(2) Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^4+sh^5 x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{f}{g}$

Confronto $\int_0^x \sin(t^2)dt$ con x^n $(n\in\mathbb{N})$ per $x\to 0$ Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^n} = (H) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{n x^{n-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{n x^{n-1}} = PSI$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{n x^{n-1}}$$ = numero $\neq 0$ se $n-1=2 \Rightarrow n=3$ quindi

$$\frac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^3} = \frac{1}{3} \qquad \int_0^x \sin(t^2)dt = \frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

e $x\int_0^x \sin(t^2)dt = \frac{1}{3}x^4+o(x^4)$

Poichè $sh^5 x = x^5+o(x^5)$ $\quad sh(x^5)=o(x^4)$ Ne segue

$$\lim_{x\to 0}\frac{f}{g} = PSI = \lim_{x\to 0}\frac{f}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{(1/3)x^4+o(x^4)}{x^4} = PSI =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1/3)x^4}{x^4} = \frac{1}{3}$$

(3) $\quad F(x) = \int_{1/\pi}^{x} \sin(1/t)dt$ La funzione $\sin(1/t)$

è continua per $t\neq 0$; perchè $\sin(1/t)$ sia continua nell'intervallo $[1/\pi, x]$ o $[x, 1/\pi]$ deve essere $x>0$ quindi $F(x)$ è definita in $]0,+\infty[$ e si ha $F'(x)=\sin(1/x)$. L'equazione della tangente al grafico di $F(x)$ nel punto $(1/\pi, F(1/\pi))$ è

$y - F(1/\pi) = F'(1/\pi)(x-1/\pi)$ Poichè $F(1/\pi)=0$ $\quad F'(1/\pi)=0$

essa è $y=0$. La formula di Taylor di $F(x)$ di punto iniziale $x_0=1/\pi$ è $F(x) = F(1/\pi)+F'(1/\pi)(x-1/\pi)+\frac{F''(1/\pi)}{2!}(x-1/\pi)^2+\frac{F'''(1/\pi)}{3!}(x-1/\pi)^3+$

$+R_4(x)$ dove $R_4(x) = o(x-1/\pi)^3$ per $x\to 1/\pi$

Calcolo $F''(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ $\quad F'''(x) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^4}+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3}$

Perciò $F''(1/\pi)=\pi^2$ $\quad F'''(1/\pi) = -2\pi^3$, la formula richiesta è

$$F(x)=\frac{\pi^2}{2}\left(x-\frac{1}{\pi}\right)^2-\frac{\pi^3}{3}\left(x-\frac{1}{\pi}\right)^3+R_4(x)$$

5 $$F(x)=(2+x)\int_0^x \sqrt{2-t}\,\sin t\,dt$$

$f(t)=\sqrt{2-t}\,\sin t$ è continua per $t\leq 2$ perciò $f(t)$ è continua in $[0,x]$ o $[x,0]$ se $x\leq 2$ pertanto l'insieme di definizione I di $F(x)$ è $]-\infty,2]$ ed

$$F'(x)=\int_0^x \sqrt{2-t}\,\sin t+(2+x)\sqrt{2-x}\,\sin x$$

La formula di Mac Laurin richiesta è

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2}x^2+R_3(x) \quad \text{con } R_3(x)=o(x^2)\ x\to 0$$

Calcolo per $x<2$

$$F''(x)=2\sqrt{2-x}\,\sin x+(2+x)\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}\sin x+(2+x)\sqrt{2-x}\cos x$$

Si ha $F(0)=0$ $F'(0)=0$ $F''(0)=2\sqrt{2}$ perciò

$$F(x)=\sqrt{2}\,x^2+R_3(x)$$

Ne segue che $F(x)$ è un infinitesimo del II ordine rispetto ad x per $x\to 0$ con parte principale $\sqrt{2}\,x^2$

④

Sia $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{\sqrt[6]{t^2 + \log^2|t|}}{\operatorname{arctg}(t+2)}\,dt + 3$

a) trovarne l'insieme di definizione I b) dimostrare che $F(x)$ è invertibile in I c) detta g l'inversa di F scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $(3, g(3))$

La funzione $f(t) = \frac{\sqrt[6]{t^2 + \log^2|t|}}{\operatorname{arctg}(t+2)}$ è continua per $t \neq 0, t \neq -2$

perché $f(t)$ sia continua nell'intervallo $[-1, x]$ o $[x, -1]$

deve essere $-2 < x < 0$ quindi $I = (-2, 0)$

Si ha $F'(x) = \frac{\sqrt[6]{x^2 + \log^2|x|}}{\operatorname{arctg}(x+2)} > 0$ in I quindi $F(x)$

è strettamente crescente continua ed invertibile in I

Si ha $F(-1) = 3$ e quindi $-1 = g(3)$

$g'(3) = \frac{1}{F'(-1)} = \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} 1}\right)^{-1} = \frac{\pi}{4}$

L'eq della retta tangente al grafico di g nel punto

$(3, g(3))$ è $y - g(3) = g'(3)(x-3)$ cioè

$$y + 1 = \frac{\pi}{4}(x-3)$$