1. INFINITESIMI

1.1 DEFINIZIONI E PROPRIETÀ PRINCIPALI

Sia $f : (I \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ *e sia* $P_0 \in DI$ *(cioè* P_0 *sia punto di accumulazione per* I*;* P_0 *può essere anche uno dei simboli* x_0^-, x_0^+, $+\infty$, $-\infty$, ∞*).*

Se $\lim_{P \to P_0} f(P) = 0$, f *si dice **infinitesima** in* P_0*;*

f *si dice anche **un infinitesimo** (in* P_0 *o per* $P \to P_0$*).*

Esempi

1) $\sin x$ è infinitesima in 0, ma anche in $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) x^2 è infinitesima in 0.

3) $\dfrac{1}{x}$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$.

Ricordiamo alcune

Proprietà degli infinitesimi

1.1.1 *f è un infinitesimo in P_0 se e solo se $|f|$ è un infinitesimo in P_0.*

Sia g una funzione con lo stesso insieme di definizione I di f (escluso al più P_0).

1.1.2 *Se* $|g(P)| \leq |f(P)|$ $\forall P \in I - \{P_0\}$ *ed f infinitesima in P_0, allora anche g è infinitesima in P_0.*

1.1.3 *Se f e g sono entrambe infinitesime in P_0, allora la loro somma $f + g$ è infinitesima in P_0.*

1.1.4 *Se f è infinitesima in P_0 e g è una funzione limitata in un intorno di P_0, allora il prodotto $f \cdot g$ è infinitesimo in P_0.*

1.1.5 Definizione

*Se f e g sono definite nello stesso insieme (escluso al più P_0) e sono entrambe infinitesime in P_0, si dicono **infinitesimi simultanei** in P_0.*

Ad esempio,

$\sin x$ e x sono infinitesimi simultanei in 0,

$\cos x$ e $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$ sono infinitesimi simultanei in $\frac{\pi}{2}$,

$\sin x$ e $(x-\pi)$ sono infinitesimi simultanei in π.

Ancora, $\sin x$ e $\sin\frac{x}{2}$ sono infinitesimi simultanei in ogni punto x_k del tipo

$x_k = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$,

$\sin x$ e $\cos x$ non sono infinitesimi simultanei in nessun punto $x \in \mathbb{R}$.

1.2 CONFRONTO FRA INFINITESIMI

Di qui in avanti, ogni qualvolta considereremo un infinitesimo f in P_0 (potendo P_0 essere uno dei simboli $+\infty$, $-\infty$, ∞), supporremo verificata la

1.2.0 Ipotesi (di non annullamento).

Esiste un intorno di P_0 in cui $f(P) \neq 0$, escluso al più P_0 stesso.

Definizione

*Dati due infinitesimi simultanei in P_0, f e g, si dice che f e g hanno lo **stesso ordine di infinitesimo** se*

1.2.1
$$\lim_{P\to P_0}\left|\frac{f(P)}{g(P)}\right| = L \neq 0$$

e scriveremo $f \stackrel{i}{=} g|_{P_0}$ o, se non ci sono possibilità di equivoci, semplicemente $f \stackrel{i}{=} g$;

se invece

1.2.2
$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)}{g(P)} = 0$$

si dice che f ha ordine d'infinitesimo superiore a g e scriveremo $f \stackrel{i}{>} g|_{P_0}$, o semplicemente $f \stackrel{i}{>} g$;

se invece

1.2.3
$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)}{g(P)} = \infty$$

si dice che f ha ordine d'infinitesimo inferiore a g e scriveremo $f \stackrel{i}{<} g|_{P_0}$, o semplicemente $f \stackrel{i}{<} g$.

1.2.a Osservazione

La 1.2.2 equivale a scrivere

1.2.2′ $$\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f(P)}{g(P)} \right| = 0$$

e parimenti la 1.2.3 equivale a

1.2.3′ $$\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f(P)}{g(P)} \right| = +\infty \quad .$$

Abbiamo scelto le definizioni 1.2.2 e 1.2.3 perché, dal punto di vista operativo, la presenza del modulo introduce qualche complicazione; perciò, se possibile, la eviteremo.

1.2.b Osservazione

Si noti che se

1.2.4 $$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = L \neq 0 \,,$$

è verificata anche la 1.2.1

$$\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f(P)}{g(P)} \right| = |L| \neq 0$$

e pertanto se 1.2.4 è vera, $f \stackrel{l}{=} g$. Osserviamo però che 1.2.4 e 1.2.1 non sono equivalenti, e non è perciò indifferente la scelta dell'una o dell'altra definizione. Giustificheremo più avanti la preferenza per la definizione 1.2.1, nonostante la presenza del modulo (vedi 1.A.2).

1.2.c Osservazione

Si noti che

1.2.5 se $f \stackrel{l}{=} g$ è anche $g \stackrel{l}{=} f$

1.2.6 se $f \stackrel{l}{>} g$ è anche $g \stackrel{l}{<} f$

1.2.7 se $f \stackrel{l}{<} g$ è anche $g \stackrel{l}{>} f$.

Se non è verificata nessuna delle 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3 i due infinitesimi si dicono ***non confrontabili***; si dicono *confrontabili* in caso contrario.

1.A *Esempi*

1) $\sin x$ e x hanno lo stesso ordine per $x \to 0$,

perché
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{(vedi 1.2.b).}$$

2) $\sin x$ e $|x|$ hanno lo stesso ordine per $x \to 0$,

perché
$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin x}{|x|}\right| = \lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1.$$

Nota Bene Non esiste

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|}$:

infatti $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = -1$, mentre $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = 1$.

Pertanto, se avessimo scelto, anziché la definizione 1.2.1, la 1.2.4, ove non appare il modulo, $\sin x$ e $|x|$ non sarebbero stati confrontabili.

3) $1 - \cos x$ ha ordine superiore a x per $x \to 0$;

infatti
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

4) $|x|$ ha ordine inferiore a x^3 per $x \to 0$:

infatti
$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{|x|^2 \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x| \cdot x} = \infty.$$

5) $x\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)$ e x non sono confrontabili per $x \to 0$:

infatti
$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)}{x}\right| = \lim_{x\to 0} \left|2 + \sin\frac{1}{x}\right| = \lim_{x\to 0} \left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$$

e si verifica facilmente che quest'ultimo limite non esiste (si ripeta, ad esempio, il noto ragionamento usato per mostrare che non esiste $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$).

1.2.8 Proposizione

Se f e g sono infinitesimi in P_0 dello stesso ordine, allora esistono un opportuno intorno I di P_0, una costante $L \neq 0$, e un infinitesimo in P_0, $\sigma(P)$, tali che

1.2.8' $$|f(P)| = L|g(P)| + |g(P)| \cdot \sigma(P), \quad \forall P \in I - \{P_0\},$$

e viceversa.

Dimostrazione

Poiché $\lim\limits_{P \to P_0} \dfrac{|f(P)|}{|g(P)|} = L \neq 0$, basta porre $\sigma(P) = \dfrac{|f(P)|}{|g(P)|} - L$

e moltiplicare per $|g(P)|$.

Per il viceversa, si divida la 1.2.8' per $|g(P)|$ e si passi al limite per $P \to P_0$.
Si noti che

1.2.8'' $$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = L \neq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f(P) = L\,g(P) + g(P)\sigma(P), \quad \forall P \in I - \{P_0\}$$

ove $\sigma(P) = \dfrac{f(P)}{g(P)} - L$ è infinitesimo in P_0.//

1.2.9 Proposizione

Se f è infinitesimo di ordine superiore a g in P_0, allora esistono un intorno I di P_0 ed un infinitesimo in P_0, $\sigma(P)$, tali che

1.2.9' $$f(P) = g(P)\sigma(P), \quad \forall P \in I - \{P_0\}$$

e viceversa.

Dimostrazione

Poiché $\lim\limits_{P \to P_0} \dfrac{f(P)}{g(P)} = 0$, basta porre $\sigma(P) = \dfrac{f(P)}{g(P)}$. Il viceversa è ovvio.//

1.2.d Osservazione

Si noti che la 1.2.8" afferma sostanzialmente che

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = L$$

equivale a dire che $f(P)$ si può scrivere come somma di due infinitesimi, di cui uno è $L\,g(P)$ e l'altro è un infinitesimo di ordine superiore a $g(P)$ (e dunque anche a $f(P)$).

1.3 ORDINAMENTO TRA INFINITESIMI SIMULTANEI

Con le definizioni date nel paragrafo precedente si introduce tra gli infinitesimi simultanei un ordinamento, che ha proprietà simili a quello introdotto nel corpo dei numeri reali (Disequazioni 1.2).

Con f, g, h, indicheremo infinitesimi simultanei, sempre con l'ipotesi 1.2.0.
E' facile vedere che valgono le seguenti proprietà:

1.3.1 $f \overset{i}{=} f$

1.3.2 $\left(f \overset{i}{=} g\right) \wedge \left(g \overset{i}{=} h\right) \quad \Rightarrow \quad f \overset{i}{=} h$

1.3.3 $\left(f \overset{i}{>} g\right) \wedge \left(g \overset{i}{>} h\right) \quad \Rightarrow \quad f \overset{i}{>} h$

ed inoltre

1.3.4 $\left(f \overset{i}{=} g\right) \wedge \left(g \overset{i}{>} h\right) \quad \Rightarrow \quad f \overset{i}{>} h$

1.3.5 $\left(f \overset{i}{>} g\right) \wedge \left(g \overset{i}{=} h\right) \quad \Rightarrow \quad f \overset{i}{>} h$

Valgono anche le proprietà analoghe, ottenute sostituendo il simbolo $\overset{i}{>}$ col simbolo $\overset{i}{<}$.

A titolo esemplificativo, verifichiamo la 1.3.3.

Si ha

$$f \overset{i}{>} g \quad \Leftrightarrow \quad \lim \frac{f}{g} = 0, \qquad g \overset{i}{>} h \quad \Leftrightarrow \quad \lim \frac{g}{h} = 0;$$

allora

$$\lim \frac{f}{h} = \lim \left(\frac{f}{g} \cdot \frac{g}{=h}\right) = \lim \frac{f}{g} \cdot \lim \frac{g}{h} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Il concetto di ordine avrebbe scarsa utilità pratica se non riuscissimo ad attribuire agli infinitesimi un "peso numerico"; questo è lo scopo della seguente

1.3.6 Definizione

Siano f, g infinitesimi simultanei in P_0. Si dice che f ha ordine $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ***rispetto a g se*** *f ha lo stesso ordine di* $|g|^\alpha$ *, cioè se*

$$\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f(P)}{|g(P)|^\alpha} \right| = \lim_{P \to P_0} \frac{|f(P)|}{|g(P)|^\alpha} = L \neq 0.$$

1.B *Esempi*

1) $\sin x$ ha ordine 1 rispetto a x per $x \to 0$.
Infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{|\sin x|}{|x|} = 1.$$

2) x^2 ha ordine 2 rispetto ad x:
infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x^2|}{|x|^2} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|^2}{|x|^2} = 1.$$

Più in generale,

x^α, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, ha ordine α rispetto a x.
Infatti si ha

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x^\alpha|}{|x|^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha}{x^\alpha} = 1$$

(ricordiamo che x^α è definito per $x > 0$ ed è $x^\alpha > 0$).

3) $1 - \cos x$ ha ordine 2 rispetto a x.
Si ha infatti (si confronti con 1.A.3, dove si usa un'altra tecnica)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= (\text{ponendo } t = \frac{x}{2}) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ne segue che

$$\lim_{x \to 0} \frac{|1 - \cos x|}{|x|^2} = \frac{1}{2}.$$

4) $a^x - 1$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ ha ordine 1 rispetto a x:

si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{|a^x-1|}{|x|}=|\lg a|\neq 0$$
(si ricordi il limite fondamentale $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$).

5) $\operatorname{sh} x$ ha ordine 1 rispetto a x.
Infatti
$$\lim_{x\to 0}\frac{|\operatorname{sh} x|}{|x|}=\lim_{x\to 0}\left|\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\right|=\lim_{x\to 0}\left|\frac{e^{2x}-1}{2x\cdot e^x}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\cdot\lim_{x\to 0}\left|\frac{e^{2x}-1}{2x}\right|=$$
$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\left|\frac{e^{2x}-1}{2x}\right|=(\text{posto}\quad 2x=t)=\lim_{t\to 0}\left|\frac{e^t-1}{t}\right|=1.$$

6) $1-\operatorname{ch} x$ ha ordine 2 rispetto a x.
Infatti
$$\lim_{x\to 0}\frac{|1-\operatorname{ch} x|}{|x|^2}=\lim_{x\to 0}\left|\frac{(1-\operatorname{ch} x)(1+\operatorname{ch} x)}{x^2(1+\operatorname{ch} x)}\right|=$$
$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{-\operatorname{sh}^2 x}{x^2}\right|\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\operatorname{ch} x}=|-1|\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Nota Bene Per elevare l'infinitesimo di confronto, $g(P)$, ad un numero reale, senza alterare l'insieme di definizione, si deve mettere il modulo. Solo nel caso che α fosse naturale, oppure $g(P)>0$, si potrebbe omettere il valore assoluto; in tal caso, però, la definizione perderebbe in generalità.
Si osservi che, se si togliesse il modulo nella definizione 1.3.6, x non sarebbe del primo ordine rispetto a se stesso!

1.3.a Osservazione

Se
$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)}{(g(P))^n}=L\neq 0,\quad n\in\mathbf{N};$$
allora $f(P)$ ha ordine n rispetto a $g(P)$.
Infatti
$$\lim_{P\to P_0}\left|\frac{f(P)}{|g(P)|^n}\right|=\lim_{P\to P_0}\left|\frac{f(P)}{(g(P))^n}\right|=|L|\neq 0.$$

Dal punto di vista tecnico, quest'osservazione è molto utile, perché la mancanza del modulo, in genere, alleggerisce i calcoli; quindi, appena possibile, è opportuno evitare di metterlo. Si veda 1.B.3 e si confronti con 1.B.6.

1.4 IL PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

Di notevolissima importanza per il calcolo dei limiti è il seguente teorema, noto come Principio di sostituzione degli infinitesimi (che abbrevieremo con P.d.S.).

1.4.1 Teorema (Principio di sostituzione)

Siano $f, \quad g, \quad f_1, \quad f_2, \quad g_1, \quad g_2$ *infinitesimi simultanei per* $P \to P_0$ *tali che*

$$f = f_1 + f_2 \qquad e \qquad f_2 \overset{i}{>} f_1$$

$$g = g_1 + g_2 \qquad e \qquad g_2 \overset{i}{>} g_1$$

Allora

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f_1}{g_1}$$

nel senso che se esiste uno dei due limiti esiste anche l'altro e sono uguali.

In altre parole, nel rapporto tra somme di due infinitesimi di ordine diverso si possono tralasciare a numeratore ed a denominatore gli infinitesimi di ordine superiore.

1.4.1 ÷

Dimostrazione

Si ha

1.4.1'
$$\frac{f}{g} = \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{1 + \dfrac{f_2}{f_1}}{1 + \dfrac{g_2}{g_1}}$$

Ora, se esiste $\lim \dfrac{f_1}{g_1}$, applicando il teorema sul prodotto dei limiti, si ha

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f_1}{g_1} \cdot \lim \frac{1 + \dfrac{f_2}{f_1}}{1 + \dfrac{g_2}{g_1}} = \left(\lim \frac{f_1}{g_1}\right) \cdot 1 = \lim \frac{f_1}{g_1} .$$

Viceversa, se esiste $\lim \dfrac{f}{g}$, poiché

$$\lim \frac{1 + \dfrac{f_2}{f_1}}{1 + \dfrac{g_2}{g_1}} = 1,$$

in base al teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di P_0, escluso al più P_0, tale che la funzione

$$\frac{1 + \dfrac{f_2}{f_1}}{1 + \dfrac{g_2}{g_1}}$$

sia ivi diversa da zero; si può quindi in 1.4.1' dividere per questa stessa, ottenendo

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{1 + \dfrac{g_2}{g_1}}{1 + \dfrac{f_2}{f_1}} = \frac{f_1}{g_1}$$

e, se esiste $\lim \dfrac{f}{g}$, applicando il teorema sul prodotto dei limiti, si ha

$$\lim \frac{f_1}{g_1} = \lim \frac{f}{g} \cdot \lim \frac{1 + \dfrac{g_2}{g_1}}{1 + \dfrac{f_2}{f_1}} = \left(\lim \frac{f}{g}\right) \cdot 1 = \lim \frac{f}{g} . //$$

1.D *Esempi*

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + x^3}{\operatorname{tg} x + \sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 1.$

Infatti $x^3 \overset{i}{>} \sin x$ e $\sin^2 x \overset{i}{>} x$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x + \sin^2 x + \operatorname{tg}^3 x}{\sin x + \operatorname{sh}^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x + (\sin^2 x + \operatorname{tg}^3 x)}{\sin x + \operatorname{sh}^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin x} = 3.$

Si noti che qui $f_2(x) = \sin^2 x + \operatorname{tg}^3 x$: il suo ordine rispetto a x è 2, perché la somma dei due infinitesimi di ordine diverso ha per ordine il più piccolo dei due (vedi 1.3.9).

Quanto al denominatore, $\sin x$ ha ordine 1 e $\operatorname{sh}^2 x$ ha ordine 2 rispetto a x.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + x^2 - \operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^3}$

Attenzione! Qui si richiede cautela: al numeratore, come nell'esempio 2), c'è la somma di più di due infinitesimi, ma ora due di questi hanno lo stesso ordine, uno per la precisione, e la loro somma può essere quindi di ordine superiore, com'è infatti in questo caso (vedi 1.3.b e 1.C.2).

Poiché $\sin x - \operatorname{tg} x$ ha ordine tre, $(e^x - 1)^3$ ha ordine tre in quanto $e^x - 1$ ha ordine uno e $2\operatorname{tg}^2 x$ ha ordine due, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + (\sin x - \operatorname{tg} x)}{2\operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2}.$$

Gravissimo errore sarebbe stato trascurare, al numeratore, x^2 : il limite sarebbe risultato zero.

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x + x + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{x} + \sin x + x^2 + \operatorname{tg}^3 x}$

Poiché $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + x}{x} = 2$, $\sin x + x$ ha ordine uno;
quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x + x) - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{x} + [\sin x + (x^2 + \operatorname{tg}^3 x)]} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Per l'uso delle parentesi si veda sopra l'esercizio 2):
$x^2 + \operatorname{tg}^3 x$ è di ordine due, $\sin x + (x^2 + \operatorname{tg}^3 x)$ è di ordine uno, superiore a $\sqrt{x}$ ch
è di ordine $\dfrac{1}{2}$.
L'ultimo limite è zero perché il numeratore è di ordine uno, superiore a quello del denom
natore, che ha ordine $\dfrac{1}{2}$.

1.4.a Osservazione

Si può vedere facilmente che, se nella somma di più infinitesimi un addendo ha ordine inferior
a ciascun altro addendo, allora la somma ha l'ordine dell'infinitesimo di ordine inferiore. Quest
ci eviterà in futuro di appesantire le notazioni con l'uso di troppe parentesi.

2.2 PARTE PRINCIPALE

2.2.1 Definizione

Siano f, g infinitesimi simultanei e sia

$$\lim \frac{f}{g} = L \neq 0,$$

allora $L \cdot g$ si dice parte principale di f rispetto a g.

2.2.2 Proposizione

Sia $L \cdot g$ la parte principale di f rispetto a g, allora si ha:

2.2.3 *f e g sono dello stesso ordine,*

2.2.4 $f \sim Lg$,

2.2.5 $f = Lg + g \cdot \sigma$
ove σ è un infinitesimo simultaneo ad f e g,

2.2.6 *f differisce da $L \cdot g$ per un infinitesimo, $g \cdot \sigma$, di ordine superiore a f.*

La dimostrazione, tenuto conto delle 1.2.b e 1.2.d, è banale.

Alcuni esempi chiariranno l'utilità della Proposizione 2.2.2.

2.D *Esempi*

1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(2\operatorname{tg} x)}{1 - \cos x}$

Da $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ segue subito che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(2\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{4\sin^2(2\operatorname{tg} x)}{(2\operatorname{tg} x)^2} = 4.$$

Quindi per 2.2.5 si ha
$\sin^2(2\operatorname{tg} x) = 4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \sigma_1(x)$.
ove $\sigma_1(x)$ è un infinitesimo per $x \to 0$ e $\operatorname{tg}^2 x \cdot \sigma_1(x) \stackrel{\cdot}{>} 4\operatorname{tg}^2 x$.
Poiché $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (vedi 1.B.3), sempre per 2.2.5 si ha

÷ 2.D.2

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + x^2\sigma_2(x),$$

ove $\sigma_2(x)$ è un infinitesimo per $x \to 0$ e $x^2 \cdot \sigma_2(x) \overset{i}{>} \frac{1}{2}x^2$.

Ora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2\operatorname{tg} x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \sigma_1(x)}{\frac{1}{2}x^2 + x^2 \cdot \sigma_2(x)} = (\text{P.d.S.}) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} 8\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2 = (\text{vedi } 1.\text{C}.1) = 8.$$

Nota Queste due ultime righe spiegano la ragione storica per cui il Teorema 1.4.1 si chiama principio di sostituzione degli infinitesimi. Tenuto conto di 2.2.5 si può infatti dire che nel calcolo di un limite che si presenta come rapporto di due infinitesimi simultanei il numeratore si può *sostituire* con una sua parte principale e così pure il denominatore.

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x^7 - \operatorname{tg} x}{\sin x(1-\cos x) + x^8}$.

E'

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x^7 - \operatorname{tg} x}{\sin x(1-\cos x) + x^8} = (\text{P.d.S.}) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{\sin x(1-\cos x)} = \quad (2^*).$$

Ora, poiché $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = -\frac{1}{2}$, si ha

2.2.7 $$\sin x - \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}x^3 + x^3\sigma_1(x)$$

ove $\sigma_1(x)$ è un infinitesimo simultaneo agli altri.

Per lo stesso motivo

2.2.8 $$\sin x = x + x \cdot \sigma_2(x)$$

2.2.9 $$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + x^2\sigma_3(x).$$

Si noti che 2.2.7 è un'uguaglianza valida per $x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; può essere considerata valida anche in $x = 0$, ponendo, per continuità, $\sigma_1(0) = 0$. Similmente, 2.2.8 e 2.2.9 sono uguaglianze valide $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$; si può avere l'uguaglianza anche in $x = 0$ prolungando $\sigma_2(x)$ e $\sigma_3(x)$ per continuità, ponendo $\sigma_2(0) = 0$ e $\sigma_3(0) = 0$.

Si ha perciò

$$(2^*) \qquad = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + x^3\sigma_1(x)}{(x + x\sigma_2(x))\left(\frac{1}{2}x^2 + x^2\sigma_3(x)\right)} = \qquad (2^{**}).$$

Riteniamo opportuno rilevare che, nel passaggio (2^*), non si fatto altro che riscrivere il rapporto precedente in altro modo, sostituendo alle funzioni date altre ad esse uguali, in cui appaiono però, sostanzialmente, potenze di x; la "complessità delle funzioni" si traduce nel fatto di non conoscere una buona espressione di σ_1, σ_2, σ_3. Questi ultimi sono però, in questo caso, in qualche modo "controllabili", poiché, grazie al P.d.S. si potranno, ai fini del limite, trascurare.

$$(2^{**}) \qquad = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{2}x^3 + x^3\sigma_1(x)}{\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{2}x^3\sigma_2(x) + x^3\sigma_3(x) + x^3\sigma_2(x)\sigma_3(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{2}x^3 + x^3\sigma_1(x)}{\dfrac{1}{2}x^3 + \left(\dfrac{1}{2}x^3\sigma_2(x) + x^3\sigma_3(x) + x^3\sigma_2(x)\sigma_3(x)\right)} =$$

$$= (\text{P.d.S.}) = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{2}x^3}{\dfrac{1}{2}x^3} = -1.$$

Non sempre, ovviamente, si possono trascurare gli infinitesimi "$\sigma(x)$". Ad esempio, se si considera $\sin x - \operatorname{tg} x$, si ha:

$$\sin x = x + x\sigma_1(x)$$

$$\operatorname{tg} x = x + x\sigma_2(x)$$

e quindi

$$\sin x - \operatorname{tg} x = x + x\sigma_1(x) - x - x\sigma_2(x) = x\,(\sigma_1(x) - \sigma_2(x))$$

e questo non ci dice nulla sull'ordine della differenza, se non che è superiore ad uno. Per altra via, sappiamo che $\sigma_1(x) - \sigma_2(x)$ deve essere di ordine due. Impareremo più avanti un metodo più generale per trattare molti casi di questo tipo.

Nota Bene La tecnica adoperata nell'esempio precedente si adatta a dimostrare con facilità che, nella somma di infinitesimi dello stesso ordine, l'ordine aumenta se e solo se le parti principali rispetto ad una stessa funzione sono una l'opposta dell'altra; in caso contrario rimane immutato.

Esempio

Consideriamo l'infinitesimo $\sin x - \operatorname{tg} x$; le parti principali dei due addendi sono rispettivamente x e $-x$ e l'ordine della somma diventa tre.

Se invece consideriamo l'infinitesimo $\sin x + \operatorname{tg} x$, le parti principali sono rispettivamente x e x e l'ordine della somma rimane uno.

Introduciamo ora un altro concetto che ci permetterà, tra l'altro, alcune semplificazioni di scrittura.

2.3 "o" O PICCOLO

2.3.1 Definizione

Siano f e g due funzioni definite in un intorno I di P_0, escluso al più P_0, e sia g diversa da zero in $I - \{P_0\}$.
Se è

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = 0$$

si dice che f è un o piccolo di g per $P \to P_0$, o in P_0, e si scrive "f è $o(g)$", oppure, con scrittura meno felice, $f = o(g)$.

Si noti che né f né g sono supposte infinitesime.
Ad esempio, $\sin x$ è $o(x)$, per $x \to +\infty$ e
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ non esiste, mentre $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Con queste notazioni, affermare che f è un infinitesimo equivale a dire che f è $o(1)$, dove 1 è intesa come la funzione costante 1.
Ovviamente, si potrebbe anche dire che f è $o(2)$ o in generale $o(c)$, con $c \neq 0$.

Abbiamo affermato che la scrittura $f = o(g)$ è poco felice. Infatti tutti gli infinitesimi simultanei (per esempio per $x \to 0$) sono $o(1)$; abbiamo $\sin x = o(1)$ e $\operatorname{tg} x = o(1)$, ma per questo "uguale" non vale la proprietà transitiva. Si può pensare che essere "o piccolo di..." sia una proprietà che caratterizza un insieme di funzioni, e quindi determina l'insieme stesso. Nelle applicazioni pratiche, risulta più utile considerare i singoli elementi di detto insieme; perciò dicendo è *un o* di..." si intende implicitamente dire che è un elemento dell'insieme sopra descritto.