Alcune soluzioni 1

• Determinare l'insieme di definizione di $f_4(x) = \log(\sqrt{-x^2+3x+4}+2-4x)$.

Soluzione La funzione assegnata è definita quando l'argomento del logaritmo è positivo:

$$\sqrt{-x^2+3x+4}+2-4x > 0, \text{ equivalentemente } \sqrt{-x^2+3x+4} > 4x-2.$$

Quest'ultima disequazione è del tipo $\sqrt{C(x)} > D(x)$, che è risolta per

$$\begin{cases} D(x) < 0 \\ C(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure per} \quad \begin{cases} D(x) \geq 0 \\ C(x) > [D(x)]^2 \end{cases}$$

Nel caso in esame i precedenti sistemi sono rispettivamente

$$\begin{cases} 4x-2 < 0 \\ -x^2+3x+4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 4x-2 \geq 0 \\ -x^2+3x+4 > (4x-2)^2 \end{cases}$$

Risolvendo le disequazioni, si ottiene

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -1 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 0 < x < \frac{19}{17} \end{cases}$$

L'insieme di definizione cercato è quindi

$$\{x \in \mathbb{R} : \ -1 \leq x < \frac{19}{17}\}.$$

• Determinare l'insieme di definizione di $f_7(x) = \sqrt{2x-1-\sqrt[3]{8x^3-7}}$.

Soluzione La funzione assegnata è definita quando il radicando è positivo o nullo:

$$2x-1-\sqrt[3]{8x^3-7} \geq 0.$$

Ora, essendo la funzione $y = x^3$ strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$,

$$\sqrt[3]{8x^3-7} \leq 2x-1 \Longleftrightarrow 8x^3-7 \leq (2x-1)^3,$$

ovvero

$$8x^3-7 \leq 8x^3-1+6x-12x^2 \Longleftrightarrow 2x^2-x-1 \leq 0.$$

L'insieme di definizione cercato è quindi

$$\{x \in \mathbb{R} : \ -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\}.$$

- Determinare l'insieme di definizione di $f_9(x) = \sqrt[4]{-2x - \sqrt{1 - x - 2x^2}}$.

Soluzione La funzione assegnata è definita quando il radicando è positivo o nullo:

$$-2x - \sqrt{1 - x - 2x^2} \geq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{1 - x - 2x^2} \leq -2x.$$

Quest'ultima disequazione è del tipo $\sqrt{C(x)} \leq D(x)$, che è risolta per

$$\begin{cases} D(x) \geq 0 \\ C(x) \geq 0 \\ C(x) \leq [D(x)]^2 \end{cases}$$

Nel caso in esame, il precedente sistema fornisce

$$\begin{cases} -2x \geq 0 \\ 1 - x - 2x^2 \geq 0 \\ 1 - x - 2x^2 \leq 4x^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{1}{2},\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$$

L'insieme di definizione cercato è quindi

$$\{x \in \mathbb{R} : \ -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}\}.$$