**Esercizi - Domande 7**

1. Calcolare, applicando opportunamente L'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\log(\cos(1/x)) \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\mathrm{cotan} x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sin^3(1/x)\right]^{1/x-\sin(1/x)} \qquad \text{(si consiglia di porre } 1/x=t\text{)}$$

Si ricordi che $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$.

2. Studiare (inclusa concavità e punti di flesso) e tracciare il grafico della funzione $f(x) = \arctan x^2$.

3. Sia $f(x) = x^3 - x^2 + 2x\cdot\arctan x - \log(1+x^2)$. Si studino concavità e convessità di $f(x)$ nel suo dominio. Da tale studio, si deduca il segno di $f'(x)$.

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \mathrm{sh}x}{e^x - x - \mathrm{ch}x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{\log(1+x^2)-\mathrm{sh}^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+x)-\sin x+\tan^3 x}{x\sin^2(\sqrt{x})-\sin^3 x\cdot\log x} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot 4^x-\log^3(1-x)-x}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{x^2}}{\sin^2 x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{ch}x - x^4 - 2 - \sin^2 x}{2\sin^4 x + (\sin x - \mathrm{sh}x)^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\arctan x)\cdot\sin x}{1-\cos(x^2)} \qquad \lim_{x\to 0}[\log(1+x)+\cos^2 x]^{1/x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+4/x)}{4\sin^2(1/x)} - x, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}+27^x+\log(\mathrm{sh}x+1)}{e^{\cos^2 x}+(\mathrm{ch}x)^{\log x}+(2^{1/x})^{\log \mathrm{ch}x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)^{x^2}-\sqrt{x^3+3}+5^x}{(x^2)^{x^2}-\log x+e^{5x}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{(1/x)^{\sin(1/x)}+(x^2)^{\mathrm{sh}x}-x^x}{e^{\sin x}+\mathrm{sh}x+x/(x+1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x})^{\sqrt{e^{4x}+1}} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+e^x}{(\mathrm{ch}x)^x+e^{3\log|x|}}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

5. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $(a, b) \setminus \{x_0\}$. Perchè lo studio della derivabilità di $f$ in $x_0$ tramite i limiti destro e sinistro della derivata prima può non dare informazioni? Ricordare-costruire un esempio.

6. La concavità-convessità è una condizione geometrica o analitica? Una funzione costante a tratti, è concava, convessa o nessuna delle due? Formulare un esempio di funzione convessa che non sia due volte derivabile.

7. Per dimostrare la formula di Taylor di punto iniziale $x_0$ e di ordine $n$, occorre che la funzione ammetta tutte le derivate fino all'ordine $n$ in $x_0$ oppure che tali derivate siano anche continue in $x_0$? Perchè? Motivare adeguatamente la risposta.

8. Supponiamo che $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ammetta tutte le derivate in $(a, b)$. Il Teorema di Fermat fornisce una condizione necessaria affinchè un punto $x_0 \in (a, b)$ sia di minimo o di massimo. Quale criterio fornisce una condizione sufficiente? In che punto della dimostrazione di tale criterio l'ordine della prima derivata non nulla in $x_0$ (sia esso pari o dispari) è utilizzato?

9. Ricavare, come abbiamo fatto a lezione, lo sviluppo di Taylor di $\tan x$ e di $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$ per $x \to 0$.