Alcune soluzioni 2

• Determinare l'insieme di definizione di $f_4(x) = (\sqrt{x+4} - |x| + 2)^{\frac{1}{\log|x|}}$.

Soluzione Si devono porre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - |x| + 2 > 0 \\ x \neq 0, \ x \neq \pm 1 \end{cases}$$

La disequazione $\sqrt{x+4} - |x| + 2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} > |x| - 2$ equivale ai due sistemi:

$$(A) \begin{cases} |x| - 2 < 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \qquad (B) \begin{cases} |x| - 2 \geq 0 \\ x + 4 > (|x| - 2)^2 \end{cases}$$

Il sistema (A) fornisce:

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \geq -4 \end{cases} \qquad \text{da cui } \underline{Sol_A = (-2, 2)}.$$

Mentre il sistema (B):

$$\begin{cases} x \leq -2, \ x \geq 2 \\ x + 4 > x^2 - 4|x| + 4 \end{cases}$$

equivale a sua volta ai due sistemi:

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ x + 4 > x^2 + 4x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -2 \\ x^2 + 3x < 0 \end{cases} \iff -3 < x \leq -2$$

e

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x + 4 > x^2 - 4x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x < 0 \end{cases} \iff 2 \leq x < 5,$$

da cui

$$\underline{Sol_B = (-3, -2] \cup [2, 5)}.$$

L'insieme di definizione cercato è quindi

$$\{x \in \mathbb{R} : \ -3 < x < 5, \ x \neq 0, \pm 1\}.$$

• Determinare l'insieme di definizione di $f_6(x) = \arccos \sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)(x - 3)} + \arctan \sqrt[4]{\frac{x-2}{5-x}}$.

Soluzione Si devono porre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \left|\sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)(x-3)}\right| \le 1 \\ \left(\frac{1}{2}-x\right)(x-3) \ge 0 \\ \frac{x-2}{5-x} \ge 0, \ x \ne 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\frac{1}{2}-x\right)(x-3) \le 1 \\ \frac{1}{2} \le x \le 3 \\ 2 \le x < 5 \end{cases}$$

Essendo $\left(\frac{1}{2}-x\right)(x-3) \le 1 \Leftrightarrow 2x^2-7x+5 \ge 0 \Leftrightarrow x \le 1, \ x \ge \frac{5}{2}$, l'insieme di definizione cercato risulta:

$$\{x \in \mathbb{R} : \ \frac{5}{2} \le x \le 3\}.$$

• Si dimostri per induzione che $\forall n \in \mathbb{N} : n! \ge 2^{n-1}$.

Soluzione La disuguaglianza è vera per $n = 1$: $1! = 1 \ge 2^{1-1} = 2^0 = 1$.
Facciamo ora l'ipotesi induttiva:

$$n! \ge 2^{n-1}. \tag{1}$$

Conseguentemente:

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n! \overset{\text{per (1)}}{\overset{\uparrow}{\ge}} (n+1)\cdot 2^{n-1} \overset{n+1\ge 2}{\overset{\uparrow}{\ge}} 2\cdot 2^{n-1} = 2^n,$$

che è, per $n+1$, esattamente la disuguaglianza che si vuole provare. Si può allora concludere, per il Principio di induzione, che l'enunciato è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

• Si dimostri per induzione che $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Soluzione L'uguaglianza è vera per $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$.
Facciamo ora l'ipotesi induttiva:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{2}$$

Conseguentemente:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{per (2)}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3,$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

che è, per $n+1$, esattamente l'uguaglianza che si vuole provare. Si può allora concludere, per il Principio di induzione, che l'enunciato è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

• Dato l'insieme:

$$E = \{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} : n \in \mathbb{N}\},$$

verificare con la definizione che $\min E = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e che $\sup E = 1$. Esiste $\max E$? Se sì, quanto vale?

Soluzione Sia $a_n := \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$.

Osserviamo che $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; quindi se proviamo che $a_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ per ogni $n \geq 1$, possiamo concludere che $\min E = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Si ha che:

$$a_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n+1} \geq \sqrt{2}(\sqrt{n}+1) \Leftrightarrow 4(n+1) \geq 2(n+2\sqrt{n}+1)$$
$$\Leftrightarrow n+1 \geq 2\sqrt{n} \Leftrightarrow (n+1)^2 \geq 4n \Leftrightarrow n^2-2n+1 \geq 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 \geq 0,$$

che è sicuramente verificata per ogni $n \geq 1$. Abbiamo quindi dimostrato che $\min E = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Passiamo ora all'estremo superiore. È immediato vedere che 1 è un maggiorante dell'insieme E, infatti:

$$a_n < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{n+1} < \sqrt{n}+1 \Leftrightarrow n+1 < n+1+2\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n} > 0,$$

che è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, dobbiamo poi provare che esiste un $a_n \in E$ tale che

$$a_n > 1-\varepsilon \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} > 1-\varepsilon. \tag{3}$$

Tale disuguaglianza è sicuramente vera per $1-\varepsilon \leq 0$, ovvero per $\varepsilon \geq 1$. Nel caso in cui $\varepsilon < 1$, ponendo $\delta := 1-\varepsilon > 0$, la disuguaglianza (3) diventa:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} > \delta \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > \delta(\sqrt{n}+1)$$

$$\Leftrightarrow n+1 > \delta^2(n+1+2\sqrt{n}) \Leftrightarrow (1-\delta^2)(n+1) > 2\delta^2\sqrt{n}$$

da cui, quadrando nuovamente:

$$(1-\delta^2)^2(n+1)^2 > 4\delta^4 n \Leftrightarrow (1-\delta^2)^2(n^2+1+2n) > 4\delta^4 n$$
$$\Leftrightarrow (1-\delta^2)^2 n^2 + [2(1-\delta^2)^2 - 4\delta^4]n + (1-\delta^2)^2 > 0.$$

Quest'ultima è una disequazione di secondo grado in n con coefficiente di grado massimo $(1-\delta^2)^2 > 0$: dunque[1] esistono sicuramente infiniti n che la soddisfano.

Infine: chiaramente non esiste $\max E$. Se esistesse dovrebbe coincidere con l'estremo superiore, dunque $\max E = 1$ e, d'altra parte, dovrebbe essere un a_n. Ma si è mostrato precedentemente che $a_n < 1$ per ogni $n \geq 1$.

• Dato l'insieme:

$$E = \{\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+4}} : n = 0, 1, 2 \ldots\},$$

verificare con la definizione che $\min E = \frac{1}{2}$ e che $\max E = \frac{17}{\sqrt{68}}$.

Soluzione Sia $a_n := \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+4}}$.

Osserviamo che $a_0 = \frac{1}{2}$; quindi se proviamo che $a_n \geq \frac{1}{2}$ per ogni $n = 0, 1, 2 \ldots$, possiamo concludere che $\min E = \frac{1}{2}$. Si ha che:

$$a_n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(2n+1) \geq \sqrt{n^2+4}$$
$$\Leftrightarrow 4(4n^2+1+4n) \geq n^2+4 \Leftrightarrow 16n^2+4+16n \geq n^2+4$$
$$\Leftrightarrow 15n^2+16n \geq 0,$$

che è sicuramente verificata per ogni $n = 0, 1, 2 \ldots$. Abbiamo quindi dimostrato che $\min E = \frac{1}{2}$.

Passiamo ora al massimo. Osserviamo che $a_8 = \frac{17}{\sqrt{68}}$; quindi se proviamo che $a_n \leq \frac{17}{\sqrt{68}}$ per ogni $n = 0, 1, 2 \ldots$, possiamo concludere che $\max E = \frac{17}{\sqrt{68}}$. Si ha che:

$$a_n \leq \frac{17}{\sqrt{68}} \Leftrightarrow \sqrt{68}(2n+1) \leq 17\sqrt{n^2+4}$$
$$\Leftrightarrow 68(4n^2+1+4n) \leq 289(n^2+4) \Leftrightarrow 272n^2+68+272n \leq 289n^2+1156$$
$$\Leftrightarrow 17n^2 - 272n + 1088 \geq 0.$$

L'equazione $17x^2 - 272x + 1088 = 0$ ha discriminante $\Delta_{17x^2-272x+1088} = 0$ e quindi vale che $17x^2 - 272x + 1088 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Conseguentemente, $17n^2 - 272n + 1088 \geq 0$ è sicuramente verificata per ogni $n = 0, 1, 2 \ldots$. Abbiamo quindi dimostrato che $\max E = \frac{17}{\sqrt{68}}$.

[1] Ragionamento da meditare e capire bene! Aiutarsi eventualmente con i due possibili grafici –cioè con o senza intersezioni con l'asse x– di parabole con concavità rivolta verso l'alto