# Lezioni del 5-6 ottobre 2016 (F. Montefalcone)

## 0.1 Calcolo Combinatorio

**Definizione 1. Fattoriale:** Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si pone:

$$0! = 1, \quad n! \stackrel{def.}{=} (n-1)! \cdot n,$$

ossia

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot (n-1) \cdot n.$$

**Coefficiente binomiale:** Siano $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geq k$. Si pone

$$C_{n,k} \stackrel{def.}{=} \binom{n}{k} \stackrel{def.}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ricordiamo pure le seguenti nozioni:

**Disposizioni semplici** (di $n$ elementi di classe $k$): Siano $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geq k$. Si pone

$$D_{n,k} \stackrel{def.}{=} k! \cdot C_{n,k} = \frac{n!}{n-k!}$$

**Disposizioni con ripetizione** (di $n$ elementi di classe $k$): Siano $n, k \in \mathbb{N}$. Si pone

$$F_{n,k} \stackrel{def.}{=} n^k.$$

**Osservazione 0.1.1.** Valgono le seguenti osservazioni:

(1) Il fattoriale fornisce il numero delle permutazioni di $n$ elementi. (In altre parole fornisce il "numero" dei possibili ordinamenti di $n$ oggetti distinti).

(2) $D_{n,k}$ corrisponde al "numero" delle applicazioni (funzioni) iniettive di un insieme formato da $k$ elementi in un altro insieme formato da $n$ elementi. ($D_{n,k}$ si ottiene pensando di sistemare $n$ oggetti distinti in $k$ cassetti. Allora, nel primo cassetto ne possiamo mettere $n$, nel secondo $n-1$, nel terzo $n-3$,..., nel $k$-esimo $n-k+1$: moltiplicando questi numeri tra loro si ottiene proprio $D_{n,k}$. In effetti, osservate che anche il fattoriale si ottiene in modo analogo e che si ha $D_{n,n} = n!$.)

(3) $C_{n,k}$ rappresenta il numero dei sottoinsiemi $B$ di $k$ elementi di un dato insieme $A$ formato da $n$ elementi. $C_{n,k}$ è spesso detto "numero" delle *combinazioni di $n$ elementi di classe $k$*. Osservare che $C_{n,k}$ si ottiene da $D_{n,k}$ dividendo per $k!$. (Questo avviene perchè se vogliamo "contare" i sottinsiemi di $k$ elementi di un insieme di $n$ elementi non interessano i modi in cui "disponiamo" i $k$ elementi di ogni sottinsieme: se quindi partiamo da $D_{n,k}$ basta allora dividere per $k!$.)

(4) $F_{n,k}$ corrisponde al numero delle funzioni di un insieme di $k$ elementi in un insieme di $n$ elementi. ($F_{n,k} = n^k$ si ottiene pensando di sistemare $n$ oggetti in $k$ cassetti, ma potendo "ripetere" le scelte degli oggetti. Allora, nel primo cassetto ne possiamo mettere $n$, nel secondo $n$,..., nel $k$-esimo $n$: moltiplicando questi numeri tra loro si ottiene ovviamente $n^k$.)

**Osservazione 0.1.2** (Proprietà dei coeff. binomiali)**.** Valgono le seguenti:

(1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(3) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

La dimostrazione è un esercizio elementare (ad es., per induzione).

**Osservazione 0.1.3.** La terza proprietà di sopra, detta di *Stifel*, ammette un'interpretazione combinatoria. Il numero di sottiensiemi $B$ di $k$ elementi di un inseme $A$ di $n$ elementi è $\binom{n}{k}$. Sia $a \in A$ un fissato elemento di $A$. I sottoinsiemi $B \subset A$ di $k$ el. sono tanti quanti i sottiensiemi $B \subset A$ di $k$ el. che non contengono $a$ assieme ai sottiensiemi $B \subset A$ di $k$ el. che contengono $a$. I primi sono $\binom{n-1}{k}$ –perchè $a$ non c'è– mentre i secondi sono $\binom{n-1}{k-1}$.

**Teorema 1** (Binomio di Newton)**.** $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k. \tag{1}$$

*Dimostrazione.* (Per induzione) La (1) vale per $n = 0$ e, se $n = 1$, si ha

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}\, b^k = a + b,$$

cioè è vera. Pertanto si assuma che (1) vale fino al caso $n$. Bisogna allora provare che è vera per $n+1$.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\right)(a+b) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \underset{\text{porre } k=h-1}{\sum_{h=1}^{n+1}} \binom{n}{h-1} a^{n-h+1}\, b^h = \\
&\underset{\star}{=} \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n-k+1}\, b^k + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^{n+1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} b^{n+1} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}\, b^k + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}\, b^k
\end{aligned}
$$

$\star$ (nella seconda sommatoria, si ritorna ad usare l'indice $k$)

che è quanto si doveva provare.

**N.B.** La formula dimostrata per il caso $n+1$ è quella che si ottiene da (1) sostituendo $n$ con $n+1$. $\square$

Notare che si sono usate le proprietà dei coefficienti binomiali ed in particolare la formula di Stifel (3) nella forma:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Si osservi pure che i coefficienti binomiali si "dispongono" con la seguente modalità (detta *Triangolo di Tartaglia*):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & \to & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & \to & 2 & \to & 1 & & & & \\
 & & & 1 & \to & 3 & \to & 3 & \to & 1 & & & \\
 & & 1 & \to & 4 & \to & 6 & \to & 4 & \to & 1 & & \\
 & 1 & \to & 5 & \to & 10 & \to & 10 & \to & 5 & \to & 1 & \\
1 & \to & 6 & \to & 15 & \to & 20 & \to & 15 & \to & 6 & \to & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Figura 1: Triangolo di Tartaglia

**Osservazione 0.1.4.** Notare che i termini sulle righe " successive" si ottengono sommando quelli sulle righe "precedenti", come indicato in Figura 1. Il motivo per cui ciò accade è proprio la formula di Stifel.

**Osservazione 0.1.5.** Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme formato da $n$ elementi? Si ha:

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} \underset{\star}{=} (1+1)^n = 2^n.$$

$\uparrow$ corrisponde all'insieme $\varnothing$ $\qquad$ $\uparrow$ corrisponde all'insieme stesso

$\star$ per il Binomio di Newton

(Si usa il fatto che $\binom{n}{k}$ rappresenta i sottoinsiemi di $k$ elementi di un insieme di $n$ elementi: basta allora sommarli tutti.)

Notare che proprio per questa ragione, l'insieme delle parti di $A$ si denota spesso con $2^A$.

**Esempio 0.1.1.** Se $A = \{1, 2, 3\}$ allora l'insieme delle parti di $A$ è dato da

$$2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

# Esercitazioni

## Calcolo Combinatorio e Induzione

**Esercizio 0.1.1.** *Quanti sono i numeri di* $3$ *cifre decimali tutte diverse?*
Le disposizioni di tre cifre prese dall'insieme $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ sono $\binom{10}{3}$. Tuttavia sono da togliere le stringhe $0ab$ dove $a, b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Queste ultime sono esattamante $\binom{9}{2}$. La risposta è quindi $\binom{10}{3} - \binom{9}{2} = 648$.

**Esercizio 0.1.2.** *Dato un poligono regolare di* $n$ *lati, calcolare il numero* $d$ *delle sue diagonali.*
Le rette congiungenti gli $n$ vertici sono tante quante le coppie (non ordinate) che si possono formare con $n$ oggetti. Ossia $\binom{n}{2}$. Tuttavia occorre adesso sottrarre il numero di lati (ossia le $n$ rette che congiungono le coppie di "vertici consecutivi"). La risposta è quindi

$$d = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

**Esercizio 0.1.3.** *Dimostrare col principio d'induzione che si ha*

$$(\star) \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ovviamente $1 = \sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Possiamo assumere $(\star)$ al passo $n$ (è la nostra ipotesi iduttiva) e dimostrare la formula al passo $n+1$. Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ciò prova $(\star)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

**Esercizio 0.1.4.** *Dimostrare col principio d'induzione che si ha*

$$(\star) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left( \sum_{k=1}^{n} k \right)^2.$$

Ovviamente $1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 = 1^2 = 1$. Possiamo assumere $(\star)$ al passo $n$ (è la nostra ipotesi iduttiva) e dimostrare la formula al passo $n+1$.

Si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^2(n+1) \\
&\underbrace{=}_{per(\star)} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^2(n+1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^2(n+1) \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 2\frac{(n+1)^2 n}{2} + (n+1)^2 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2} + n + 1\right)^2 \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 .
\end{aligned}$$

Ciò prova $(\star)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

**Esercizio 0.1.5.** *Dimostrare col principio d'induzione che si ha*

$$(\star) \qquad n! \geq 2^{n-1} \qquad \forall\, n \in N.$$

Ovviamente si ha $1 \geq 2^{1-1} = 1$. Assumendo ora $(\star)$ proviamo che $(n+1)! \geq 2^n$. In effetti, si ha

$$(n+1)! = n!(n+1) \underbrace{\geq}_{per(\star)} 2^{n-1}(n+1) \geq 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n.$$

Ciò prova $(\star)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

## Studio del dominio $D = Dom(f) \subset \mathbb{R}$ di $f : D \to \mathbb{R}$.

**Esercizio 0.1.6.** *Studiare il dominio di* $f(x) = (\sqrt{-x^2+5x-6}+7-3x)^{\arctan\left(\frac{1}{x-2}\right)}$.
Si ha che il dominio di una funzione $f(x) := h(x)^{g(x)}$ è dato da

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\} \cap Dom(g).$$

Si ha che $Dom(g) = \underbrace{Dom(\arctan)}_{=\mathbb{R}} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$.
Quindi $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\} \setminus \{2\}$. Occorre adesso studiare la disequazione

$$(\star) \quad \sqrt{-x^2+5x-6} + 7 - 3x > 0.$$

È equivalente ai seguenti due sistemi:

$$(I)\begin{cases}3x-7\geq 0\\ -x^2+5x-6>(3x-7)^2\end{cases}\qquad\qquad (II)\begin{cases}3x-7<0\\ -x^2+5x-6\geq 0\end{cases}.$$

(La soluzione di ($\star$) è l'unione delle soluzioni dei sistemi (I) e (II). Notare che nel sistema (I) non appare la condizione di esistenza della radice quadrata, dato che questa è verificata automaticamente, in virtù della seconda diseq.). Risolviamo (I).

La prima diseq. è risolta dagli $x \geq \frac{7}{3} = 2.\overline{3}$. Inoltre, la seconda diseq. è equivalente a

$$10x^2 - 47x + 55 < 0.$$

L'eq. associata ha sol. $x_{\pm} = \frac{47\pm\sqrt{47^2-55\cdot 40}}{20} = \frac{47\pm 3}{20} = 2.2$ e $2.5$. Quindi la diseq. è risolta per $x \in ]2.2, 2.5[$ ed (I) ha per soluzione l'intervallo

$$]2.2, 2.5[\cap[2.\overline{3}, +\infty[= [2.\overline{3}, 2.5[.$$

Risolviamo (II).

La prima diseq. è risolta dagli $x < \frac{7}{3} = 2.\overline{3}$. Inoltre, l'eq. $x^2-5x+6 = 0$ ha sol. $x_{\pm} = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} = 2$ e $3$. Segue che la seconda diseq. è risolta per $x \in [2, 3]$. Ne segue che (II) ha per soluzione l'intervallo

$$[2, 3]\cap] - \infty, 2.\overline{3}[= [2, 2.\overline{3}[.$$

Allora la soluzione di ($\star$) è

$$[2.\overline{3}, 2.5[\cup[2, 2.\overline{3}[= [2, 2.5[$$

e pertanto $Dom(f) = [2, 2.5[\setminus\{2\} =]2, 2.5[$.

**Esercizio 0.1.7.** *Studiare il dominio di* $f(x) = \left(\arccos\left(\frac{x}{x+4}\right) - \frac{\pi}{3}\right)^{\sin(x)}$.
Si ha che il dominio di una funzione $f(x) := h(x)^{g(x)}$ è dato da

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0\} \cap Dom(g).$$

Si ha che $Dom(g) = Dom(\sin) = \mathbb{R}$. Si deve pertanto studiare la disequazione

$$\arccos\left(\frac{x}{x+4}\right) > \frac{\pi}{3}.$$

Notare che dev'essere $x \neq -4$. Inoltre ricordare che $\arccos y = \frac{\pi}{3}$ se e solo se $y = \frac{1}{2}$. Pertanto, dalla stretta decrescenza della funzione arccos sul suo dominio $[-1, 1]$, si ottiene che

$$\arccos y > \frac{\pi}{3} \Longleftrightarrow y \in \left[-1, \frac{1}{2}\right[.$$

Rimane quindi da studiare l'insieme

$$(\star) \qquad -1 \leq \frac{x}{x+4} < \frac{1}{2},$$

ossia il sistema

$$(I) \begin{cases} \frac{x}{x+4} < \frac{1}{2} \\ -1 \leq \frac{x}{x+4} \end{cases} .$$

La prima diseq. è risolta per $x \in ]-4, 4[$. La seconda diseq. è invece risolta per $x \in ]-\infty, -4[ \cup [-2, +\infty[$. La soluzione è quindi $Dom(f) = [-2, 4[$.

## Inf, Sup, Min, Max.

**Esercizio 0.1.8.** *Studiare* $\inf / \sup$ *degli insiemi*

$$A = \left\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B = \left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Dimostriamo che

$$\sup A = 1 = \inf B.$$

Dalla nota caratterizzazione del sup, si ha che $\sup A = 1$ se e solo se

$$\begin{array}{ll} 1) & a \leq 1 \qquad \forall\, a \in A; \\ 2) & \forall \epsilon > 0 \ \exists\ a \in A : 1 - \epsilon < a. \end{array}$$

Poniamo ora $a_n := \frac{n-1}{n}$ e $b_n := \frac{n+1}{n}$. Evidentemente, si ha

$$a_n \leq 1, \qquad b_n \geq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Per cui 1) è vera. Per dimostrare 2) si osservi che

$$\frac{n-1}{n} + \epsilon > 1 \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{n} + \epsilon > 1 \Longleftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Pertanto, dato $\epsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che se $n \geq \overline{n}$ allora $1-\epsilon < a_n$. Infatti, basta[1] scegliere $\overline{n} > \frac{1}{\epsilon}$.

Il fatto che $\inf B = 1$ si dimostra analogamente, ma usando le proprietà caratteristiche dell'inf. Ossia, per definizione, si ha $\inf B = 1$ se e solo se

$$\begin{array}{lll} 1) & b \geq 1 & \forall\, b \in B; \\ 2) & \forall \epsilon > 0\ \exists\, b \in B : 1+\epsilon > b. & \end{array}$$

Notare che $1 \notin A \cup B$ (visto che $\frac{n \pm 1}{n} = 0 \iff \pm 1 = 0$, che è assurdo). Pertanto $\nexists \max A$ e $\nexists \min B$. Infine è evidente che $\inf A = \min A = 0$ ed inoltre che $\sup B = \max B = 2$.

**Esercizio 0.1.9.** *Studiare* $\inf / \sup$ *e/o* $\min / \max$ *dell'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2n}{1+n^2} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Poniamo $a_n := \frac{2n}{1+n^2}$. Si ha

$$-1 \leq a_n \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dimostriamolo. Le due disequazioni sono evidentemente verificate essendo equivalenti alla diseq. $(n \pm 1)^2 \geq 0$ (sempre vera). Pertanto $A$ è limitato e contenuto in $[-1, 1]$. Ma se $n = \pm 1$ si ottiene

$$a_{-1} = -1, \qquad a_1 = 1,$$

ossia i valori $\pm 1$ sono assunti da elementi di $A$. Allora $\inf A = \min A = -1$ e $\sup A = \max A = 1$.

**Esercizio 0.1.10.** *Siano* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *funzioni. Dimostrare che*

$$\inf_X f + \inf_X g \leq \inf_X (f+g), \qquad \sup_X f + \sup_X g \geq \sup_X (f+g).$$

Si ponga $m_1 := \inf_X f$, $m_2 := \inf_X g$ e $M_1 := \sup_X f$, $M_2 := \sup_X g$. Si ha sempre (per definizione di inf/sup) che

$$m_1 \leq f(x), \quad m_2 \leq g(x) \qquad \forall\, x \in X,$$

e

$$M_1 \geq f(x), \quad M_2 \geq g(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

[1] Sia $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la funzione **parte intera** definita come $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Allora, per es., basta porre $\overline{n} = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$.

Pertanto, ad es., si ha

$$m_1 + m_2 \leq f(x) + g(x) = (f+g)(x) \qquad \forall\, x \in X$$

che implica subito la prima disuguaglianza. Analogamente, si ha che l'altra diseguaglianza vale perché

$$M_1 \geq f(x), \quad M_2 \geq g(x) \qquad \forall\, x \in X,$$

implica

$$M_1 + M_2 \geq f(x) + g(x) = (f+g)(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

**Esercizio 0.1.11.** *Studiare* inf / sup *e/o* min / max *dell'insieme*

$$A = \left\{ n + \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si osservi che, posto $a_n := n + \frac{2}{n}$, si ha sempre

$$3 \leq a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad n < a_n < n+1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, n > 2,$$

visto che $0 < \frac{2}{n} < 1$ se $n > 2$. Da ciò segue subito che $\inf A = \min A = 3$ e $\sup A = +\infty$.

**Esercizio 0.1.12.** *Studiare* inf / sup *e/o* min / max *dell'insieme*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 2, \quad \left| \frac{x-3}{x+2} \right| \leq 1 \right\}.$$

Si osservi che per $y \in \mathbb{R}$ la diseq. $|y| \leq 1$ è equivalente a $-1 \leq y \leq 1$. Pertanto occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{x-3}{x+2} \leq 1 \\ \frac{x-3}{x+2} \geq -1 \end{cases}.$$

La prima diseq. è risolta per $x > -2$. La seconda diseq. è invece risolta per $x \in ]-\infty, -2[ \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. La soluzione è quindi $Dom(f) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Pertanto, dato che

$$A = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[,$$

segue subito che $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$ e $\sup A = +\infty$. In particolare $\nexists \max A$.

**Esercizio 0.1.13.** *Studiare* $\sup A$*, dove* $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\}$.

Facciamo vedere che, posto $\sup A = M$, si deve avere necessariamente $M^3 = 2$. Basterà mostrare che sono false entrambe le diseguaglianze $M^3 \gtrless 2$. Ciò sarà equivalente alla tesi. Dimostriamo solo una delle due, ad es. che $M^3 < 2$ è falsa (l'altra è analoga).
Per fare questo, dimostriamo che $M$ non è maggiorante di $A$ (che, a posteriori, è assurdo), ossia che esiste $x \in A$ con $x > M$. A tal fine, sia $x \in A$ (quindi $x^3 < 2$) e dimostriamo che esiste $\epsilon \in ]0,1]$ tale che $x = M + \epsilon$. Se $\epsilon \in ]0,1]$ allora $\epsilon^2 \leq \epsilon$ e quindi anche $\epsilon^3 \leq \epsilon$. Pertanto

$$(M+\epsilon)^3 = M^3 + 3M^2\epsilon + 3M\epsilon^2 + \epsilon^3 \leq M^3 + \epsilon(3M^2 + 3M + 1).$$

Imponendo che il secondo membro sia $< 2$ segue che, se $\epsilon < \min\left\{1, \frac{2-M^3}{3M^2+3M+1}\right\}$, allora

$$(M+\epsilon)^3 < 2 \Longleftrightarrow x = M + \epsilon \in A.$$

Ossia, $M$ non è un maggiorante di $A$, che è assurdo.