Esercizi - Domande 6

1. Calcolare $De^{\sqrt{x}}$ per $x > 0$ e discutere se per $x = 0$ esiste la derivata destra.

2. Applicando le regole di derivazione delle funzioni composte e inverse derivare, ove possibile, le seguenti funzioni:

$$f_1(x) = 7^{\tan x} \qquad f_2(x) = 5^{\sin x} + e^{x^2}$$

$$f_3(x) = \log|\cos x|^2 \qquad f_4(x) = (\sin x)^x$$

$$f_5(x) = x^{\arcsin x} \qquad f_6(x) = \frac{\arccos x}{x}$$

<u>Si chiede di precisare l'insieme di definizione e l'insieme in cui sono applicabili le regole di derivazione</u> (come abbiamo fatto in aula).

3. Scrivere l'equazione della retta tangente alle curve $y = x \log x$ (in $x = 1$) e $y = \arcsin(1/\sqrt{x})$ (in $x = 2$).

4. Studiare i punti di non derivabilità e calcolare, dove esiste, la derivata delle funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= |x^2 + 3x - 4| \\ f_2(x) &= \sqrt{|2x^2 + x - 1|} \\ f_3(x) &= e^x \sqrt{\left|\frac{x+2}{x-3}\right|} \end{aligned}$$

5. Si dimostri che $f(x) = \log(1 + x^2 e^{1-x})$ è invertibile in un opportuno intorno I di $x = 1$ (indicare quale). Detta g l'inversa di f in I, calcolare $g'(\log 2)$.

6. Si dimostri che $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$ è invertibile in un opportuno intorno I di $x = 0$ (indicare quale). Detta g l'inversa di f in I, calcolare $g'(-2)$. Sia

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x^2 - 2)e^{2x} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^{\alpha} e^{2x} & x > 0 \end{cases}$$

Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali φ è continua in $\mathbb{R}$?

7. Studiare continuità, derivabilità, ricercare massimi e minini ed eventuali asintoti e abbozzare il grafico delle seguenti funzioni:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \sqrt{x^2+1} - |x| \\
f_2(x) &= \sqrt{2-x} - \sqrt{|x|} \\
f_3(x) &= \begin{cases} 3x - x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ -1/x^2 & x < -1 \\ x & -1 \leq x < 0,\ x > 2 \end{cases} \\
f_4(x) &= \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} & x \leq -1,\ x > 2 \\ \frac{1}{3}|1-2x| & -1 < x \leq 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

8. Si consideri una funzione definita e costante in un intorno di x_0. È corretto affermare che x_0 è un punto di minimo e un punto di massimo? Perchè?

9. La definizione di punto di minimo e di massimo è stata data per una qualsiasi funzione (non continua). Pensare ad un esempio di funzione definita ma discontinua in un punto x_0, per cui x_0 è punto di minimo.

10. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile. Usando il Teorema di Lagrange dimostrare che f è costante in $[a, b]$ se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

11. Il sistema autostradale Tutor rileva che un'auto è passata al km 37 alle 15:12 e al km 187 alle 16:12. Perchè il sistema stabilisce che in un istante intermedio tra le 15:12 e le 16:12 l'auto ha viaggiato a 150 km/h?