

Esercizi - Domande 2

1. Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

- $f_1(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{3x-2}\right)$
- $f_2(x) = (\sqrt{3x^2 + x - 2} - x - 1)^x$
- $f_3(x) = \log\left(\left|\frac{x-1}{2x-3}\right| - 2\right)$
- $f_4(x) = (\sqrt{x+4} - |x| + 2)^{\frac{1}{\log|x|}}$
- $f_5(x) = (\sqrt{3-2x-x^2} + 1 - x)^{\sin x}$
- $f_6(x) = \arccos\sqrt{\left(\frac{1}{2} - x\right)(x-3)} + \arctan\sqrt[4]{\frac{x-2}{5-x}}$
- $f_7(x) = (\sqrt{x^2-16} - x - 1)^{\frac{1}{\log|x+5|}} + [\arctan\left(\frac{4-x}{x+8} - 2\right)]^{\sin x}$

Si ricordi che consideriamo definita a^b con $a, b \in \mathbb{R}$ solo per $a > 0$. Pertanto, $[f(x)]^{g(x)}$ risulta definita per $f(x) > 0$ e $g(x)$ esistente.

2. Si dimostrino per induzione le seguenti proprietà:

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- (b) $\forall n \geq 3 : n^2 > 2n + 1$
- (c) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$

3. Stabilire estremo superiore ed inferiore (ed eventualmente massimo e minimo) dell'insieme:

$$E = \left\{ \frac{n^2 - 1}{3n^2} + \frac{2}{3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

4. Dato l'insieme:

$$E = \left\{ \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+4}} : n = 0, 1, 2, \dots \right\},$$

verificare con la definizione che $\min E = \frac{1}{2}$ e che $\max E = \frac{17}{\sqrt{68}}$.

5. Siano

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}, x \neq -2 : \left| \frac{x-3}{x+2} \right| \leq 1 \right\}$$

e $B =]0, 2[$. Determinare $\sup(A \cap B)$ e $\inf(A \cap B)$. Stabilire se esistono $\max(A \cap B)$ e $\min(A \cap B)$ ed eventualmente calcolarli.

6. Dato l'insieme:

$$E = \left\{ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

verificare con la definizione che $\min E = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e che $\sup E = 1$. Esiste $\max E$? Se sì, quanto vale?

7. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Esistono sempre \sup e \inf di A in \mathbb{R} (eventualmente $\pm\infty$)? E \max e \min ? Cosa si può dire di \sup e \inf di A in \mathbb{Q} ? Motivare adeguatamente le risposte.
8. Saper tradurre “in formula” il fatto che l'estremo inferiore di un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è $-\infty$.
9. Saper scrivere, ragionando e senza ricordare inutilmente a memoria, le proprietà caratteristiche di estremo superiore ed inferiore.
10. Siano $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Qual è la differenza tra disposizione e combinazione di k elementi in un insieme di n elementi? Quante sono le disposizioni di k elementi in un insieme di n elementi? E le combinazioni?
11. Aver capito perchè $(n+1)! = (n+1)n!$.
12. Saper tradurre “in formula”, ragionando e senza ricordare inutilmente a memoria, la convergenza di una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ad $l \in \mathbb{R}$, cioè:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l.$$

13. Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ se e soltanto se $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$.