Esercizi - Domande 3

1. Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:
   - $f_1(x) = \log\left(\left|\frac{x-1}{x-7}\right| - 1\right)$
   - $f_2(x) = \sqrt{|x| + 1 - \sqrt{2-x}}$
   - $f_3(x) = \arccos(|x| - 2) + (2x-1)\log x$

2. Dato l'insieme:
$$E = \left\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\},$$
dimostrare con la definizione che $\sup E = 1$ e $\min E = 0$. Esiste $\max E$? Se sì, quanto vale?

3. Dato l'insieme
$$E = \left\{\frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\right\},$$
dimostrare con la definizione che $\sup E = 1$ e $\min E = 0$. Esiste $\max E$? Se sì, quanto vale?

4. Dato l'insieme
$$E = \left\{\frac{n-3}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup (-1, 1),$$
verificare che $\min E = -2$ e che $\sup E = 1$. Esiste $\max E$? Se sì, quanto vale?

5. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2 + 7n - 10}{2n^3 + 5n + 3}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^4 + 1}{n^4 + 2n^2 + 1}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[5]{n^2+1} - n$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} - n$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left[\sqrt{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\left(\sqrt{n^2+5n+2} - n\right)$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{e}{2}\right)^n - \frac{n+1}{2n-5}\right]\left(n - \sqrt{n^3+5n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{2}+\sin(1/n^2)}{\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3/2}+n}{\sqrt{4n^3+n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (n-\sqrt{n^2+2})\log(2^n+n^4)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^n+n^3)+5^{-n}}{\sqrt[3]{n^2}-n\cos(1/n)}$$

Si ricordi che:

- $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$,
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sin(a_n)=0$ e $\lim_{n\to+\infty} \cos(a_n)=1$.

I risultati devono essere accuratamente giustificati.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

6. Saper enunciare e dimostrare (senza guardare il libro o gli appunti) il Teorema della permanenza del segno per le successioni.

7. Usando lo stesso ragionamento della dimostrazione del Teorema del rapporto per le successioni, provare il seguente risultato:

   Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a termini positivi e $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
   Se $\lim_{n\to+\infty} b_n = l > 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

   Perchè non si può dire nulla su $\lim_{n\to+\infty} a_n$ quando $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$? Motivare adeguatamente la risposta.

8. Provare ad applicare il Teorema del rapporto per dimostrare che, per $b>0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0$. Perchè non è possibile applicarlo?

9. Aver capito che la definizione di limite con gli intorni implica quella con le successioni. In breve, perchè? Ricordare che le due definizioni si equivalgono ovvero vale l'una se e solo se vale l'altra.

10. Ragionare sui concetti di condizione necessaria, sufficiente, necessaria e sufficiente. Tra i teoremi che abbiamo dimostrato in aula, enunciarne uno che fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria e uno che fornisce una condizione necessaria e sufficiente.