Esercizi - Domande 1

1. Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

   - $f_1(x) = \sqrt[6]{x^2 - 3x + 2}$
   - $f_2(x) = \log(x^2 - 4x + 4)$
   - $f_3(x) = \log(x - x^2)$
   - $f_4(x) = \log(\sqrt{-x^2 + 3x + 4} + 2 - 4x)$
   - $f_5(x) = \log(2x + 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 15})$
   - $f_6(x) = \sqrt[4]{\sqrt{2 - x^2} - 2x + 1}$
   - $f_7(x) = \sqrt{2x - 1 - \sqrt[3]{8x^3 - 7}}$
   - $f_8(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$
   - $f_9(x) = \sqrt[4]{-2x - \sqrt{1 - x - 2x^2}}$

   Suggerimento per $f_8(x)$:

$$\left|\frac{x-1}{x+2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| \leq |x+2| \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \leq (x+2)^2 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

2. Disegnare i grafici di $y = x^3$, $y = x^5$ e confrontarli in modo da stabilire in quali intervalli $x^3 > x^5$. Ritrovare lo stesso risultato risolvendo la disuguaglianza.
   Attenzione! $x^3 > x^5 \Rightarrow 1 > x^2$ se $x > 0$, mentre $x^3 > x^5 \Rightarrow 1 < x^2$ se $x < 0$.

3. Disegnare i grafici di $y = 2^x$, $y = 3^x$ e confrontarli in modo da stabilire in quali intervalli $2^x < 3^x$. Ritrovare lo stesso risultato risolvendo la disuguaglianza.
   Si osservi che $2^x < 3^x \Leftrightarrow \log 2^x < \log 3^x$ (il logaritmo va inteso in base e).

4. Disegnare i grafici di $y = (1/2)^x$, $y = (1/3)^x$ e confrontarli in modo da stabilire in quali intervalli $(1/2)^x < (1/3)^x$. Ritrovare lo stesso risultato risolvendo la disuguaglianza.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

5. Cosa significa che il campo ordinato $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è completo?

6. Ricordare il contro-esempio che prova che il campo ordinato $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ non è completo.

7. Qual è la differenza tra codominio ed immagine di una funzione?

8. Una funzione strettamente monotona è sempre invertibile? Pensare a $f_1(x) = \arctan x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a $f_2(x) = \arctan x : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$. Ragionare quindi sul ruolo della suriettività per avere l'invertibilità.

9. Una funzione monotona ma non strettamente monotona può essere iniettiva? Giustificare adeguatamente la risposta.

10. Verificare, aiutandosi con il grafico delle corrispondenti funzioni, che

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$$

$$x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Infine, se $x_1 < 0 < x_2$ allora nulla si può dire su x_1^2 e x_2^2.

11. Mostrare con un esempio (diverso da quello visto in aula) che la composizione di funzioni non gode della proprietà commutativa.

12. Pensando al Principio di Induzione, capire perchè non può funzionare senza il "primo passo induttivo" ovvero la verifica che la proposizione sia vera per 1. Si può sostituire ad 1 un numero qualsiasi? Cosa comporta tale sostituzione?

13. Saper dimostrare il Principio di Induzione.