Alcune soluzioni 6

• Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva $y = x \log x$ in $x = 1$.
Soluzione L'equazione della retta tangente a $y = f(x)$ in $x = x_0$ è data da (dim. in lezione):

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Sia $f(x) = x \log x$, definita per $x > 0$. Si ha

$$f'(x) = \log x + 1, \qquad \forall x > 0$$

e $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$. Conseguentemente, la retta cercata ha equazione $y = x - 1$.

• Studiare i punti di non derivabilità e calcolare, dove esiste, la derivata della funzione $f_2(x) = \sqrt{|2x^2 + x - 1|}$.
Soluzione La funzione $f_2(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, essendo composizione di funzioni continue. Da $2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1, 1/2$, si ha poi che

$$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{2x^2 + x - 1} & \text{per } x \leq -1,\ x \geq 1/2 \\ \sqrt{1 - x - 2x^2} & \text{per } -1 < x < 1/2 \end{cases}$$

Conseguentemente

$$f_2'(x) = \begin{cases} \frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x-1}} & \text{per } x < -1,\ x > 1/2 \\ \\ -\frac{4x+1}{2\sqrt{1-x-2x^2}} & \text{per } -1 < x < 1/2 \end{cases}$$

Esamino separatamente $x = -1$ e $x = 1/2$.

$$\lim_{x \to -1^-} f_2'(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{4x + 1}{2\sqrt{2x^2 + x - 1}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -1^+} f_2'(x) = \lim_{x \to -1^+} -\frac{4x + 1}{2\sqrt{1 - x - 2x^2}} = +\infty.$$

In modo analogo:

$$\lim_{x \to 1/2^-} f_2'(x) = \lim_{x \to 1/2^-} -\frac{4x + 1}{2\sqrt{1 - x - 2x^2}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 1/2^+} f_2'(x) = \lim_{x \to 1/2^+} \frac{4x + 1}{2\sqrt{2x^2 + x - 1}} = +\infty.$$

La funzione $f_2(x)$ non risulta quindi derivabile in $x = -1$ e in $x = 1/2$, dove presenta due cuspidi.

• Studiare continuità, derivabilità, ricercare massimi e minimi ed eventuali asintoti ed abbozzare il grafico di $f_1(x) = \sqrt{x^2+1} - |x|$.
Soluzione La funzione $f_1(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, essendo composizione di funzioni continue. Dai limiti (attenzione al secondo, è da tenere a mente che $x \to -\infty$!):

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} + x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$$

si conclude che l'asse delle x è asintoto orizzontale destro e sinistro per il grafico di $f_1(x)$. Si poteva evitare di calcolare il secondo limite osservando che la funzione $f_1(x)$ è pari e quindi con grafico simmetrico all'asse delle y.

La funzione $f_1(x)$ risulta sicuramente derivabile per $x \neq 0$, e si ha:

$$f_1'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 & \text{per } x > 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Controllo la derivabilità in $x = 0$.

$$\lim_{x\to0^+} f_1'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = -1$$

$$\lim_{x\to0^-} f_1'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 = 1$$

La funzione $f_1(x)$ non risulta quindi derivabile in $x = 0$, dove presenta un punto angoloso.

Infine, lo studio del segno della derivata prima porge: $f_1'(x) < 0$ per $x > 0$ e $f_1'(x) > 0$ per $x < 0$. Conseguentemente, $x = 0$ risulta punto di massimo relativo e assoluto per $f_1(x)$, il cui grafico è quello in figura.

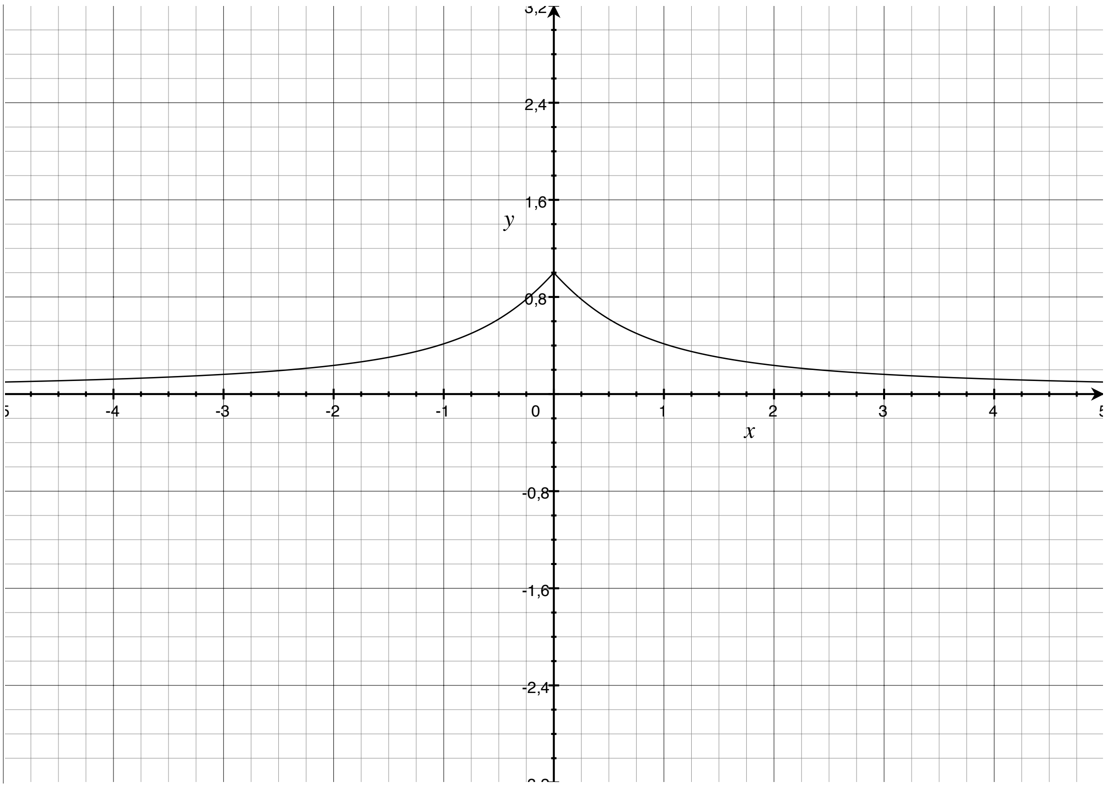

Figura 1: grafico di $f_1(x)$