

A.A. 2016/17 - Analisi Matematica 1

Argomenti svolti, libro di testo di riferimento:

P. Marcellini, C. Sbordone: *Elementi Calcolo*. Liguori Editore.

O. Bernardi: *Temi d'esame senza tema*. Ed. Libreria Progetto.

- Lezione 1: Operazioni tra insiemi e loro proprietà. Se l'elemento neutro esiste è unico (con dim.). I numeri naturali, interi, razionali, reali. \mathbb{Q} è un campo ordinato. \mathbb{R} è un campo ordinato e completo. Proprietà di Archimede. $\sqrt{2}$ non appartiene a \mathbb{Q} (con dim.). In \mathbb{Q} non vale l'assioma di completezza (con dim.). Alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali: $a \cdot 0 = 0$ e $a \cdot b = 0$ implica $a = 0$ oppure $b = 0$ (con dim.).
- Lezione 2: Intervalli limitati ed illimitati. Insiemi: intersezione, unione, differenza, complementare. Insieme delle parti, prodotto cartesiano. Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico. Funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva, invertibile, (strettamente) monotona. Una funzione strettamente monotona e suriettiva è invertibile. Funzione composta. Molti esempi. Funzione potenza ennesima. Insieme di def. di $\sqrt[n]{f(x)}$. Cos'è una successione.
- Lezione 3: Funzione esponenziale e logaritmo. Insieme di def. di $A(x)^{B(x)}$ e di $\log[f(x)]$. 3 esercizi su disequazioni (fratte e con modulo). Disequazioni del tipo $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$ e $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$. 2 esercizi su insiemi di def. Funzioni trigonometriche e trigonometriche inverse. Insieme di def. di $\arccos[f(x)]$ e di $\arcsin[f(x)]$.
- Lezione 4: Insieme di def. di $\arctan[f(x)]$ e di $\operatorname{arccot}[f(x)]$. 2 esercizi sugli insiemi di def. Il Principio di Induzione (con dim.). 3 esercizi sul Principio di Induzione.
- Lezione 5: Disuguaglianza di Bernoulli (con dim.), con un'applicazione. 2 esercizi utilizzando il Principio di Induzione. Massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore. 2 esercizi su inf-sup-min-max.
- Lezione 6: (F.M.) Esercizi su inf-sup-min-max. Elementi di calcolo combinatorio: fattoriale, coefficiente binomiale e loro interpretazione combinatoria; disposizioni semplici e con ripetizione; proprietà dei coefficienti binomiali (ad es. Stifel). Teorema del binomio di Newton (enunciato).
- Lezione 7: (F.M.) Dimostrazione –mediante induzione– del teorema del binomio di Newton. Esercizi su: calcolo combinatorio, Principio di Induzione, insiemi di def.
- Lezione 8: 3 esercizi su inf-sup-min-max. 2 esercizi su insiemi di definizione. Successioni: definizione, esempi. Definizione di successione convergente, verifica (mediante la def.) di alcuni limiti di successione.

- Lezione 9: Definizione di successione divergente e indeterminata, vari esempi e verifiche di limite (mediante la def.). Diseguaglianza triangolare (con dim.). Il limite di una successione, quando esiste, è unico (con dim.). Definizione di successione limitata. Ogni successione convergente è limitata (con dim.). Operazioni sui limiti (verifica del limite della somma e del prodotto). Teorema della permanenza del segno (con dim.) e due corollari (con dim.). Le diseguaglianze al limite di attenuano!
- Lezione 10: Teoremi di confronto (con dim.). Successione infinitesima per successione limitata (con dim.). Alcuni limiti notevoli. Primi esercizi sui limiti di successioni. Infiniti di ordine crescente.
- Lezione 11: Successioni monotone. Teorema sulle successioni monotone (con dim.). Vari esempi. Criterio del rapporto per le successioni (con dim.). Dimostrazione, mediante il rapporto, che n^b/a^n e che $a^n/n!$ sono infinitesime. Esercizi su calcolo di limiti di successioni.
- Lezione 12: Esercizi su calcolo di limiti di successioni. Punti di accumulazione. Definizione di limite di funzione (con le successioni e con gli intorni). Le due def. sono equivalenti (con dim. di una sola delle due implicazioni).
- Lezione 13: Definizione di limite di funzione con gli intorni: 3 verifiche di limite. Teorema sul limite della funzione composta (cenno alla dim.). Esempio in cui tale teorema non si può applicare. Limiti unilaterali: definizione. Continuità: definizione. 1 esercizio sui limiti di successione. 1 esercizio sulla continuità per una funzione dipendente da 2 parametri reali.
- Lezione 14: (F.M.) Il numero $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (con dim.). 3 esercizi sul calcolo di limiti di successioni.
- Lezione 15: (F.M.) 1 esercizio su inf-sup-min-max. 1 esercizio utilizzando il Principio di Induzione. 1 esercizio sul calcolo di limiti di successioni. 1 esercizio sulla continuità per una funzione dipendente da 2 parametri reali. Teorema sul limite delle funzioni monotone, vari esempi.
- Lezione 16: 3 esercizi sulla continuità per una funzione dipendente da 2 parametri reali. 1 esercizio sugli insiemi di def. Vari tipi di discontinuità, corrispondenti esempi. Alcuni teoremi sulle funzioni continue con dim. del Teorema della permanenza del segno.
- Lezioni 17: Teorema di esistenza dei valori intermedi (con dim.). Criterio di continuità per le funzioni monotone e criterio di invertibilità per le funzioni continue e strettamente monotone (con dim.). Teorema di continuità per le funzioni inverse (con dim.). Vari esempi e verifiche di funzioni continue. Derivate: definizione, la derivabilità in un punto implica la continuità nel punto (con dim.) ma non vale il viceversa (con controesempio). Vari esempi e verifiche di funzioni derivabili.

- Lezione 18: Retta tangente. Significato geometrico della derivata. Operazioni con le derivate (con dim. della formula per il prodotto). Derivate successive. Alcuni limiti notevoli. Dx^n , $D \log x$, Da^x . Teorema di derivazione della funzione composta (con dim. in un caso particolare), teorema di derivazione della funzione inversa (con dim.). 2 esercizi su continuità e derivabilità di funzioni.
- Lezione 19: $D \arccos x$, $D \arcsin x$, $D \tan x$, $D \operatorname{arccot} x$. Punti angolosi, cuspidi. Esercizi su continuità e derivabilità di funzioni e su retta tangente. Alcuni limiti notevoli, Dx^a . Asintoti: definizione e calcolo di m e q .
- Lezione 20: Massimi e minimi (relativi e assoluti) per una funzione. Teoremi di Fermat, Rolle e Lagrange (con dim.). Criterio di monotonia (con dim.). 2 esercizi.
- Lezione 21: Esercizi su studio di funzione in preparazione alla prova parziale.
- Lezione 22: (F.M.) Esercizi su studio di funzione in preparazione alla prova parziale.
- Lezione 23: Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo (con dim.). Criterio di stretta monotonia (con dim.). Teorema di L'Hopital (con dim. in un caso particolare). Corollario sulla derivabilità di una funzione in un punto (con dim.). Molti limiti usando L'Hopital. Concavità e convessità: formulazione geometrica.
- Lezione 24: Concavità e convessità: formulazione analitica e corrispondente teorema (con dim.). Punti di flesso. Infinitesimi. Infinitesimi dello stesso ordine, di ordine inferiore-superiore, non confrontabili. Molti esempi. Caratterizzazione degli infinitesimi dello stesso ordine e di ordine inferiore-superiore (con dim.). o piccolo. Principio di Sostituzione degli Infinitesimi (PSi). Molti esempi, primi esercizi sul calcolo di limiti usando il PSi.
- Lezione 25: Esercizi sul calcolo di limiti usando il PSi. Principio di sostituzione degli infiniti (PSi). Deduzione della formula di Taylor (con resto di Peano) partendo da un polinomio.
- Lezione 26: Dim. della formula di Taylor (con resto di Peano). Criterio per i punti di massimo e minimo (con dim.). Formule di Taylor per seno, coseno, logaritmo, esponenziale. Seno e coseno iperbolici e corrispondenti formule di Taylor.
- Lezione 27: Tangente iperbolica e corrispondente formula di Taylor. Esercizi sui calcoli di limiti utilizzando il PSi e il PSI (anche con parametro).
- Lezione 28: (F.M.) Esercizi usando il PSi e il PSI (anche con parametro). Due metodi per approssimare le soluzioni di un'equazione $f(x) = 0$: il metodo di bisezione e il metodo di Newton (o delle tangenti).

- Lezione 29: (F.M.) Esercizi usando il P*S*i e il P*S*I (anche con parametro).
- Lezione 30: Esercizi usando il P*S*i e il P*S*I (anche con parametro). Il metodo di esaustione: calcolo dell'area di una regione piana sottesa da una parabola.
- Lezione 31: Il metodo di esaustione nel caso generale: definizioni e notazioni. Definizione di integrale definito. Caratterizzazione delle funzioni Riemann-integrabili in un intervallo (con dim.). Esempio di funzione non Riemann-integrabile.
- Lezione 32: Integrabilità delle funzioni monotone (con dim.). Il teorema della media (con dim.). Proprietà degli integrali definiti. 1 esercizio sul calcolo di limiti con il P*S*i.
- Lezione 33: (F.M.) Formule di sostituzione e d'integrazione per parti nell'integrale definito (con dim.). Integrale indefinito: concetto di primitiva e proprietà salienti. Legami con la teoria dell'integrale definito di Riemann. Commenti sul Teorema fondamentale del calcolo Integrale.
- Lezione 34: Funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale (con dim.). La continuità nel teorema fondamentale del calcolo integrale necessaria (esempio). Primitive. Integrale indefinito. Qualche esercizio di calcolo di integrali con il metodo di sostituzione. 1 esercizio sulla funzione integrale (dominio, invertibilità, retta tangente al grafico, ordine di infinitesimo...).
- Lezione 35: Il metodo di integrazione delle funzioni razionali fratte. 3 esercizi sulla funzione integrale. 1 esercizio di calcolo di limiti usando il P*S*i.
- Lezione 36: (F.M.) Preliminari: O grande e o piccolo. Teoria dell'integrazione in senso generalizzato (per l'integrale di Riemann): caratterizzazione "alla Cauchy". Assoluta integrabilità in senso generalizzato. Teoremi di confronto e corollari.
- Lezione 37: (F.M.) Teorema di convergenza per integrali "oscillanti". Esempi di applicazione. Esercizi riassuntivi ed esempi.
- Lezione 38: Esercizi su funzione integrale e integrali impropri. Serie: definizione, serie convergenti, divergenti, indeterminate, primi esempi.
- Lezione 39: Condizione necessaria per la convergenza di una serie (con dim.). Resto di una serie. Teorema sulle serie a termini non negativi (con dim.). Esempi. La serie geometrica. La serie armonica (generalizzata). Il criterio del confronto e il criterio dell'ordine degli infinitesimi per le serie a termini non negativi (con dim.).

- Lezione 40: Il criterio del rapporto per le serie a termini non negativi (con dim.). Molti esercizi sulle serie. 3 esercizi sulla funzione integrale ed integrali impropri.
- Lezione 41: Il criterio della radice per le serie a termini non negativi. Serie a termini di segno alterno. Convergenza assoluta. La convergenza assoluta implica la convergenza semplice (con dim.). Criterio di Leibnitz (solo enunciato). Molti esercizi sulle serie.
- Lezione 42: (F.M.) Introduzione sulle ODE's: modello di Malthus. Terminologia generale. Esempi. Equazioni lineari. Equazioni del primo ordine lineari: esistenza e unicità. Caratteristiche. Formula risolutiva. Metodo della variazione delle costanti.
- Lezione 43: (F.M.) Esercizi sulle equazioni lineari del primo ordine. Equazioni a variabili separabili: esistenza e unicità. Esempi ed esercizi (equazioni e problemi di Cauchy associati).
- Lezione 44: Esercizi sulle serie (anche dipendenti da un parametro reale).
- Lezione 45: Esercizi su equazioni differenziali (lineari e a variabili separabili). 1 esercizio sulle serie (dipendenti da parametro reale). I numeri complessi.
- Lezione 46: Equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti. Soluzioni nel caso omogeneo e nel caso non omogeneo (nel caso in cui $f(x)$ del tipo esponenziale per polinomio per seno o coseno). Vari esempi.
- Lezione 47: Esercizi su equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti.