Alcune soluzioni 4

• Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log[(3^n)^3+\sin(1/n)]-\sqrt[4]{n^3}}{2n+\sqrt{n}\cos(1/n)}.$$

Soluzione Sia

$$a_n := \frac{\log[(3^n)^3+\sin(1/n)]-\sqrt[4]{n^3}}{2n+\sqrt{n}\cos(1/n)}$$

Numeratore:

$$\log[(3^n)^3+\sin(1/n)]-\sqrt[4]{n^3} = \log\left\{3^{3n}\left[1+\frac{\sin(1/n)}{3^{3n}}\right]\right\}-n^{3/4} =$$

$$3n\log 3+\log\left[1+\frac{\sin(1/n)}{3^{3n}}\right]-n^{3/4} = 3n\left\{\log 3+\frac{1}{3n}\log\left[1+\frac{\sin(1/n)}{3^{3n}}\right]-\frac{1}{n^{1/4}}\right\}$$

Denominatore:

$$2n+\sqrt{n}\cos(1/n) = 2n\left[1+\frac{\cos(1/n)}{2\sqrt{n}}\right]$$

Conseguentemente:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n\left\{\log 3+\frac{1}{3n}\log\left[1+\frac{\sin(1/n)}{3^{3n}}\right]-\frac{1}{n^{1/4}}\right\}}{2n\left[1+\frac{\cos(1/n)}{2\sqrt{n}}\right]} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\,\frac{\log 3+\frac{1}{3n}\log\left[1+\frac{\sin(1/n)}{3^{3n}}\right]-\frac{1}{n^{1/4}}}{1+\frac{\cos(1/n)}{2\sqrt{n}}} = \frac{3}{2}\log 3 = \log\sqrt{27}$$

N.B. Si valuti dove è stato usato, nell'ultimo limite, il Teorema del limite del prodotto di una successione infinitesima per una successione limitata.

• Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(2^n+5^n)-\sqrt{n^2+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt[4]{n})(\log n)^2}.$$

Soluzione Sia

$$a_n := \frac{\log(2^n+5^n)-\sqrt{n^2+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt[4]{n})(\log n)^2}$$

Numeratore:

$$\log(2^n+5^n)-\sqrt{n^2+1} = \log\left\{5^n\left[1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]\right\}-n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} =$$

$$n\log 5+\log\left[1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]-n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=$$

$$n\left\{\log 5+\frac{1}{n}\log\left[1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right\}$$

Denominatore:

$$(\sqrt{n}+\sqrt[4]{n})(\log n)^2=(\log n)^2\sqrt{n}\left[1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right]$$

Conseguentemente:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{n\left\{\log 5+\frac{1}{n}\log\left[1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right\}}{(\log n)^2\sqrt{n}\left[1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right]}=$$

$$\frac{\sqrt{n}}{(\log n)^2}\frac{\log 5+\frac{1}{n}\log\left[1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}=+\infty$$

N.B. Si osservi che il segno del limite dipende dal fatto che $\log 5-1>0$.

- La funzione $f(x)=x\cdot\text{cotan}^2x$ è prolungabile per continuità in $x=0$?

Soluzione La funzione $f(x)=x\cdot\text{cotan}^2x$ non è prolungabile per continuità in $x=0$. Infatti:

$$\lim_{x\to0^+}x\cdot\text{cotan}^2x=\lim_{x\to0^+}x\cdot\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\cos^2x\cdot\frac{1}{\sin x}=+\infty$$

e

$$\lim_{x\to0^-}x\cdot\text{cotan}^2x=\lim_{x\to0^-}x\cdot\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\sin x}\cdot\cos^2x\cdot\frac{1}{\sin x}=-\infty$$

- Per quale valore di $a\in\mathbb{R}$ la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-3x^2}}{x} & x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\setminus\{0\}\\ a & x=0\end{cases}$$

è continua in $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$?

Soluzione La funzione $f(x)$ è continua per ogni $a\in\mathbb{R}$ in $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\setminus\{0\}$, perchè quoziente delle funzioni continue $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-3x^2}$ ed x, con denominatore diverso da 0. Esamino il caso $x=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-3x^2}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-(1-3x^2)}{x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-3x^2})} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-3x^2}} = 0.$$

Essendo $f(0)=a$, la funzione $f(x)$ risulta continua anche in $x=0$ ovvero

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0),$$

se e solo se $a=0$.
• La funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\log x-\log(\sin(2x)) & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 2 & x=0,\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

è continua in $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$? La funzione $g(x)=\log x-\log(\sin(2x))$ è prolungabile per continuità in $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$? Dove è definita $g(x)$?

Soluzione La funzione $f(x)$ è continua in $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ perchè differenza delle funzioni continue $\log x$ e $\log(\sin(2x))$ (quest'ultima composta di funzioni continue). Controllo separatamente la continuità in $x=0$ e $x=\frac{\pi}{2}$.

Continuità in $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\log x-\log(\sin(2x)) = \lim_{x\to 0^+}\log\left(\frac{x}{\sin 2x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\log\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)\right] = \log(1/2),$$

essendo (limite fondamentale) $\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\sin 2x}=1$. Poichè

$$\lim_{x\to 0^+}\log x-\log(\sin(2x)) = \log(1/2) \neq f(0)=2,$$

la funzione $f(x)$ non risulta continua in $x=0$.

Continuità in $x=\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\log x-\log(\sin(2x)) = +\infty,$$

essendo $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\log x=\log\frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\log(\sin(2x))=-\infty$. Poichè

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\log x-\log(\sin(2x)) = +\infty\left[\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\right],$$

la funzione $f(x)$ non risulta continua in $x = \frac{\pi}{2}$.
La funzione $g(x) = \log x - \log(\sin(2x))$ è prolungabile per continuità in $x = 0$ ponendo $g(0) = \log(1/2) = -\log 2$, mentre non è prolungabile per continuità in $x = \frac{\pi}{2}$ essendo $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \log x - \log(\sin(2x)) = +\infty$.

La funzione $g(x)$ è definita per

$$\begin{cases} x > 0 \\ \sin(2x) > 0 \end{cases}$$

che fornisce $D_g = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left] k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.