

## Esercizi - Domande 4

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n + e^n - 2^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2000} - n^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + \sin n \cdot \log n}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{n} + \left( \frac{2}{e} \right)^n \right] (\sqrt{4n+1} - 2\sqrt{n})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + (-1)^n (n+1)^2 + \frac{\arctan n}{n}}{-5^n + n + \sqrt[3]{n^6} + 3n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^{3/2} + n^{7/8} - n + 2 \sin n}{\log 2^n + n^{7/5}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log[(3^n)^3 + \sin(1/n)] - \sqrt[4]{n^3}}{2n + \sqrt{n} \cos(1/n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(2^n + 5^n) - \sqrt{n^2 + 1}}{(\sqrt{n} + \sqrt[4]{n})(\log n)^2}$$

2. Servendosi della definizione di limite, verificare che si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \log(x^2 - 3x) = -\infty$$

(si può calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x^2 - 3x)$ ?)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1-x}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+1} = 2$$

3. Disegnare il grafico delle funzioni interessate e, ricordando il Teorema sul limite delle funzioni monotone, calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$$

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \cotan x, & \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cotan x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotan} x, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotan} x \end{array}$$

4. Usando il Teorema sul limite delle funzioni composte, calcolare:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x^2} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) + \log(1-x)}{x^2} \quad (\text{si ricordi che } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1) \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} \\ & (\text{esistono } \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/|x|}?) \end{aligned}$$

5. La funzione  $f(x) = x \cdot \cotan^2 x$  è prolungabile per continuità in  $x = 0$ ?

6. Per quale valore di  $a \in \mathbb{R}$  la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-3x^2}}{x} & x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \setminus \{0\} \\ a & x = 0 \end{cases}$$

è continua in  $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ ?

7. La funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \log x - \log(\sin(2x)) & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & x = 0, \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

è continua in  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ? La funzione  $g(x) = \log x - \log(\sin(2x))$  è prolungabile per continuità in  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ? Dove è definita  $g(x)$ ?

\*\*\*\*\*

8. Sia  $A \subset \mathbb{R}$ . Sapere la definizione di punto di accumulazione per  $A$ . Esplicitare un sottoinsieme  $A \subset \mathbb{R}$  che (i) ammette (almeno) un punto di accumulazione non appartenente ad  $A$ , (ii) per cui esiste un punto di  $A$  che non è di accumulazione.

9. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dimostri il Teorema della permanenza del segno per una funzione continua in un intorno di un punto  $x_0 \in A$ . Quali sono tutte le possibili scelte di  $\varepsilon > 0$  per ottenere la desiderata contraddizione?

10. Elencare i tre tipi di discontinuità fornendo tre corrispondenti esempi.