**Alcune soluzioni 5**

• Calcolare, pensando a quali teoremi sui limiti si applicano:

$$\lim_{x\to 0} xe^{\sin(1/x)} \qquad \lim_{x\to+\infty} xe^{\sin x}$$

*Soluzione* Poichè $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1 \Rightarrow 1/e \leq e^{\sin(1/x)} \leq e$, si ha che

$$\lim_{x\to 0} xe^{\sin(1/x)} = 0$$

essendo il prodotto di una funzione infinitesima ($y = x$) per una funzione limitata ($y = e^{\sin(1/x)}$).
Per il secondo limite invece, basta osservare che

$$\sin x \geq -1 \Rightarrow e^{\sin x} \geq 1/e \Rightarrow xe^{\sin x} \geq x/e \quad (\text{essendo } x > 0)$$

Da cui

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\sin x} = +\infty$$

per il Teorema di confronto per i limiti infiniti.

• Sfruttando il Teorema sul limite delle funzioni composte, calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x) \qquad \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$$

*Soluzione* Basta ricordare il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x) \overset{\overset{y=1/x}{\uparrow}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1$$

e

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} \overset{\overset{y=x-\pi}{\uparrow}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y+\pi)}{y} = -\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = -1$$

• La funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ è prolungabile per continuità in $x = 1$?

*Soluzione* Si ha

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)}$$

Poichè

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)} = \frac{1}{4}$$

la funzione $f(x)$ risulta prolungabile per continuità in $x = 1$, con prolungamento

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{per } x \neq 1 \\ 1/4 & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

• Determinare $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\tan x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (\alpha)^{1/x} & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \beta \arccos x & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

sia continua in $]-1, 1[$.

*Soluzione* La funzione proposta è continua in $]-1, 1[\setminus\{0\}$ perchè composta di funzioni continue e risulterà continua nell'origine se

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1.$$

Calcoliamo il primo limite, al variare di $\alpha > 0$. Si ha innanzitutto

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1+\tan x}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

Osserviamo poi che $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ e ricordiamo che (basta pensare ai corrispondenti grafici!)

$$\lim_{t\to -\infty} a^t = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \quad \text{(notare che in tal caso } a^t \equiv 1) \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Conseguentemente

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

perciò $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ se e solo se $\alpha = 1$.

Calcoliamo il secondo limite, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Essendo $\arccos x$ continua in $[-1, 1]$, si ha subito che

$$\lim_{x\to 0^+} \beta \arccos x = \beta \arccos 0 = \beta \frac{\pi}{2},$$

cosicchè $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ se e solo se $\beta = \frac{2}{\pi}$.
Ne segue che $f$ è continua in $[-1,1]$ se e solo se $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{2}{\pi}$.
• Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{e^{1/\sin x}+1} \cdot \frac{\sin^2 x}{|x|^\alpha} & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \beta \arcsin\sqrt{1-x^4} + e^{-\beta/x} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

sia continua in $]-\pi, 1[$.
*Soluzione* La funzione proposta è continua in $]-\pi,1[\setminus\{0\}$ perchè composta di funzioni continue e risulterà continua nell'origine se

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1.$$

Calcoliamo il primo limite, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha innanzitutto

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{e^{1/\sin x}+1} = 1 \qquad \text{essendo (notare bene!)} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sin x} = -\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{|x|^\alpha} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{|x|^2} \cdot \frac{1}{|x|^{\alpha-2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot |x|^{2-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

perciò $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ se e solo se $\alpha = 2$.
Calcoliamo il secondo limite, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \beta \arcsin\sqrt{1-x^4} = \beta \arcsin 1 = \beta\frac{\pi}{2}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\beta/x} = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta > 0 \\ 1 & \text{se } \beta = 0 \\ +\infty & \text{se } \beta < 0 \end{cases}$$

Conseguentemente

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} \beta\frac{\pi}{2} & \text{se } \beta > 0 \\ \beta\frac{\pi}{2} + 1 = 1 & \text{se } \beta = 0 \\ +\infty & \text{se } \beta < 0 \end{cases}$$

perciò $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ se e solo se $\beta = 0$ oppure $\beta = \frac{2}{\pi}$.
Ne segue che $f$ è continua in $]-\pi, 1[$ se e solo se $\alpha = 2$ e $\beta = 0$ oppure $\beta = \frac{2}{\pi}$.
• Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1+\sin x}{e^{1/x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ (3)^{\frac{1-\cos x}{|x|^\beta}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sia continua in $\mathbb{R}$.
*Soluzione* La funzione proposta è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perchè composta di funzioni continue e risulterà continua nell'origine se

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0.$$

Calcoliamo il primo limite, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Innanzitutto si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\sin x}{e^{1/x}} = 0 \qquad \text{essendo} \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

cosicchè, sicuramente, $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ per $\alpha > 0$ perchè prodotto di infinitesima per limitata.
Dimostriamo ora che

$$\text{NON ESISTE il } \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \sin\left(\tfrac{1}{x^2}\right) \text{ per } \alpha \le 0.$$

Il caso $\alpha = 0$ è già stato discusso a lezione (in cui abbiamo provato che $\lim_{t\to\infty} \sin t$ non esiste).
Il caso $\alpha < 0$ si discute in modo analogo considerando ad esempio le due successioni

$$x_n := \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0^+ \qquad \text{e} \qquad y_n := \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + n\pi}} \to 0^+$$

per le quali si ha rispettivamente

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^\alpha \sin\left(\frac{1}{x_n^2}\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n^\alpha \sin\left(\frac{1}{y_n^2}\right) = +\infty.$$

Pertanto concludiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ \text{non esiste} & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

perciò $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ se e solo se $\alpha > 0$.
Calcoliamo il secondo limite, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -1.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{|x|^\beta} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{|x|^2} \cdot \frac{1}{|x|^{\beta-2}} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot |x|^{2-\beta} = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \beta = 2 \\ +\infty & \text{se } \beta > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to 0^-} (3)^{\frac{1-\cos x}{|x|^\beta}} = \begin{cases} 1 & \text{se } \beta < 2 \\ \sqrt{3} & \text{se } \beta = 2 \\ +\infty & \text{se } \beta > 2 \end{cases}$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta < 2 \\ \sqrt{3}-1 & \text{se } \beta = 2 \\ +\infty & \text{se } \beta > 2 \end{cases}$$

Quindi $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ se e solo se $\beta < 2$. Ne segue che $f$ è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha > 0$ e $\beta < 2$.