Alcune soluzioni 7

- Calcolare, applicando opportunamente L'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log(\cos(1/x)).$$

Soluzione

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \log(\cos(1/x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\cos(1/x))}{1/x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{=}{\uparrow}} \lim_{t\to 0^+} \frac{\log\cos t}{t^2}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{\sin t}{\cos t}}{2t} = \lim_{t\to 0^+} -\frac{\sin t}{2t}\frac{1}{\cos t} = -\frac{1}{2}$$

- Calcolare, applicando opportunamente L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\text{cotan}x}.$$

Soluzione

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\text{cotan}x} \overset{1^\infty}{\underset{=}{\uparrow}} e^{\text{cotan}x\cdot\log\frac{\sin x}{x}}.$$

Esamino a parte il limite dell'esponente:

$$\lim_{x\to 0} \text{cotan}x \cdot \log\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \log\frac{\sin x}{x}$$

In particolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} \cdot \log\frac{\sin x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{=}{\uparrow}} \lim_{x\to 0} \frac{\log\frac{\sin x}{x}}{\sin x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}}{\cos x}$$

Poichè $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$, mi limito ad esaminare

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\cdot\sin x - \cos x}{2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2} = 0$$

Concludo allora che

$$\lim_{x\to 0} \text{cotan}x \cdot \log\frac{\sin x}{x} = 0$$

e conseguentemente

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\text{cotan}x} = e^0 = 1.$$

• Calcolare:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - \sin x + \tan^3 x}{x\sin^2(\sqrt{x}) - \sin^3 x \log x}.$$
Soluzione Esamino il numeratore $f(x)$. Si ha
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
da cui
$$\log(1+x) - \sin x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
Essendo $\tan^3 x = x^3 + o(x^3)$, si conclude che
$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
Passiamo al denominatore $g(x)$. Essendo $\sin\sqrt{x} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$, si ha che $\sin^2\sqrt{x} = x + o(x)$ e quindi
$$x\sin^2\sqrt{x} = x^2 + o(x^2)$$
Attenzione! Ora conviene confrontare direttamente i due infinitesimi $x\sin^2\sqrt{x}$ e $\sin^3 x \log x$:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^3 x \log x}{x\sin^2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^3 x}{x^3} \cdot \frac{x^3 \log x}{x\sin^2\sqrt{x}}.$$
Essendo:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 \log x}{x\sin^2\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3\log x}{x^2 + o(x^2)} \overset{P.S.i.}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 \log x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$$
(si ricordi che $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0,\ \forall \alpha > 0$), ne segue che anche
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^3 x \log x}{x\sin^2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x \log x = o(x\sin^2\sqrt{x})$$
$$\Leftrightarrow g(x) = x\sin^2\sqrt{x} + o(x\sin^2\sqrt{x}) = x^2 + o(x^2)$$
In conclusione:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \overset{P.S.i.}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$
• Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot 4^x - \log^3(1-x) - x}{1 - \cos x}.$$

Soluzione Numeratore $f(x)$. Poichè $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x}=\log 4$, si ha che

$$4^x-1=x\log 4+o(x)\Rightarrow x\cdot(4^x-1)=x\cdot 4^x-x=x^2\log 4+o(x^2)$$

Inoltre, da $\log(1-x)=-x+o(x)$ si evince che $\log^3(1-x)=-x^3+o(x^3)$. Quindi $\log^3(1-x)=o(x\cdot 4^x-x)$ e

$$f(x)=x^2\log 4+o(x^2)$$

Il denominatore $g(x)=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, da cui:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\log 4+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\overset{P.S.i.}{=}\frac{x^2\log 4}{\frac{x^2}{2}}=2\log 4$$

Da notare che si concludeva analogamente considerando lo stesso limite ma con $x\to 0$.

- Calcolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{ch}x-x^4-2-\sin^2 x}{2\sin^4 x+(\sin x-\mathrm{sh}x)^2}.$$

Soluzione Numeratore $f(x)$. Ricordando gli sviluppi rispettivamente di $\mathrm{ch}x$ e $\sin x$, si arriva facilmente a

$$2\mathrm{ch}x-2=x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4),$$

$$\sin^2 x=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4).$$

<u>Si noti che scrivere $\sin^2 x=x^2+o(x^2)$ non fornisce informazioni sufficienti</u>. Allora:

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^4)-x^4-\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)\\&=\left(\frac{1}{12}-1+\frac{1}{3}\right)x^4+o(x^4)=-\frac{7}{12}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

Denominatore $g(x)$.

$$\sin x-\mathrm{sh}x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)=-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\Rightarrow(\sin x-\mathrm{sh}x)^2=\frac{x^6}{9}+o(x^6)$$

Da cui concludiamo che $g(x) = 2x^4 + o(x^4)$. Allora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4)} \stackrel{P.S.i.}{=} -\frac{7}{24}.$$

• Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} [\log(1+x) + \cos^2 x]^{1/x}.$$

Soluzione

$$\lim_{x\to 0} [\log(1+x) + \cos^2 x]^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\log[\log(1+x)+\cos^2 x]}$$

Studiamo il limite dell'esponente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log[\log(1+x) + \cos^2 x]}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log[\log(1+x) + 1 - \sin^2 x]}{x}$$

Ricordando che $\log(1+t) = t + o(t)$ e ponendo $t = \log(1+x) - \sin^2 x \to 0$ per $x \to 0$, si ottiene:

$$\log[\log(1+x) + 1 - \sin^2 x] = \log(1+x) - \sin^2 x + o(\log(1+x) - \sin^2 x)$$

Dalla precedente formula, tenendo conto che (rispetto ad x) $\log(1+x)$ è del primo ordine mentre $\sin^2 x$ è del secondo ordine, si ha:

$$\log[\log(1+x) + 1 - \sin^2 x] = \log(1+x) + o(\log(1+x))$$

E quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log[\log(1+x) + 1 - \sin^2 x]}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + o(\log(1+x))}{x}$$

$$\stackrel{P.S.i.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Il limite proposto vale dunque $e^1 = e$.

• Calcolare:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1+4/x)}{4\sin^2(1/x)} - x.$$

Soluzione Posto $t = 1/x$, il limite diventa

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\log(1+4t)}{4\sin^2(t)} - \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\log(1+4t) - 4\sin^2 t}{4t\sin^2(t)}$$

Essendo

$$\log(1+4t) = 4t - \frac{(4t)^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow t\log(1+4t) = 4t^2 - 8t^3 + o(t^3)$$

e

$$\sin^2 t = \left[t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\right]^2 = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4),$$

ne segue che

$$t\log(1+4t) - 4\sin^2 t = 4t^2 - 8t^3 + o(t^3) - 4\left[t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)\right] = -8t^3 + o(t^3).$$

Al denominatore invece abbiamo $4t\sin^2 t = 4t^3 + o(t^3)$. Perciò

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t\log(1+4t) - 4\sin^2 t}{4t\sin^2(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-8t^3 + o(t^3)}{4t^3 + o(t^3)} \overset{P.S.i.}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{-8t^3}{4t^3} = -2.$$

• Calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1} + 27^x + \log(\mathrm{sh}x + 1)}{e^{\cos^2 x} + (\mathrm{ch}x)^{\log x} + (2^{1/x})^{\log \mathrm{ch}x}}.$$

Soluzione Studio del numeratore $f(x)$. Osserviamo innanzitutto che

$$\sqrt{2x^2+1} = \sqrt{2}x + o(x) \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Inoltre da

$$\log(\mathrm{sh}x + 1) = \log\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + 1\right) = \log\left(\frac{e^x - e^{-x} + 2}{2}\right)$$

$$= \log\left[e^x\left(\frac{1 + e^{-2x} + e^{-x}}{2}\right)\right] = x + \log\left(\frac{1 + e^{-2x} + e^{-x}}{2}\right)$$

ed essendo $\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{1+e^{-2x}+e^{-x}}{2}\right) = \log(1/2)$, capiamo che

$$\log(\mathrm{sh}x + 1) = x + o(x) \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Ma ora, per ogni $b > 0$, sappiamo anche che $x^b = o(27^x)$, da cui possiamo concludere che

$$f(x) = 27^x + o(27^x)$$

Al denominatore $g(x)$, l'unico infinito è $(\mathrm{ch}x)^{\log x}$, poichè $e^{\cos^2 x}$ è limitata ($e^{-1} \le e^{\cos^2 x} \le e$, $\forall x \in \mathbb{R}$) e

$$\lim_{x\to+\infty} (2^{1/x})^{\log \mathrm{ch}x} = 2.$$

Infatti il limite dell'esponente è 1:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log \mathrm{ch} x}{x} = \frac{\log\left(\frac{e^e+e^{-x}}{2}\right)}{x} = \underset{\cdots}{\text{soliti conti}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\log\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\log\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)}{x} = 1$$

Allora

$$g(x) = (\mathrm{ch}x)^{\log x} + o[(\mathrm{ch}x)^{\log x}]$$

Infine

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{27^x + o(27^x)}{(\mathrm{ch}x)^{\log x} + o[(\mathrm{ch}x)^{\log x}]} \overset{P.S.I.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{27^x}{(\mathrm{ch}x)^{\log x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\log 27}}{e^{\log x \log \mathrm{ch}x}} = e^{x\log 27 - x\log x - \log x \log\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x\log x\left[\frac{\log 27}{\log x} - 1 - \frac{1}{x}\log\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\right]} = 0$$

In altre parole, $f(x) = o(g(x))$ per $x \to +\infty$.

- Calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x)^{x^2} - \sqrt{x^3+3} + 5^x}{(x^2)^{x^2} - \log x + e^{5x}}.$$

Soluzione Studio del numeratore $f(x)$. Sicuramente

$$\sqrt{x^3+3} = x^{3/2} + o(x^{3/2}) \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Essendo 5^x un infinito di ordine superiore a x^b ($\forall b > 0$) per $x \to +\infty$ (pensare alla tabella degli infiniti di ordine crescente per le successioni, è la stessa cosa!), concludiamo che $\sqrt{x^3+3} = o(5^x)$ per $x \to +\infty$. Conseguentemente, occorre confrontare tale infinito direttamente con il restante infinito al numeratore, che è $(x)^{x^2}$. Ovvero

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{x^2}}{-\sqrt{x^3+3} + 5^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{x^2}}{5^x + o(5^x)} \overset{P.S.I.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{x^2}}{5^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2\log x}}{e^{x\log 5}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\log x - x\log 5} = +\infty$$

perchè $\lim_{x\to+\infty} x^2\log x - x\log 5 = \lim_{x\to+\infty} x^2 \log x\left(1 - \frac{\log 5}{x\log x}\right) = +\infty$. In conclusione

$$f(x) = x^{x^2} + o(x^{x^2}).$$

Studio del denominatore $g(x)$. Ricordo innanzitutto che $\log x = o(x^b)$ ($\forall b > 0$) per $x \to +\infty$ e che $x^b = o(e^{5x})$ ($\forall b > 0$) per $x \to +\infty$. Ne segue che $\log x = o(e^{5x})$ per $x \to +\infty$. Perciò occorre confrontare tale infinito direttamente con $(x^2)^{x^2}$, ovvero

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)^{x^2}}{-\log x + e^{5x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)^{x^2}}{e^{5x} + o(e^{5x})} \overset{P.S.I.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)^{x^2}}{e^{5x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x^2 \log x}}{e^{5x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{2x^2 \log x - 5x} = +\infty,$$

perchè $\lim_{x\to+\infty} 2x^2 \log x - 5x = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 \log x \left(1 - \frac{5}{2x \log x}\right) = +\infty$. In conclusione

$$g(x) = (x^2)^{x^2} + o[(x^2)^{x^2}].$$

Infine

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{x^2} + o(x^{x^2})}{(x^2)^{x^2} + o[(x^2)^{x^2}]} \overset{P.S.I.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{x^2}}{(x^2)^{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{x^2 - 2x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2 \log x} = 0.$$

- Calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1/x)^{\sin(1/x)} + (x^2)^{\mathrm{sh}x} - x^x}{e^{\sin x} + \mathrm{sh}x + x/(x+1)}.$$

Soluzione Stabilisco innanzitutto chi sono gli infiniti del numeratore $f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} (1/x)^{\sin(1/x)} = \lim_{t\to0^+} (t)^{\sin t} = \lim_{t\to0^+} e^{\sin t \log t} = 1$$

perchè $\lim_{t\to0^+} \sin t \log t = \lim_{t\to0^+} \frac{\sin t}{t} t \log t = 0$. Quindi gli infiniti al numeratore sono $(x^2)^{\mathrm{sh}x}$ e x^x, che confronto direttamente, ovvero valuto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2\mathrm{sh}x}}{x^x} = \lim_{x\to+\infty} x^{2\mathrm{sh}x - x} = +\infty,$$

perchè $\lim_{x\to+\infty}(2\mathrm{sh}x - x) = \lim_{x\to+\infty}(e^x - e^{-x} - x) = +\infty$. In conclusione

$$f(x) = x^{2\mathrm{sh}x} + o(x^{2\mathrm{sh}x}).$$

Passiamo allo studio del denominatore $g(x)$. Da $-1 \le \sin x \le 1$ e dal fatto che $y = e^x$ è crescente $\forall x \in \mathbb{R}$, evinciamo che $e^{-1} \le e^{\sin x} \le e$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$, e quindi

$$e^{\sin x} + \frac{x+1}{x} = o(\mathrm{sh}x).$$

Infine

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2\text{sh}x}+o(x^{2\text{sh}x})}{\text{sh}x+o(\text{sh}x)}\overset{P.S.I.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2\text{sh}x}}{\text{sh}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2\text{sh}x\log x}}{e^x\left(\frac{1-e^{-2x}}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{1-e^{-2x}}e^{2\text{sh}x\log x-x}\right]=+\infty,$$

perchè $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-e^{-2x}}=2$ e $\lim_{x\to+\infty}e^{2\text{sh}x\log x-x}=+\infty$.

- Calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x})^{\sqrt{e^{4x}+1}}.$$

Soluzione È un limite del tipo "1^∞", che conviene quindi riscrivere come segue.

$$\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x})^{\sqrt{e^{4x}+1}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\sqrt{e^{4x}+1}\log(1+e^{-x})}$$

Esamino il limite dell'esponente. Si ha

$$\sqrt{e^{4x}+1}=e^{2x}+o(e^{2x})\qquad\text{per } x\to+\infty$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0\Rightarrow\log(1+e^{-x})=e^{-x}+o(e^{-x})\qquad\text{per } x\to+\infty,$$

da cui

$$\sqrt{e^{4x}+1}\log(1+e^{-x})=[e^{2x}+o(e^{2x})][e^{-x}+o(e^{-x})]=e^x+o(e^x)$$

Concludiamo allora che

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{e^{4x+1}}\log(1+e^{-x})=\lim_{x\to+\infty}[e^x+o(e^x)]\overset{P.S.I.}{=}\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x})^{\sqrt{e^{4x+1}}}=+\infty.$$