3. INFINITI

3.1 DEFINIZIONE E PRIME PROPRIETA'

3.1.1 Definizione

Sia $f \ : \ (I \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$, $\quad P_0 \in DI$, *potendo* P_0 *essere, al solito, uno dei simboli* $+\infty$, $\quad -\infty$, $\quad \infty$; *se*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \infty \quad ,$$

*la funzione si dice **infinita** in* P_0*; si può dire anche che* f *è **un infinito** in* P_0 *(o per* $P \to P_0$*).*

Esempi

$\operatorname{tg} x$ è un infinito in $\dfrac{\pi}{2}$, ma anche in $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\quad k \in \mathbb{Z}$

$\dfrac{1}{x}$ è infinita in $x = 0$,

$\lg x$ è infinita per $x \to 0^+$,

e^x è infinita per $x \to +\infty$,

$\sin x$ non è un infinito in nessun punto, così come $\operatorname{arctg} x$,

x^2 è infinita solo per $x \to -\infty$ o per $x \to +\infty$.

Richiamiamo alcune

Proprietà degli infiniti

3.1.2 *f è un infinito se e solo se lo è $|f|$.*

3.1.3 *Se f, g sono definite in un intorno I di P_0, escluso al più P_0, se* $|g(P)| \geq |f(P)| \qquad \forall P \in I - \{P_0\}$ *e se f è infinita in P_0, allora anche g è infinita in P_0.*

3.1.4 *Se f è infinita in P_0 e g è limitata in un intorno di P_0, la somma $f + g$ è infinita in P_0.*

3.1.5 *Se f è infinita in P_0 e g è **limitata lontano da zero** in un intorno di I di P_0, (cioè se esiste un $k > 0$ tale che $|g(P)| \geq k$, $\forall P \in I - \{P_0\}$), il prodotto $f \cdot g$ è un infinito in P_0.*

Nota Bene La dizione "limitata lontano da zero" non implica affatto che g sia limitata, ed è più forte della supposizione che g non si annulli.
Per esempio, $\frac{1}{x}$ in un intorno di $+\infty$ non si annulla, ma non è "limitata lontano da zero".

3.1.6 Definizione *Se f e g sono definite nello stesso insieme I, escluso al più P_0, e sono entrambe infinite in P_0, si dicono infiniti simultanei in P_0, o per $P \to P_0$.*

Per esempio,
$\operatorname{tg} x$ e $\dfrac{1}{x - \frac{\pi}{2}}$ sono infiniti simultanei in $\frac{\pi}{2}$,

$\operatorname{ctg} x$ e $\frac{1}{x}$ sono infiniti simultanei in 0,

e^x e x^2 sono infiniti simultanei per $x \to +\infty$,
$\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{ctg} x$ non sono infiniti simultanei in alcun punto di $\mathbb{R}$.

3.2 CONFRONTO ED ORDINAMENTO FRA INFINITI

Notando che, ovviamente, se $f(P)$ è un infinito, $\dfrac{1}{f(P)}$ è un infinitesimo, tutta la teoria del confronto tra infiniti e dell'ordine rispetto ad un infinito di confronto si può ricavare da quella degli infinitesimi, semplicemente passando ai reciproci.
Poiché tuttavia, negli esercizi, il confronto fra infiniti è una tecnica importante, è opportuno riportarne la trattazione in forma autonoma.

Dati due infiniti simultanei f e g (nel caso degli infiniti l'ipotesi 1.2.0 è ovviamente sempre verificata),
se

3.2.1
$$\lim \left|\frac{f}{g}\right| = L \neq 0$$

si dice che f e g hanno lo *stesso ordine*; scriveremo $f \overset{\infty}{=} g$.

Se

3.2.2
$$\lim \frac{f}{g} = \infty$$

si dice che f è di *ordine superiore* a g; scriveremo $f \overset{\infty}{>} g$.

Se

3.2.3 $$\lim \frac{f}{g} = 0$$

si dice che f ha *ordine inferiore* a g; scriveremo $f \overset{\infty}{<} g$.

In questi tre casi gli infiniti si dicono *confrontabili*; se nessuna delle 3.2.1, 3.2.2, 3.2 vera, cioè se $\lim \left|\frac{f}{g}\right|$ non esiste, gli infiniti si dicono *non confrontabili*.

3.2.4 Osservazione

La 3.2.2 equivale a

3.2.2′ $$\lim \left|\frac{f}{g}\right| = +\infty \quad .$$

La 3.2.3 equivale a

3.2.3′ $$\lim \left|\frac{f}{g}\right| = 0 \quad .$$

3.2.5 Osservazione

Si noti che se

3.2.6 $$\lim \frac{f}{g} = L \neq 0 \, ,$$

si ha anche

$$\lim \left|\frac{f}{g}\right| = |L| \neq 0 \, ,$$

pertanto $f \overset{\infty}{\cong} g$.

Continuano a valere le proprietà esposte nell'Osservazione 1.2.c, con il simbolo in luogo del simbolo i, cioè

$$\text{se} \quad f \overset{\infty}{\cong} g \quad \text{è anche} \quad g \overset{\infty}{\cong} f,$$

$$\text{se} \quad f \overset{\infty}{>} g \quad \text{è anche} \quad g \overset{\infty}{<} f,$$

$$\text{se} \quad f \overset{\infty}{<} g \quad \text{è anche} \quad g \overset{\infty}{>} f.$$

E' abbastanza facile rendersi conto che valgono proprietà di ordinamento analoghe a quelle di 1.3.

In particolare, diamo la

3.2.7 Definizione

Siano f, g *infiniti simultanei in* P_0; *si dice che* f *ha ordine* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *rispetto a* g *se* f *ha lo stesso ordine di* $|g|^\alpha$, *cioè se*

3.2.7' $$\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f(P)}{|g(P)|^\alpha} \right| = \lim_{P \to P_0} \frac{|f(P)|}{|g(P)|^\alpha} = L \neq 0 \,.$$

Si noti l'identità formale della 3.2.7' con la corrispondente 1.3.6, relativa agli infinitesimi.

Le proprietà degli infinitesimi delle Proposizioni 1.3.7 e 1.3.8 valgono anche per gli infiniti; formalmente basta sostituire la parola "infinito" alla parola "infinitesimo" ed i simboli "$\overset{\infty}{>}$, $\overset{\infty}{<}$, $\overset{\infty}{\cong}$" ai simboli "$\overset{i}{>}$, $\overset{i}{<}$, $\overset{i}{=}$". Le dimostrazioni sono perfettamente uguali.

Esempio

Siano $f(x) = \sqrt{x^4+1}$, $g(x) = x$, due infiniti per $x \to +\infty$.

Poiché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}} = 1.$$

$f(x)$ risulta avere ordine due rispetto all'*infinito campione* $g(x) = x$.

Purtroppo, nelle applicazioni pratiche, gli infiniti "più interessanti" non hanno ordine esprimibile con un numero reale rispetto agli infiniti campione più naturali, cioè x e $\frac{1}{x - x_0}$ (rispettivamente per $x \to \infty$ e per $x \to x_0$); ad esempio si vedano, più oltre gli esercizi 4.B.

3.3 PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE (P.d.S.)

Vale anche per gli infiniti il

3.3.1 Teorema (Principio di sostituzione degli infiniti)

Siano $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2$ *infiniti simultanei, sia*

$f = f_1 + f_2, \quad g = g_1 + g_2 \quad$ *e* $\quad f_1 \overset{\infty}{>} f_2, \quad g_1 \overset{\infty}{>} g_2.$

Allora

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f_1}{g_1}$$

dove l'uguaglianza vale nel senso specificato nel Teorema 1.4.1.

Si noti che in questo caso, ai fini del limite, si trascurano gli infiniti di ordine inferiore, anche nel senso più generale esposto in 3.2.10.
La dimostrazione si può ricondurre alla generalizzazione del P.d.S. (vedi 2.3.3); infatti nelle ipotesi poste si ha $f_2 = o(f_1)$, $g_2 = o(g_1)$, quindi $f = f_1 + o(f_1)$ e $g = g_1 + o(g_1)$.