
Esame di Matematica A/Analisi 1 del 19/9/2005

SCHEMA DI SOLUZIONE

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

- (a) Determinare il dominio, il segno, eventuali simmetrie, continuità, limiti agli estremi del dominio, e gli eventuali asintoti di f .
- (b) Determinare la derivabilità, gli eventuali punti angolosi, gli intervalli di monotonia, e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f .
- (c) Determinare gli intervalli di concavità e convessità e gli eventuali punti di flesso di f .

Soluzione: Dominio: deve essere:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| \leq 1 &\iff -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \iff -1 - x^2 \leq 1 - x^2 \leq 1 + x^2 \\ &\iff -1 \leq 1 \leq 1 + 2x^2 \end{aligned}$$

disuguaglianze chiaramente soddisfatte per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il dominio è quindi tutto \mathbb{R} .

Simmetrie: chiaramente f è pari.

Continuità: Essendo f composizione di funzioni continue è continua.

Derivabilità: La funzione $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ è ovunque derivabile; \arcsin è derivabile in $(-1, 1)$; quindi f è certamente derivabile, almeno per gli $x \in \mathbb{R}$ per cui $g(x) \neq \pm 1$; si ha $g(x) = 1 \iff x = 0$, mentre $g(x) = -1$ non è mai verificato. Perciò f è certamente derivabile in $\mathbb{R}/\{0\}$ e si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

Per vedere se f è derivabile in 0 calcoliamo i limiti destro e sinistro di f' in $x = 0$; essendo f continua in $x = 0$ il limite destro, se esiste sarà la derivata

destra, e quello sinistro la derivata sinistra; anzi essendo f' dispari, basta fare il limite destro, per $x \rightarrow 0+$. Si noti che:

$$\sqrt{1 - g^2(x)} = \sqrt{(1 - g(x))(1 + g(x))} \sim 2x \quad \text{per} \quad x \rightarrow 0+$$

e in definitiva

$$\lim_{x \rightarrow 0\pm} f'(x) = \mp 2$$

e quindi 0 è punto angoloso per f .

Monotonia: $f'(x) < 0$ per $x > 0$; f è strettamente decrescente su $[0, +\infty)$; f è strettamente crescente su $(-\infty, 0]$. Il punto $x = 0$ è di max assoluto, dove f vale $f(0) = \pi/2$.

Asintoti: essendo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -1$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\pi/2$$

e quindi $y = -\pi/2$ è asintoto orizzontale bilatero per f ; il valore $-\pi/2$ è l'estremo inferiore di f , ma non è raggiunto: f non ha minimo.

Convessità: per $x \neq 0$, si ha

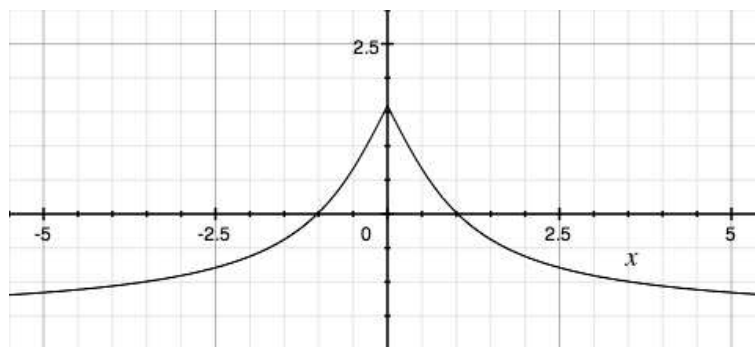
$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - g^2(x)}} \left(\frac{g(x)(g'(x)^2)}{1 - g^2(x)} + g''(x) \right)$$

calcoli diretti (anche se un pò lunghi) mostrano che

$$\frac{g(x)(g'(x)^2)}{1 - g^2(x)} + g''(x) = \frac{8x^2}{(1 + x^2)^3} > 0$$

pertanto f è strettamente convessa su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Abbozzo di grafico:



(2) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{4\alpha}} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \alpha x^2}}{\cos x} \right).$$

Soluzione: Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - \sqrt{1 - \alpha x^2}}{x^{4\alpha} \cos x}.$$

Usando gli sviluppi di Mac Laurin si ottiene che

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5), \\ \sqrt{1 - \alpha x^2} &= 1 - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\alpha^2}{8}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Se $\alpha \neq 1$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - \sqrt{1 - \alpha x^2}}{x^{4\alpha} \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\alpha-1}{2}x^2 + o(x^3)}{x^{4\alpha}} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha > 1, \\ -\infty, & \text{se } \frac{1}{2} < \alpha < 1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } \alpha = \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{se } \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

(3) Si consideri il seguente integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{6x^{2a}}{(x-1)^2(x^2+x^a+1)} dx.$$

- (a) Determinare i valori del parametro $a > 0$ per i quali tale integrale converge.
- (b) Calcolare l'integrale per $a = 1$.

Soluzione: (a) Per ogni $a > 0$ la funzione integranda

$$f_a(x) = \frac{6x^{2a}}{(x-1)^2(x^2+x^a+1)}$$

è continua in $[2, +\infty[$. In un intorno di $+\infty$ si ha

$$f_a(x) \sim \begin{cases} 6x^{a-2}, & \text{se } a > 2, \\ 3, & \text{se } a = 2, \\ \frac{1}{x^{2(2-a)}}, & \text{se } 0 < a < 2. \end{cases}$$

Quindi dal criterio del confronto asintotico segue che l'integrale converge per $0 < a < 3/2$.

(b) Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{6x^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx.$$

Si può scomporre

$$\frac{6x^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C(2x+1)}{(x^2+x+1)} + \frac{D}{(x^2+x+1)}.$$

Facendo denominatore comune ed eguagliando i coefficienti delle varie potenze di x , si ottiene $A = 2$, $B = 2$, $C = -1$, $D = 1$. Quindi

$$\int \frac{6x^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx = \log \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right) + c.$$

In conclusione, l'integrale cercato è

$$\int_2^{+\infty} \frac{6x^{2a}}{(x-1)^2(x^2+x^a+1)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log 7 + 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{5}{\sqrt{3}}.$$