Alcune soluzioni 3

• Dato l'insieme
$$E = \{\frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\},$$
dimostrare con la definizione che $\sup E = 1$ e $\min E = 0$. Esiste $\max E$? Se sì, quanto vale?

Soluzione Sia $a_n := \frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$.

Si ha
$$\frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} \geq 0 \Leftrightarrow n-\sqrt{n} \geq 0,$$
che risulta vera per ogni $n \geq 1$. Essendo poi $0 = a_1 \in E$, risulta verificato che $\min E = 0$.

Passiamo ora all'estremo superiore. Poichè
$$\frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} < 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$
1 è un maggiorante dell'insieme E. Osservo inoltre che
$$a_n = \frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = \frac{n+\sqrt{n}-2\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = 1 - \frac{2\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}.$$
Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, dobbiamo infine provare che esiste un $a_n \in E$ tale che
$$a_n > 1-\varepsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{2\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} > 1-\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n} < \varepsilon n + \varepsilon\sqrt{n} \Leftrightarrow (2-\varepsilon)\sqrt{n} < \varepsilon n.$$
Tale disuguaglianza è sicuramente vera per $\varepsilon \geq 2$. Mentre per $\varepsilon < 2$ si ottiene:
$$(2-\varepsilon)\sqrt{n} < \varepsilon n \Leftrightarrow (2-\varepsilon)^2 n < \varepsilon^2 n^2 \Leftrightarrow n > \frac{(2-\varepsilon)^2}{\varepsilon^2}.$$
Ne segue che $1 = \sup E \notin E$, e perciò non esiste $\max E$.

• Dato l'insieme
$$E = \{\frac{n-3}{n^2} : n \in \mathbb{N}\} \cup (-1,1),$$
verificare che $\min E = -2$ e che $\sup E = 1$. Esiste $\max E$? Se sì, quanto vale?

Soluzione $E = F \cup (-1,1)$ dove
$$F = \{\frac{n-3}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Sia $a_n := \frac{n-3}{n^2}$.

Si ha

$$\frac{n-3}{n^2} \geq -2 \Leftrightarrow n-3 \geq -2n^2 \Leftrightarrow 2n^2+n-3 \geq 0,$$

che risulta vera (fare il conto!) per ogni $n \geq 1$. Inoltre, ovviamente, $-2 \leq x$ per ogni $x \in (-1,1)$. Essendo poi $-2 = a_1 \in F \subset E$, risulta verificato che $\min E = -2$.

Passiamo ora all'estremo superiore. 1 è un maggiorante di F, infatti

$$\frac{n-3}{n^2} < 1 \Leftrightarrow n-3 < n^2 \Leftrightarrow n^2-n+3 > 0,$$

che è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$. Essendo (pensarci!):

$$\begin{cases} \frac{n-3}{n^2} < 1 & \forall n \in \mathbb{N} \\ (-1,1) \subset E \end{cases}$$

si conclude subito che $1 = \sup E \notin E$, e perciò non esiste $\max E$.

• Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} (n-\sqrt{n^2+2})\log(2^n+n^4).$$

Soluzione Sia

$$a_n := (n-\sqrt{n^2+2})\log(2^n+n^4).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= (n-\sqrt{n^2+2})\frac{(n+\sqrt{n^2+2})}{(n+\sqrt{n^2+2})}\log\left[2^n\left(1+\frac{n^4}{2^n}\right)\right] \\ &= -\frac{2}{n+n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}\left[\log 2^n + \log\left(1+\frac{n^4}{2^n}\right)\right] \\ &= -\frac{2}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)}\left[n\log 2 + \log\left(1+\frac{n^4}{2^n}\right)\right] \\ &= -\frac{2n}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)}\left[\log 2 + \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n^4}{2^n}\right)\right] \\ &= -\frac{2}{\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)}\left[\log 2 + \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n^4}{2^n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Conseguentemente:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{2}{\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)}\left[\log 2 + \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n^4}{2^n}\right)\right] = -\log 2.$$

- Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^n+n^3)+5^{-n}}{\sqrt[3]{n^2}-n\cos(1/n)}.$$

Soluzione Sia

$$a_n := \frac{\log(n^n+n^3)+5^{-n}}{\sqrt[3]{n^2}-n\cos(1/n)}.$$

Si ha:

$$a_n = \frac{\log\left[n^n\left(1+\frac{n^3}{n^n}\right)\right]+\frac{1}{5^n}}{n^{2/3}-n\cos(1/n)} = \frac{n\log n+\log\left(1+\frac{n^3}{n^n}\right)+\frac{1}{5^n}}{n\left[\frac{1}{n^{1/3}}-\cos(1/n)\right]}$$

$$= \frac{n\log n\left[1+\frac{1}{n\log n}\log\left(1+\frac{n^3}{n^n}\right)+\frac{1}{n\log n}\frac{1}{5^n}\right]}{n\left[\frac{1}{n^{1/3}}-\cos(1/n)\right]}$$

$$= \log n \frac{1+\frac{1}{n\log n}\log\left(1+\frac{n^3}{n^n}\right)+\frac{1}{n\log n}\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{n^{1/3}}-\cos(1/n)}.$$

Conseguentemente:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \log n \frac{1+\frac{1}{n\log n}\log\left(1+\frac{n^3}{n^n}\right)+\frac{1}{n\log n}\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{n^{1/3}}-\cos(1/n)} = -\infty.$$