4.8 Funzioni convesse e concave

Anche in questo paragrafo la notazione (a, b) avrà lo stesso significato espresso nella nota iniziale del § 4.6.

4.8.1 Definizioni e teoremi connessi

Definizione 4.8.1.1 *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. *La funzione* f *si dice* convessa (*in* (a, b)) *se, qualunque sia la coppia di punti* $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$, *il segmento che unisce i punti* $(x_1, f(x_1))$ *e* $(x_2, f(x_2))$, corda *del grafico di* f, *si trova al di sopra del grafico della* f *ristretta a* $]x_1, x_2[$.

Definizione 4.8.1.2 *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. *La funzione* f *si dice* concava (*in* (a, b)) *se la funzione* $-f(x)$ *è convessa.*

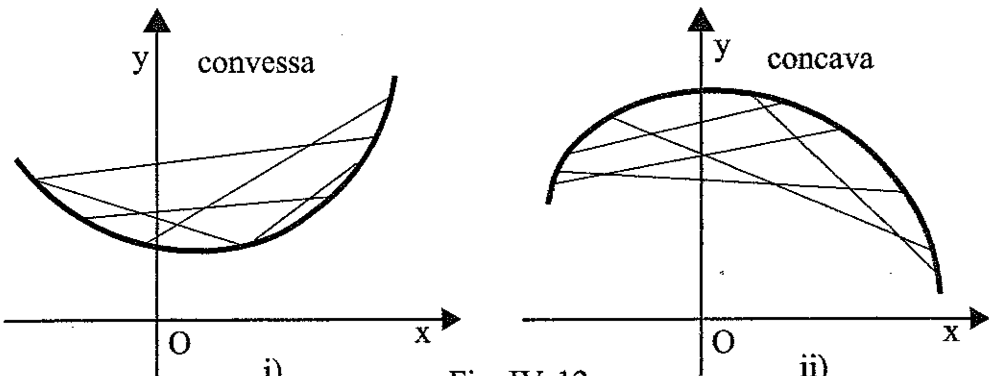

Fig. IV. 12

In figura IV. 12 i) [ii)]c'è il grafico di una funzione convessa [concava]. Si noti come le corde , i segmenti segnati con tratto sottile, stanno sopra [sotto] il grafico, segnato con tratto grosso.

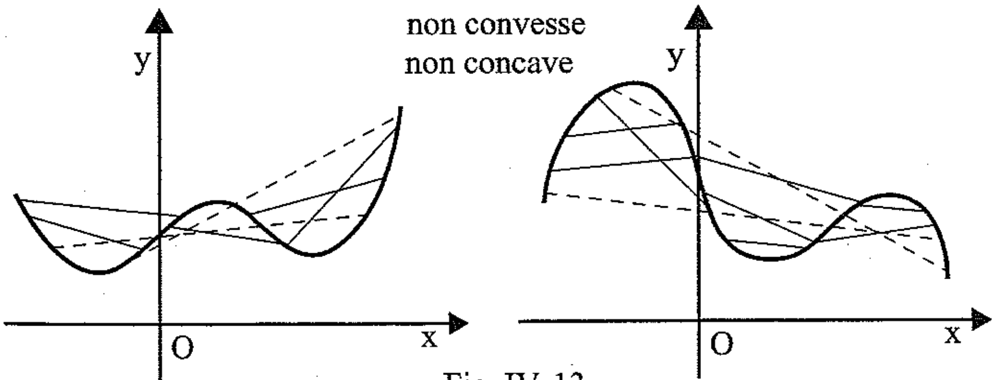

Fig. IV. 13

In figura IV. 13 ci sono grafici di due funzioni che non sono nel loro insieme di definizione (un intervallo) né convesse, né concave. Si noti come ci sono corde che stanno completamente sopra o completamente sotto il grafico (i segmenti segnati con tratto sottile); ci sono anche corde che per un tratto stanno sopra e per un altro stanno sotto, evidenziate in tratteggio.

Per dare una formulazione analitica alla precedente definizione di funzione convessa scriviamo prima l'equazione della retta passante per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$:

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) + f(x_1)$$

e scriviamo che per $x \in \,]x_1, x_2[$ il segmento di retta per $x \in \,]x_1, x_2[$ (corda) si trova al di sopra dei punti corrispondenti del grafico di f:

$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) + f(x_1), \;\; x \in \,]x_1, x_2[. \tag{4.56}$$

Se la vogliamo concava basta sostituire le parole 'al di sopra' con le parole 'al di sotto' e cambiare il simbolo '$<$' con '$>$' nella disuguaglianza scritta.

Teorema 4.8.1.3 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e di classe C^2 in $]a, b[$. Se $f''(x) > 0$ $[f''(x) < 0]$ per ogni $x \in \,]a, b[$, allora la funzione f è convessa [concava] in (a, b).*

Dimostrazione. Sia $f''(x) > 0$. Bisogna far vedere che, detti x_1 e x_2 due punti (a, b), per ogni $x \in \,]x_1, x_2[$ è verificata la (4.56); cioè la funzione:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) - f(x_1) \tag{4.57}$$

è , per tali x, negativa. (Si rifletta su che cosa rappresenta, nella interpretazione geometrica, la F). Si ha:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,,$$

$$F''(x) = f''(x)\,, \qquad\qquad F(x_1) = F(x_2) = 0\,.$$

Essendo per ipotesi $f''(x) > 0$ e quindi $F''(x) > 0$, la funzione $F'(x)$ risulta crescente e, dovendo annullarsi per il teorema di Rolle in almeno un punto c interno a $]x_1, x_2[$, essa sarà negativa in $]x_1, c[$ e positiva in $]c, x_2[$. Pertanto la $F(x)$ sarà decrescente in $]x_1, c]$ e crescente in $[c, x_2[$; ma, essendo $F(x_1) = F(x_2) = 0$, la F sarà negativa in tutti i punti di $]x_1, x_2[$ (in c avrà un minimo assoluto negativo se ristretta a $]x_1, x_2[$). Analogo è il ragionamento nel caso di $f''(x) < 0$. //

Dal teorema precedente si deduce che se $f \in C^2(]a, b[)$ ed è convessa in (a, b), si ha: $f''(x) \geq 0$ in $]a, b[$; infatti se per assurdo fosse f'' minore di zero in un punto x_0 , per il teorema della permanenza del segno lo sarebbe in un intorno di x_0 e in tale intorno sarebbe concava. Si noti a tale proposito che la funzione $f(x) = x^4$ è convessa in R, eppure è : $f''(0) = 0$.

Vogliamo ora confrontare il grafico di una funzione f convessa [concava] e abbastanza regolare in un intervallo (a, b) con la retta tangente al grafico di f in un qualunque punto $x_0 \in]a, b[$.
Ricordiamo che l'equazione della retta tangente al grafico di f in x_0 così si scrive:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Lo studio del problema posto si riduce allo studio del segno della funzione:

$$D(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) \tag{4.58}$$

Si ha: $D(x_0) = 0$ e:

$$D'(x) = f'(x) - f'(x_0) \tag{4.59}$$

$$D''(x) = f''(x) \; . \tag{4.60}$$

Proposizione 4.8.1.4 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e di classe C^2 in $]a, b[$. Se $f''(x) > 0$ $[f''(x) < 0]$ per ogni $x \in]a, b[$, allora la tangente in un qualunque punto $x_0 \in]a, b[$ al grafico di f si trova tutta al di sotto [al di sopra] di tale grafico.*

Dimostrazione.
Data l'ipotesi e la (4.60) è $D''(x) > 0, \forall x \in]a, b[$ e perciò $D'(x)$ è crescente; per la (4.59) la $D'(x)$ è nulla in x_0 e perciò , essendo crescente, è negativa in

$]a, x_0[$ e positiva in $]x_0, b[$. Pertanto $D(x)$ è decrescente in $]a, x_0[$ e crescente in $]x_0, b[$ ma, essendo $D(x_0) = 0$, essa è positiva per ogni x di $]a, b[\setminus\{x_0\}$. Dalla definizione di $D(x)$ segue che la retta tangente al grafico di f in x_0 si trova al di sotto di tale grafico.
Analogo è il ragionamento nel caso $f''(x) < 0$. //

4.8.2 Punti di flesso

Definizione 4.8.2.1 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $]a, b[$. Un punto $x_0 \in]a, b[$ si dice* punto di flesso *per la f se esiste un intervallo $]x_1, x_2[$ al quale x_0 è interno, tale che in $]x_1, x_0[$ il grafico della f si trova al di sotto della tangente a f nel punto x_0 e in $]x_0, x_2[$ il grafico della f si trova ad di sopra di detta tangente; oppure se in $]x_1, x_0[$ il grafico di f si trova al di sopra e in $]x_0, x_2[$ al di sotto della detta tangente.*

Proposizione 4.8.2.2 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $]a, b[$. Se nel punto $x_0 \in]a, b[$ la f' ha un punto di massimo relativo proprio o di minimo relativo proprio, allora x_0 è un punto di flesso per la f.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione D definita dalla (4.58). Se f' ha massimo relativo proprio in x_0, dalla (4.59) segue che esiste un opportuno intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset (a, b)$ tale che $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus\{x_0\} : D'(x) < 0$; cioè $D(x)$ è decrescente negli intervalli $]x_0 - \delta, x_0]$ e $[x_0, x_0 + \delta[$ e perciò , essendo $D(x_0) = 0$ la $D(x)$ è positiva in $]x_0 - \delta, x_0[$ e negativa in $]x_0, x_0 + \delta[$. Analogo è il ragionamento se f' ha un minimo relativo proprio in x_0. //